



Allen-Cahn 方程相变界面的正则性理论

王克磊*, 王路博

武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

E-mail: wangkelei@whu.edu.cn, wanglubo@whu.edu.cn

收稿日期: 2025-12-31; 接受日期: 2026-05-14; 网络出版日期: 2026-06-24; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12425108) 资助项目

摘要 Allen-Cahn 方程是描述相变现象的一个经典模型, 其相变界面 (由解的水平集如 $\{u = 0\}$ 表征) 的正则性与收敛性是该领域的核心问题. 本文对椭圆情形的奇异扰动 Allen-Cahn 方程, 系统介绍其相变界面的零阶、一阶及二阶正则性并讨论这些正则性理论的若干应用. 在零阶正则性方面, 借助 Γ -收敛理论和变分形理论等, 给出相变界面在 Hausdorff 距离下的收敛, 并明确极限变分形性质; 在一阶正则性方面, 介绍 Allard 型 ϵ -正则性等关于相变界面一致 $C^{1,\theta}$ 估计的结果; 对二阶正则性, 讨论反向 Lyapunov-Schmidt 约化方法的应用、相变界面一致 $C^{2,\theta}$ 估计及其与 Toda 方程组稳定解之间的联系等. 最后, 介绍这些正则性理论在 De Giorgi 猜想、有限 Morse 指标解的分类和构造 Riemann 流形中无穷多极小曲面等问题中的应用.

关键词 Allen-Cahn 方程 相变界面 正则性 极小超曲面

MSC (2020) 主题分类 35B25, 35B45, 35J91, 49Q20

1 引言

Allen-Cahn 方程是由 Allen 和 Cahn [5] 于 20 世纪 70 年代提出的用于描述相变现象的一个模型. 它最初主要用于描述多相系统中不同相之间界面的演化过程, 其核心思想是通过“弥散界面” (diffuse interface) 模型, 将原本的尖锐界面 (sharp interface) 用一个连续变化的“序参量”来描述, 从而避免了直接处理尖锐界面的数学困难. 该方程已经被广泛运用于材料科学 (如合金相分离、晶粒生长和聚合物共混)、生物物理 (如细胞膜动力学和肿瘤生长边界模拟) 和图像处理 (如图像分割) 等学科中.

在数学中, Allen-Cahn 方程的尖锐界面极限一般是极小曲面、平均曲率流等, 所以 Allen-Cahn 方程理论的发展受到了极小曲面理论的很多启发. 这方面的例子包括 De Giorgi 猜想与 Bernstein 问题之间的联系、稳定相变界面曲率估计与稳定极小曲面曲率估计之间的相似性等. 反过来, 最近十年, Allen-Cahn 方程理论在极小曲面的研究中也找到了很多应用, 尤其是在丘成桐“Riemann 流形中是否存在无穷多极小曲面”猜想的研究上.

英文引用格式: Wang K L, Wang L B. A regularity theory for transition layers in Allen-Cahn equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–32, doi: 10.1360/SSM-2025-0335

本文仅考虑 Euclid 空间或者 Riemann 流形上稳态情形的、奇异扰动 (singularly perturbed) 形式的 Allen-Cahn 方程, 即半线性椭圆方程

$$\varepsilon \Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} W'(u_\varepsilon). \quad (1.1)$$

在一个给定区域 Ω 上, 其对应的能量泛函为

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon; \Omega) = \int_\Omega \left[\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right], \quad (1.2)$$

这里

(1) 实值函数 u_ε 是序参量 (order parameter), 用于区分不同相: $u_\varepsilon \sim 1$ 代表纯相 A, $u_\varepsilon \sim -1$ 代表纯相 B, 中间过渡区 (u_ε 在 -1 到 1 之间连续变化) 对应这两个相之间的弥散界面;

(2) $\varepsilon > 0$ 是关联长度 (correlation length), 用于控制界面厚度: ε 越小, 界面越接近 “尖锐界面”;

(3) $W(u)$ 是自由能密度函数, 通常取 “双势阱” (double-well potential) 函数, 其典型形式为

$$W(u) = (1 - u^2)^2 / 4,$$

如图 1 所示;

(4) $W'(u)$ 是 $W(u)$ 对 u 的导数, 该非线性项会驱动序参量向能量更低的稳定相演化, 特别地, 当 $W(u) = (1 - u^2)^2 / 4$ 及 $\varepsilon = 1$ 时, 即得标准的 Allen-Cahn 方程

$$\Delta u = u^3 - u; \quad (1.3)$$

(5) Δ 是 Laplace 算子 (或者 Beltrami-Laplace 算子, 如果底空间是一个 Riemann 流形的话), 代表空间中的扩散, 其作用是 “光滑化” 序参量的空间变化, 与非线性项共同维持扩散界面的存在.

由于势能函数具有双势阱结构, 即其极小值仅在 $u = \pm 1$ 时达到 (对应能量最低的稳定相, 即上述的两个纯相 A 和 B), 这会迫使序参量倾向于 “分离” 为 ± 1 并形成界面. 例如, 如果 u_ε 是一列函数, 其能量一致有界:

$$\sup_\varepsilon \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon; \Omega) < +\infty, \quad (1.4)$$

则 $\mathcal{E}_\varepsilon$ 中的势能项会强迫 u_ε 在 Ω 的一个子区域上收敛到 1 , 另一个子区域上收敛到 -1 ; 但由于能量中动能项 (或者说方程中 Laplace 算子) 的存在, u_ε 必须是连续变化的, 所以在这两个子区域间会形成一个宽度约为 ε 的相变界面 (即弥散界面), 如图 2 所示. 相变界面在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时最终会收敛到一个尖锐界面.

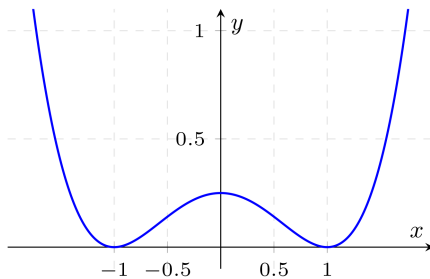


图 1 (网络版彩图) 双势阱函数

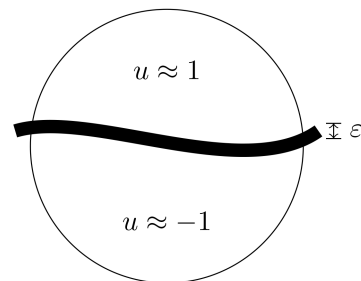


图 2 相变界面

本文讨论这种相变界面的 (一致) 正则性问题, 包括其零阶、一阶及二阶正则性. 这类似于经典椭圆偏微分方程理论中的正则性问题, 或者更确切地, 极小超曲面的正则性问题. 相变界面的一致正则性, 既可以保证相变界面的各种收敛性 (如 Hausdorff 距离意义下的收敛、 C^1 收敛、 C^2 收敛等), 也在与 Allen-Cahn 方程相关的一些著名问题 (如 De Giorgi 猜想、有限 Morse 指标解的分类、Marques-Neves 重数一猜想等) 的研究中有重要应用.

本文余下内容的结构安排如下. 第 2 节介绍本文所用的一些概念, 尤其是几何测度论中的一些对象. 第 3-5 节分别讨论相变界面的零阶、一阶及二阶正则性. 第 6 节介绍这些正则性理论的一些应用. 第 7 节对本文主要内容进行总结, 并简略介绍一些本文无法详细讨论的问题.

2 一些概念与符号

2.1 说明、约定与符号

- 由标准的椭圆正则性理论, 对固定的 ε , 任意 Allen-Cahn 方程的解 u_ε 都是足够光滑的 (如 C^2 的), 所以不会考虑固定 ε 时解及其水平集的正则性问题: 只有 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的一致正则性才是有意义的.

- Allen-Cahn 方程 (1.1) 在尺度变换下具有如下性质: 如果 u_ε 是 (1.1) 的解, 则对任意 $\lambda > 0$, $\tilde{u}(x) := u_\varepsilon(\lambda x)$ 满足带常数 $\lambda^{-1}\varepsilon$ 的 (1.1).

- Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开区域.

- u_ε ($\varepsilon \rightarrow 0$) 实际都是代表 u_{ε_i} ($\varepsilon_i \rightarrow 0$). 我们也会经常取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的一个子列而不再另外说明.

- $\mathbb{R}^n$ 中的球记作 $B_r^n(x)$. 如果球心为原点, 一般会将其省略.

- ω_k 指 k 维单位球的体积.

- $\mathcal{H}^k$ 指 k 维 Hausdorff 测度.

- 在下文中, 一般会直接用水平集 $\{u_\varepsilon = 0\}$ 代表相变界面. 它可以换成任意一个水平集 $\{u_\varepsilon = t\}$ (对某个固定的 $-1 < t < 1$).

- 定义

$$\nu_\varepsilon(x) := \begin{cases} \nabla u_\varepsilon / |\nabla u_\varepsilon|, & \text{当 } |\nabla u_\varepsilon(x)| \neq 0 \text{ 时,} \\ \text{任一个单位向量,} & \text{其他情形.} \end{cases}$$

当 u_ε 水平集光滑时, 它就是该水平集的单位法向量.

- 用 C, c 表示万有常数, 在不同位置可能取不同值.

2.2 一维解

对本文接下来的讨论非常重要的是一维情形的 Allen-Cahn 方程. 此时 (1.1) 变成了如下非线性常微分方程:

$$g''(t) = W'(g(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

该方程存在唯一解满足如下额外性质:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(t) = \pm 1, \quad g(0) = 0.$$

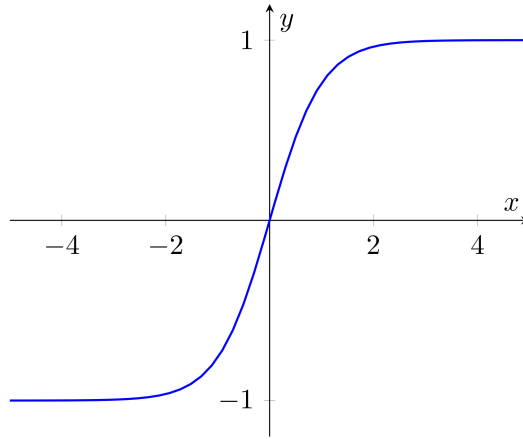


图 3 (网络版彩图) 一维解

例如, 对标准的 Allen-Cahn 方程 (1.3), 有 $g(t) = \tanh(t/\sqrt{2})$ (如图 3 所示). 记 g 的能量为

$$\sigma_0 := \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} g'(t)^2 + W(g(t)) \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)^2 dt = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{W(s)}{2}} ds. \quad (2.2)$$

我们将 g 称作“一维解”. 它之所以重要, 是因为在相变界面上的大多数点处, 沿着法向方向, Allen-Cahn 方程的解基本上是 g 的一个伸缩变换.

2.3 解的类型

与很多变分问题类似, Allen-Cahn 方程的解可以分为如下四类:

$$\text{能量极小解} \subset \text{稳定解} \subset \text{有限 Morse 指标解} \subset \text{临界点},$$

并且随着解的范围扩大, 解的性质会越来越坏.

定义 2.1 (能量极小解 (energy minimizer)) 称 u 是 Allen-Cahn 方程 (1.1) 的能量极小解, 如果

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u + \varphi; \Omega) \geq \mathcal{E}_\varepsilon(u, \Omega), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega); \quad (2.3)$$

称 u 是局部能量极小解, 如果对任意 $\Omega' \Subset \Omega$ 以及 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$, 都有

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u + \varphi; \Omega') \geq \mathcal{E}_\varepsilon(u; \Omega'). \quad (2.4)$$

引入局部能量极小解是因为我们经常需要考虑无界区域 (如 $\mathbb{R}^n$) 上的解, 这时其全局能量一般都是无穷大, 所以只有 (2.4) 中的定义才有意义.

定义 2.2 (临界点 (critical point)) 称 u 是能量泛函 (1.2) 的临界点, 如果对于任意扰动 $\{\varphi_t\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ (这里 $\varphi_0 = 0$), 都有

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{E}_\varepsilon(u + \varphi_t; \Omega) \right|_{t=0} = 0.$$

上述临界点条件即给出 Allen-Cahn 方程 (1.1).

在很多情形还需要考虑能量泛函 (1.2) 的二阶变分. 对 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 定义

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi; \Omega) := \left. \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon + t\varphi; \Omega) \right|_{t=0} = \int_\Omega \left[\varepsilon |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W''(u_\varepsilon) \varphi^2 \right]. \quad (2.5)$$

定义 2.3 (稳定解与有限 Morse 指标解 (stable and finite Morse index solution)) 设 u_ε 是 (1.1) 在 Ω 上的一个解.

- (1) 如果对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 都有 $\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi; \Omega) \geq 0$, 则称 u_ε 是稳定的;
- (2) 称 u_ε 是 Ω 上 (1.1) 的有限 Morse 指标解, 如果二次型 $\mathcal{Q}_\varepsilon$ 的负空间是有限维的, 即

$$\max\{\dim V : \mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi) < 0, \forall \varphi \in V \setminus \{0\}, V \subset C_0^\infty(\Omega)\} < \infty.$$

其负空间维数定义为这个解的 Morse 指标 (Morse index).

如果 Ω 为无界区域 (如 $\mathbb{R}^n$), 一个解的 Morse 指标定义为该解在任意有界区域上 Morse 指标的上确界. 由文献 [49] 可知, 这样定义的有限 Morse 指标条件等价于解在一个紧集外稳定.

我们还会经常用到稳定性条件的另一种形式, 这是由 Sternberg 和 Zumbrun [133] 发现的: u_ε 是稳定的当且仅当

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 \geq \int_{\Omega} \varphi^2 |B(u_\varepsilon)|^2 \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2.6)$$

这里

$$|B(u_\varepsilon)|^2 = \begin{cases} \frac{|\nabla^2 u_\varepsilon|^2 - |\nabla |\nabla u_\varepsilon||^2}{|\nabla u_\varepsilon|^2}, & |\nabla u_\varepsilon| \neq 0, \\ 0, & |\nabla u_\varepsilon| = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

注意 $|B(u_\varepsilon)|^2$ 是一种曲率型的量: 如果水平集 $\{u_\varepsilon = t\}$ 是光滑的, 则有

$$|B(u_\varepsilon)|^2 = |A|^2 + |\nabla_T \log |\nabla u_\varepsilon||^2,$$

这里 A 是 $\{u_\varepsilon = t\}$ 的第二基本形式, ∇_T 是该水平集的切向导数.

2.4 一些几何测度论中的概念

由于 Allen-Cahn 方程与极小超曲面之间的紧密联系, 后面的讨论会经常用到几何测度论中的一些概念, 在此予以介绍.

定义 2.4 (Hausdorff 距离) 对任意非空闭集 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 定义其 Hausdorff 距离为

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B), \sup_{y \in B} \text{dist}(y, A) \right\}.$$

定义 2.5 (有界变差函数 (functions of bounded variation)) 对于 $u \in L^1(\Omega)$, 称 u 是有界变差函数, 记作 $u \in BV(\Omega)$, 如果它的导数 Du 在分布意义下是一个 Radon 测度, 即

$$V(u; \Omega) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} X : X \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \sup |X| \leq 1 \right\} < \infty.$$

对任意向量值测度 μ , 令 $\|D\mu\|$ 代表 μ 对应的全变差测度. 不难得到 $V(u; \Omega) = \|Du\|(\Omega)$.

定义 2.6 (有限周长集 (sets of finite perimeter)) 对于任意 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集 E 以及开集 Ω , 定义 E 在 Ω 中的周长 (perimeter) 为

$$\text{Per}(E; \Omega) := \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} X : X \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \sup |X| \leq 1 \right\}.$$

当 $\text{Per}(E; \Omega) < \infty$ 时, 称 E 为 Ω 中的有限周长集.

如果 E 的边界是光滑超曲面, 则 $\text{Per}(E; \Omega)$ 即为 ∂E 在 Ω 中的面积. 所以可以在有限周长集的框架下寻找极小超曲面 (参见文献 [68, 定理 1.20]).

定义 2.7 (可求长集 (rectifiable sets)) 称 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 k - 维可求长集, 如果存在一系列 Lipschitz 映射 $F_j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ 以及一个集合 M_0 满足 $\mathcal{H}^k(M_0) = 0$, 使得

$$M \subset M_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j(\mathbb{R}^k) \right).$$

可求长集的一个等价定义是, 对 $\mathcal{H}^k$ - 几乎处处的 $x \in M$, 存在一种弱意义下的切空间 $T_x M$ (参见文献 [127, 定义 11.4 和定理 11.6]).

我们还需要一些与变分形 (varifold) 相关的定义及结果, 详细内容可参见文献 [127]. 给定 $1 \leq k \leq n$, 记 $G(k, n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有 k 维线性子空间组成的集合 (即 Grassmann 流形). 对于 $A \subset \mathbb{R}^n$, 在 $A \times G(k, n)$ 上赋予通常的乘积拓扑.

定义 2.8 (变分形 (varifold)) 给定一个开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 如果 V 是 $\Omega \times G(k, n)$ 上的一个 Radon 测度, 则称它是 Ω 上的一个 k 维变分形.

定义 2.9 (可求长变分形 (rectifiable varifold)) 设 M 是 Ω 中一个 k 维可求长集, 其上的一个函数 $\theta : M \rightarrow [0, \infty]$ 满足对于任意紧集 K , 有

$$\int_{M \cap K} \theta(x) d\mathcal{H}^k(x) < \infty.$$

对于这样的 (M, θ) , 定义 k 维可求长变分形 $V_{M, \theta}$ 为

$$\langle V_{M, \theta}, \Phi \rangle := \int_M \Phi(x, T_x M) \theta(x) d\mathcal{H}^k(x), \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega \times G(k, n)).$$

称 θ 为 $V_{M, \theta}$ 的重数函数, 并记测度 $\|V\| = \theta \mathcal{H}^k \llcorner M$.

定义 2.10 (整变分形 (integral varifold)) 给定一个可求长变分形 $V_{M, \theta}$, 如果其重数函数 $\mathcal{H}^k$ - 几乎处处为整数, 则称其为整变分形. 特别地, 如果其重数函数几乎处处为 1, 则称 V 的重数为 1 (或者说是单重的).

定义 2.11 (一阶变分 (first variation)) 对于 k 维变分形 V , 定义它的一阶变分为

$$\delta V(X) = \int \text{div}_S X(x) dV(x, S), \quad \forall X \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad (2.8)$$

其中 $\text{div}_S X = \sum_{i=1}^k \tau_i \cdot D_{\tau_i} X$, $\{\tau_i\}$ 为 $S \in G(k, n)$ 的一组标准正交基.

定义 2.12 (稳态变分形 (stationary varifold)) 如果对于任意 $X \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, 均有 $\delta V(X) = 0$, 则称 V 是 Ω 中的稳态变分形.

最后, 变分形意义下的收敛指将变分形视为 Radon 测度时, 通常定义下的测度弱收敛.

3 零阶正则性: 相变界面的一致收敛

本节讨论 Allen-Cahn 方程相变界面的收敛问题及其极限的刻画.

在本文中, 相变界面的零阶正则性指相变界面, 虽然只是一个椭圆偏微分方程解的水平集, 却会在 Hausdorff 距离意义下收敛到某个极限. 由于 Hausdorff 距离意义下的收敛相当于一种一致收敛, 这样

的结果可以理解为相变界面具有某种一致连续性. 在这种意义下, 零阶正则性可以类比为常见的椭圆型偏微分方程解的 Hölder 正则性, 并且可以粗略地理解是因为相变界面近似地满足极小曲面方程 (即相变界面可以看作一种 ε - 版本的极小曲面). 但需要注意在真正的证明中, 这些结果都是通过证明 Allen-Cahn 方程的解或者从解构造出的一些对象的收敛性得到, 特别还用到了清除 (clearing out) 性质.

3.1 能量极小解的收敛理论

Allen-Cahn 方程能量极小解的收敛性是由 Modica 和 Mortola^[106] 首先通过 Γ - 收敛理论建立的, 也可参见文献 [79, 102, 104, 131] 等.

首先引入一些必要的概念. 记 $BV(\Omega, \{\pm 1\})$ 为 Ω 中取值几乎处处等于 ± 1 的有界变差函数所组成的空间. 回顾, 在 (2.2) 中定义了一维解的能量为 σ_0 . 对 $u_0 \in BV(\Omega, \{\pm 1\})$, 定义

$$P(u_0; \Omega) := \sigma_0 \text{Per}(\{u_0 = 1\}; \Omega).$$

下述定理说明 Allen-Cahn 能量泛函 $\mathcal{E}_\varepsilon$ Γ - 收敛到泛函 P .

定理 3.1 (Γ - 收敛) 任给一个有界 Lipschitz 区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 都有下述性质成立:

(1) (紧性) 若 $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon; \Omega) < \infty$, 则存在子列 u_{ε_i} 以及 $u_0 \in BV(\Omega, \{\pm 1\})$, 使得 u_{ε_i} 在 $L^1(\Omega)$ 中强收敛到 u_0 ;

(2) (下极限不等式) 如果 u_ε 在 $L^1(\Omega)$ 中强收敛到 u_0 , 则有

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon; \Omega) \geq P(u_0; \Omega);$$

(3) (上极限不等式) 对任意 $u_0 \in BV(\Omega, \{\pm 1\})$, 存在一个序列 $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ 满足

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega) \leq P(u_0; \Omega).$$

该定理的一个直接推论如下:

推论 3.1 如果 u_ε 是 $\mathcal{E}_\varepsilon(u; \Omega)$ 的能量极小解, 则存在子列 u_{ε_i} 使得在 $L^1(\Omega)$ 中 $u_{\varepsilon_i} \rightarrow u_0$, 且 u_0 是周长泛函 $P(\cdot; \Omega)$ 的能量极小解.

周长泛函的能量极小解等价于 $\partial\{u_0 = 1\}$ 是面积极小的极小超曲面 (area minimizing minimal hypersurfaces). 面积极小的极小超曲面的存在性、正则性是几何测度论中一个相对比较成熟的理论 (参见文献 [68]).

相变界面的收敛性可以由 Caffarelli 和 Córdoba^[22] 建立的上水平集与下水平集的体积估计得到. 这个体积估计类似于极小曲面的密度估计 (参见文献 [38]): 当 E 为 Ω 内有限周长集且其边界 ∂E 为面积极小的极小超曲面时, 对任意 $\Omega' \Subset \Omega$, 存在 C_1, C_2 和 r_0 使得对任意 $x \in \partial E \cap \Omega'$, 有

$$C_1 < \frac{\mathcal{L}^n(B_r^n(x) \cap E)}{r^n} \leq C_2, \quad \forall r < r_0,$$

这里 $\mathcal{L}^n$ 指 n 维 Lebesgue 测度. 与之相对应, 如下定理是文献 [22] 中的主要结果.

定理 3.2 对任意 $-1 < \alpha < \beta < 1$, 存在 C 和 R_0 使得如下性质成立. 设 u_ε 是 (1.1) 在 B_1^n 上的能量极小解且 $\alpha \leq u_\varepsilon(0) \leq \beta$, 如果 $r \geq R_0\varepsilon$, 则

$$\min\{\mathcal{L}^n(B_r \cap \{u_\varepsilon > \beta\}), \mathcal{L}^n(B_r \cap \{u_\varepsilon < \alpha\})\} \geq Cr^n.$$

利用此结果可以证明相变界面在 Hausdorff 距离意义下的收敛性.

推论 3.2 设 u_ε 是 (1.1) 在 Ω 中的局部能量极小解, 而 u_0 是推论 3.1 中得到的 u_ε 的极限. 则对任意 $\Omega' \Subset \Omega$, 有

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(\{u_\varepsilon = 0\} \cap \Omega', \partial\{u_0 = 1\} \cap \Omega') \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

3.2 一般临界点的收敛理论

本小节讨论一般临界点的收敛性理论. 这主要是 Hutchinson 和 Tonegawa^[74] 的工作.

对于 Allen-Cahn 方程的一个解 u_ε , 定义对应的 $n-1$ 维变分形 V_ε 为

$$\langle V_\varepsilon, \Phi \rangle = \int_{\Omega} \Phi(x, I - \nu_\varepsilon(x) \otimes \nu_\varepsilon(x)) \varepsilon |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx, \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega \times G(n-1, n)), \quad (3.2)$$

这里 I 代表单位矩阵. 注意由 Sard 定理可知这种定义是合理的. 这里给出的定义并不是文献 [74] 中的原始定义, 但它们实际上是等价的.

Hutchinson 和 Tonegawa^[74] 证明了如下定理.

定理 3.3 设 u_ε 是 (1.1) 的解, 满足能量一致有界条件 (1.4). 则存在一个子列 (为简便起见, 仍记作 $\varepsilon \rightarrow 0$) 使得如下性质成立:

(1) 存在一个 $u_0 \in BV(\Omega, \{\pm 1\})$ 和 $n-1$ 维变分形 V_0 使得在 $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ 中 $u_\varepsilon \rightarrow u_0$, 在变分形意义下 $V_\varepsilon \rightarrow V_0$, 且同时有弱收敛

$$\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \rightharpoonup \frac{1}{2} \|V_0\|, \quad \frac{W(u_\varepsilon)}{\varepsilon} dx \rightharpoonup \frac{1}{2} \|V_0\|;$$

(2) $\text{spt}\|D\chi_{\{u_0=1\}}\| \subset \text{spt}\|V_0\|$, 且对任意连通紧集 $K \subset \Omega \setminus \text{spt}\|V_0\|$, u_ε 在 K 上一致收敛到 1 或者 -1;

(3) 对任意 $\Omega' \Subset \Omega$ 和 $0 < b < 1$, 有

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(\Omega' \cap \{x : |u_\varepsilon| \leq 1-b\}, \Omega' \cap \text{spt}\|V_0\|) \rightarrow 0;$$

(4) V_0 是一个 $n-1$ 维稳态、整变分形 (在相差一个常数意义下), 即其密度函数 $\theta(x) = \sigma_0 N(x)$, 且对 $\mathcal{H}^{n-1}$ -a.e. $x \in \text{spt}\|V_0\|$, 有 $N(x) \in \mathbb{N}$;

(5) 如果 u_ε 是 Ω 上的局部能量极小解, 则对 $\mathcal{H}^{n-1}$ -a.e. $x \in \text{spt}\|V_0\|$, 有 $N(x) = 1$.

注 3.1 (界面聚类 (interface clustering)) 当重数 $N(x) > 1$ 时, 一个典型场景是在局部区域内, $\{u_\varepsilon = 0\}$ 包含 $N(x)$ 个连通分支, 并且这些分支均收敛到同一个极限. 这叫界面聚类现象, 见图 4. 此时这些不同分支几乎相互平行, 且沿着法向方向 u_ε 基本上是 $N(x)$ 个一维解 (适当伸缩之后) 的黏连, 见图 5.

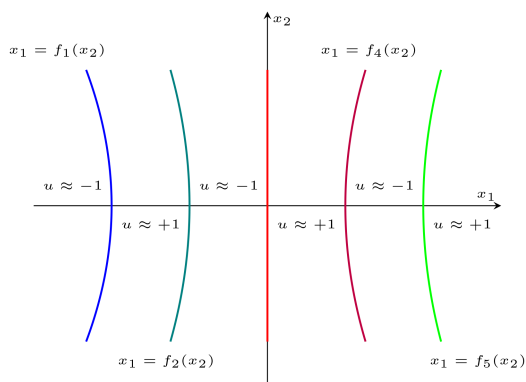


图 4 (网络版彩图) 界面有多个连通分支

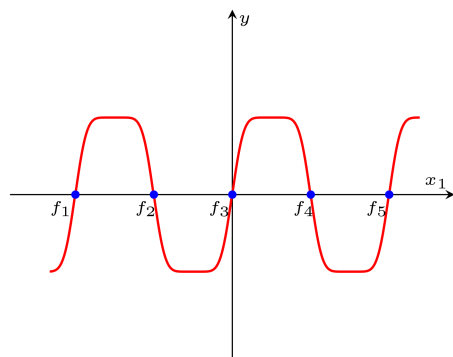


图 5 (网络版彩图) 法线上的函数图像

该定理的证明主要利用了如下四个工具.

(1) 稳态条件 (stationary condition). 若 u_ε 是能量泛函 (1.2) 的临界点 (即 Allen-Cahn 方程的解), 则它满足稳态条件

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right) \operatorname{div} Y - \varepsilon DY(\nabla u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \right] dx = 0, \quad \forall Y \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n). \quad (3.3)$$

该恒等式可以通过直接分部积分得到 (利用 u_ε 是光滑解). 它也可以通过考虑能量泛函的内变分 (inner variation) 得到, 具体如下: 对任意 $Y \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, 考虑常微分方程

$$\frac{d}{dt} \Psi(t, x) = Y(\Psi(t, x)), \quad \Psi(0, x) = x,$$

或简单地考虑 $\Psi(t, x) = x + tY(x)$. 令 $u_{t,\varepsilon}(x) = u_\varepsilon \circ \Psi(t, x)$. 由于 u_ε 为 Allen-Cahn 能量泛函的临界点, 因此有

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\varepsilon(u_{t,\varepsilon}; \Omega) \Big|_{t=0} = 0.$$

计算此导数即给出 (3.3) 中的积分恒等式.

稳态条件 (3.3) 与变分形的稳态条件非常类似. 事实上, 定理 3.3 中极限变分形 V_0 的稳态性即来自 (3.3) 中取极限.

(2) Modica 不等式. Modica [103] 通过对合适的辅助函数运用最大值原理, 证明了关于全空间解 (entire solution) 动能项与势能项的如下不等式.

定理 3.4 设 $u_\varepsilon \in C^3(\mathbb{R}^n)$ 是 Allen-Cahn 方程的全空间解, 则有

$$\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon). \quad (3.4)$$

对于局部解, 文献 [74, 命题 3.3] 给出了一个相近形式的估计.

命题 3.1 设 u_ε 是 Ω 上 Allen-Cahn 方程的解. 对于任意 $\Omega' \Subset \Omega$, 存在 ε_0 和 C , 使得当 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ 时, 有

$$\sup_{\Omega'} \left(\frac{\varepsilon |\nabla u|^2}{2} - \frac{W(u)}{\varepsilon} \right) \leq C.$$

(3) 单调性公式. 定义

$$\Theta_\varepsilon(r; x) := r^{1-n} \int_{B_r^n(x)} \left[\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right].$$

则对于全空间解与局部解, 分别有如下的单调性公式.

命题 3.2 ^[105] 若 u_ε 是 Allen-Cahn 方程的全空间解, 则对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $\Theta_\varepsilon(r; x)$ 对 r 是单调增的.

命题 3.3 ^[74] 设 u_ε 是 Ω 上 Allen-Cahn 方程的解. 对于任意 $\Omega' \Subset \Omega$, 存在常数 C , 使得当 $B_r^n(x) \subset \Omega'$ 时, 对任意 $s \in (0, r)$, 有

$$\begin{aligned} \Theta_\varepsilon(r; x) - \Theta_\varepsilon(s; x) &\geq \int_s^r \left\{ \frac{1}{\tau^n} \int_{B_\tau(x)} \left(\frac{W(u)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 \right)_+ dy \right\} d\tau \\ &\quad - Cr + \varepsilon \int_{B_r^n(x) \setminus B_s^n(x)} \frac{|(y-x) \cdot \nabla u|^2}{|y-x|^{n+1}} dy. \end{aligned}$$

在很多问题中, 单调性公式的推导仅需要稳态条件 (3.3). 但对于 Allen-Cahn 方程, 这样只能得到幂次为 $n-2$ 的单调性公式. 为了将幂次提升至 $n-1$, 我们还需要 Modica 不等式. 在分数阶 Allen-Cahn 方程 (当 $1/2 \leq s < 1$ 时) 及向量值 Allen-Cahn 方程中 (见后文第 7 节), 由于 Modica 不等式一般不再成立, 所以可能没有上述形式的单调性公式. 这给这些问题的研究带来了很大的困难.

(4) 清除性质. 清除性质是说当 u_ε 在 $B_r^n(x)$ 中的能量 (利用上述单调性公式中的量 Θ_ε 描述) 足够小时, 在 $B_{r/2}^n(x)$ 内 u_ε 会远离相变界面. 等价地, 我们需要一定的能量才能创造出相变界面. (在能量极小情形下, 定理 3.2 实际上也蕴含了这个结论.)

命题 3.4 存在常数 η 使得对于任意 ε , 若 u_ε 是 Allen-Cahn 方程在 $B_r^n(x)$ 上的解 (这里 $r \geq 2\varepsilon$) 且 $\Theta_\varepsilon(r, x) \leq \eta$, 则在 $B_{r/2}^n(x)$ 内 $|u_\varepsilon| \geq 1/2$.

对于 Allen-Cahn 方程 (1.1), 上述清除性质可直接由单调性公式推导出. 然而, 如前文所述, 在许多其他问题中并不存在与该清除性质相匹配的单调性公式, 致使类似命题的证明变得十分困难. 这一困难在分数阶 Allen-Cahn 方程 (当 $1/2 \leq s < 1$ 时)、向量值 Allen-Cahn 方程、Allen-Cahn 方程边值问题以及 Ginzburg-Landau 方程的研究中均有出现.

结合上述密度下界估计, 即可进一步推导出相变界面在 Hausdorff 距离意义下的收敛性.

3.3 稳定解与有限 Morse 指标解的收敛

在定理 3.3 中, 我们只假设了 Allen-Cahn 方程的解 u_ε 具有一致有界的能量. 如果这列解还是稳定的或者具有一致有界的 Morse 指标, 则可以获得更多关于极限变分形的信息, 如其部分正则性 (partial regularity)、稳定性和 Morse 指标刻画等. 这首先是由 Tonegawa ^[134] 对稳定解证明的极限变分形的稳定性, 以及由 Tonegawa 和 Wickramasekera ^[135] 对稳定解证明的极限变分形的部分正则性. 这些工作后续也被推广至有限 Morse 指标解情形, 分别参见文献 [69] (极限变分形的部分正则性) 和 [73] (极限变分形的 Morse 指标上界), 以及文献 [87]. 他们的结果可以总结为如下定理.

定理 3.5 设 u_ε 是 Allen-Cahn 方程在 B_1^n 中的一列解, 满足一致有界能量条件 (1.4) 且其 Morse 指标均小于等于 N . 设 V_0 是定理 3.3 所得到的 u_ε 的极限变分形, 则

- (1) V_0 的正则点集局部地是一个嵌入、光滑的极小超曲面;
- (2) V_0 的奇点集在 $1 \leq n \leq 7$ 时是空集, 在 $n = 8$ 时是离散点集, 在 $n \geq 9$ 时其 Hausdorff 维数至多为 $n-8$;

(3) V_0 有一个广义第二基本形式, 且其 Morse 指标小于等于 N .

在上述定理证明中, 可以利用二阶内变分 (second inner variation) 的概念 [87]. 注意, 稳态条件实际上是一阶内变分. 二阶内变分定义出的稳定性概念弱于由 (2.5) 定义的稳定性条件, 但与稳态条件一样, 它与变分形的稳定性条件有更直接的联系.

3.4 黏性消失极限

在一些情形下, 相变界面的收敛及其极限的刻画也可以由黏性解 (viscosity solution) 理论得到.

首先需要极小超曲面在黏性解意义下的一个等价定义 (参见文献 [21], 也见更早的 Soner [129] 对平均曲率流等抛物问题的黏性解定义). 这是通过“符号距离函数”来定义的.

定义 3.1 (符号距离函数) 给定一个开集 E , 定义到其边界的符号距离函数为

$$d_{\partial E}(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial E), & x \in E, \\ -\text{dist}(x, \partial E), & x \notin E. \end{cases}$$

我们有如下定理:

定理 3.6 E (作为一个开的有界变差集) 在 B_1^n 中具有面积极小的边界, 当且仅当符号距离函数 $d_{\partial E}$ 在 E 中上调和, 在 $B_1^n \setminus E$ 中下调和.

定义 $g_\varepsilon(t) = g(\varepsilon^{-1}t)$, 其中 g 由 (2.1) 给定. 因为 $-1 < g(t) < 1$ 且 $g'(t) > 0$, 我们可以令

$$\Phi_\varepsilon(x) = g_\varepsilon^{-1}(u_\varepsilon(x)).$$

直接计算可得

$$\varepsilon \Delta \Phi_\varepsilon = \frac{g''(\varepsilon^{-1}\Phi_\varepsilon)}{g'(\varepsilon^{-1}\Phi_\varepsilon)}(1 - |\nabla \Phi_\varepsilon|^2). \quad (3.5)$$

这是 Hamilton-Jacobi 方程的一种黏性消失 (vanishing viscosity) 逼近问题.

Modica 不等式 (见定理 3.4) 等价于条件

$$|\nabla \Phi_\varepsilon| \leq 1.$$

结合此 Lipschitz 估计及标准的黏性消失逼近方法, 可以证明 Φ_ε 一致收敛到一个极限函数 Φ_0 , 且 Φ_0 是程函方程 (eikonal equation)

$$\pm(1 - |\nabla \Phi|^2) = 0$$

的黏性解¹⁾. 另外, (3.5) 还蕴涵着 $\Delta \Phi_\varepsilon$ 在 $\{\Phi_\varepsilon > 0\}$ 和 $\{\Phi_\varepsilon < 0\}$ 中分别满足一定的符号条件, 由此取极限即得

(1) 在 $\{\Phi_0 > 0\}$ 中, $\Delta \Phi_0 \leq 0$;

(2) 在 $\{\Phi_0 < 0\}$ 中, $\Delta \Phi_0 \geq 0$.

作为程函方程的黏性解, 在很多情形下可以证明 Φ_0 是到 $\{\Phi_0 = 0\}$ (作为开集 $\{\Phi_0 > 0\}$ 的边界) 的符号距离函数 (参见文献 [8, 定理 12]). 结合上述 $\Delta \Phi_0$ 的符号条件, 利用定理 3.6 可知 $\{\Phi_0 = 0\}$ 是黏性解意义下的极小超曲面. 由于相变界面是 $\{\Phi_\varepsilon = 0\}$, 所以 Φ_ε 的一致收敛性保证了相变界面在 Hausdorff 距离意义下收敛到 $\{\Phi_0 = 0\}$.

1) 方程前的正负号取决于 Φ_0 本身的正负性. 注意在 $\pm$ 两种系数下, 该方程黏性解定义中上、下解不等式方向是相反的.

3.5 三种方法的比较

我们已经介绍了研究相变界面零阶正则性的三种方法: Γ -收敛方法、变分收敛方法和黏性消失极限方法. 其中, Γ -收敛方法仅适用于能量极小情形, 但不依赖于单调性公式等结构性条件, 因此在诸多其他问题的研究中仍是为数不多的可用方法之一 (如当 $1/2 \leq s < 1$ 时的分数阶 Allen-Cahn 方程、向量值 Allen-Cahn 方程, 参见第 7 节); 变分收敛方法可适用于一般临界点, 但通常需要单调性公式、Modica 不等式等额外结构作为支撑; 黏性消失极限方法不仅能够得到相变界面的收敛性, 还可借助前文定义的 Φ_ε 的收敛性给出远离相变界面区域的控制, 这在应用移动平面法 (moving plane method) 和滑动法 (sliding method) 时非常有用, 不过该方法一般无法刻画界面聚类现象.

4 一阶正则性: 相变界面的一致 $C^{1,\theta}$ -正则性

本节讨论如下问题: 给定 Allen-Cahn 方程 (1.1) 在 B_1^n 上的一列解 u_ε , 在什么样的条件下, 可以证明其相变界面 (如水平集 $\{u_\varepsilon = 0\}$) 在内部具有一致的一阶 Hölder 正则性? 这里内部一致的一阶 Hölder 正则性是指, $\{u_\varepsilon = 0\}$ 在适当坐标系下可以表示成函数的图像, 即 $\{u_\varepsilon = 0\} \cap B_{1/2}^n = \{x_n = f_\varepsilon(x')\}$, 其中 $x' \in B_{1/2}^{n-1}$, 且存在常数 $0 < \theta < 1$ 和 $C > 0$, 使得对任意 ε 都有

$$\|f_\varepsilon\|_{C^{1,\theta}(B_{1/2}^{n-1})} \leq C. \quad (4.1)$$

在相变界面具有 Lipschitz 正则性的前提下, 这样的估计是由 Caffarelli 和 Córdoba [23] 得到的.

定理 4.1 如果 $\{u_\varepsilon = 0\} \cap B_1^n = \{x_n = f_\varepsilon(x')\}$ ($x' \in B_1^{n-1}$), 且 f_ε 是一致 Lipschitz 连续的, 则估计 (4.1) 成立.

这个定理证明的基本思路是运用 De Giorgi 迭代方法来得到偏导数 $\partial_{x_i} f_\varepsilon$ ($i = 1, \dots, n-1$) 的 Hölder 估计. 这类似于椭圆方程理论中经典的 De Giorgi-Nash-Moser 估计, 但虽然 f_ε 可以认为是极小曲面方程的近似解, 实际上这里利用的是 $\partial_{x_i} f_\varepsilon = -\partial_{x_i} u_\varepsilon / \partial_{x_n} u_\varepsilon$ 满足椭圆方程

$$\operatorname{div} \left[(\partial_{x_n} u_\varepsilon)^2 \nabla \frac{\partial_{x_i} u_\varepsilon}{\partial_{x_n} u_\varepsilon} \right] = 0.$$

关于 $C^{1,\theta}$ 正则性的另外一个典型结果是一种 Allard 型 ε -正则性 (参见文献 [136]).

定理 4.2 对任意 $b \in (0, 1)$, 存在常数 $\varepsilon_A, \tau_A, \alpha_A \in (0, 1)$ 以及 K_A 使得下述结果成立.

设 u_ε 是 (1.1) 在 B_1^n 中的解, 满足 $\varepsilon < \varepsilon_A$, $|u_\varepsilon(0)| \leq 1 - b$ 及

$$\int_{B_1^n} \left[\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_\varepsilon) \right] \leq (1 + \tau_A) \sigma_0 \omega_{n-1}. \quad (4.2)$$

则在经过适当旋转之后, 对任意 $t \in (-1 + b, 1 - b)$, 存在函数 $f_\varepsilon^t : B_{1/2}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ 使得 $\{u_\varepsilon = t\} \cap B_{1/2}^n = \{x_n = f_\varepsilon^t(x')\}$, 且有估计

$$\|f_\varepsilon^t\|_{C^{1,\alpha_A}(B_{1/2}^{n-1})} \leq K_A.$$

我们说这是一种 Allard 型 ε -正则性, 是因为对于稳态变分形, Allard [4] (也可参见文献 [127, 第四章]) 证明了如下定理.

定理 4.3 对任意 $0 < \theta < 1$, 存在常数 δ 和 C 使得如下性质成立. 如果 V 是 B_1^n 中一个 k 维稳态变分形, 满足

- (1) $0 \in \text{spt } V$;
- (2) 在 $\text{spt}\|V\|$ 上 V 的密度函数几乎处处大于等于 1;
- (3) $\|V\|(B_1^n(0)) \leq (1 + \delta)\omega_k$,

则在适当旋转之后, 存在函数 $f: B_{1/2}^k \mapsto \mathbb{R}^{n-k}$ 使得 $V \llcorner B_{1/2}^n = V_{\text{Graph}(f)}$, 且有估计

$$\|f\|_{C^{1,\theta}(B_{1/2}^k)} \leq C.$$

注意上述条件 (3) 意味着 V 接近于重数为 1 的 $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, 而定理 4.2 中的条件 (4.2) 是说只有一个相变界面. 这都是一种“重数一”条件.

定理 4.2 实际上由 Savin^[117] 首先证明. 他利用黏性解方法和 L^∞ 意义下的调和逼近 (harmonic approximation) 给出了如下平坦性改进 (improvement of flatness) 结果.

定理 4.4^[117] 存在常数 $0 < \eta_1(n, W) < \eta_2(n, W) < 1$ 使得下列结果成立. 对于任意给定的 $\theta_0 > 0$, 存在 $\delta_0(\theta_0, n, W)$ 使得, 如果 u_ε 是 (1.1) 在 B_1^n 内的一个局部能量极小解, 满足

$$u_\varepsilon(0) = 0, \quad \{u_\varepsilon = 0\} \subset \{|x_n| \leq \delta\} \quad (4.3)$$

且

$$\delta \leq \delta_0, \quad \frac{\delta}{\varepsilon} \geq \theta_0, \quad (4.4)$$

则存在 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ 满足 $|\xi - e_n| \leq C\delta$, 使得

$$\{u_\varepsilon = 0\} \cap B_{\eta_2}^n \subset \{|x \cdot \xi| \leq \eta_1 \delta\}. \quad (4.5)$$

上述条件 (4.3) 是说相变界面包含于一个宽度 δ 的带中, 而 (4.4) 要求这条带是相对窄的 (但相对于 Allen-Cahn 方程中的参数 ε 又不太窄). 结论 (4.5) 则告诉我们, 当球半径从 1 缩小到 η_2 时, 这条带的宽度可以缩小到 $\eta_1 \delta$. 由于 $\eta_1 < \eta_2$, 这并不是成比例的缩小而是更好的缩小, 所以我们称其为“平坦性改进”.

迭代 (4.5) 即可以给出定理 4.2 中相变界面的一致 $C^{1,\theta}$ 正则性. 对极小超曲面 (在有界变差集框架下), Caffarelli 和 Cordoba^[21] 也利用类似的黏性解方法证明了极小超曲面的平坦性改进结果, 从而给出了极小超曲面 ε -正则性的一个新证明²⁾. 定理 4.4 与这个结果是对应的.

文献 [136] 中的证明受到了 Allard 方法的启发, 特别地, 该文献使用了“倾斜过剩” (tilt excess) 来衡量相变界面的平坦性.

定义 4.1 (倾斜过剩) 令 T 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 $n-1$ 维超平面, ν 为它的一个法向量. 对于 $B_r^{n-1} \subset T$, 定义 $\mathcal{C}_r = B_r^{n-1} \times (-1, 1)$ 为以 T 中球为截面的 (有限) 柱体. 则 u_ε 在 $\mathcal{C}_r$ 内相对于 T 的倾斜过剩定义为

$$E(r; u_\varepsilon, T) := r^{1-n} \int_{\mathcal{C}_r} [1 - (\nu_\varepsilon \cdot \nu)^2] \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx.$$

2) 这最早是由 De Giorgi^[37] 证明的. 在这篇工作中, De Giorgi 首次引入了上述调和逼近的思想.

这与 Savin 使用的 L^∞ 意义下的平坦性度量不同. 实际上, 倾斜过剩基本上是一种 $W^{1,2}$ 范数. 例如, 如果每一个水平集 $\{u_\varepsilon = t\}$ 都是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上光滑函数的图像, 即对于任意 $t \in [-1, 1]$, 都有 $\{u_\varepsilon = t\} \cap C_r = \{x_n = h(x', t)\}$, 则

$$E(r; u_\varepsilon, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = \int_{-1}^1 \left(\int_{B_r^{n-1}} \frac{|\nabla h(x', t)|^2}{(1 + |\nabla h(x', t)|^2)^{1/2}} \varepsilon |\nabla u_\varepsilon(x', h(x', t))| dx' \right) dt.$$

作为对比, 在 Allard 的证明中, 他同样定义了变分形的倾斜过剩

$$E(r; V, T) := r^{-k} \int_{C_r(T)} |S - p_T|^2 dV(y, S),$$

这里 p_T 指子空间 T 对应的投影矩阵.

利用倾斜过剩, 可以证明另一种平坦性改进结果:

定理 4.5 ^[136] 给定常数 $b \in (0, 1)$, 存在常数 $\delta_0, \tau_0, \varepsilon_0, \theta \in (0, 1/4)$ 以及足够大的 K_0 使得下列结果成立. 设 u_ε 为 (1.1) 在 B_1^n 中的解, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $|u_\varepsilon(0)| \leq 1 - b$, 且其满足 (4.2). 若

$$K_0 \varepsilon \leq E(1; u_\varepsilon, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \leq \delta_0^2, \quad (4.6)$$

则存在一个新平面 S 使得

$$E(\theta; u_\varepsilon, S) \leq \frac{1}{2} E(1; u_\varepsilon, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}), \quad (4.7)$$

且存在一个万有常数 C 使得

$$|p_S - p_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}}| \leq C E(1; u_\varepsilon, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})^{1/2}.$$

有了这种平坦性改进结果, 通过迭代也可以得到相变界面的一致 $C^{1,\theta}$ 估计. 这个定理的证明则包含如下 4 步.

第 1 步 Lipschitz 逼近. 利用 Hardy-Littlewood 极大函数的弱 $(1, 1)$ 型估计, 我们证明存在一个测度很小的“坏集” $\mathcal{B} \subset B_1^{n-1}$, 使得在柱体 $(B_1^{n-1} \setminus \mathcal{B}) \times (-1, 1)$ 中, 水平集 $\{u_\varepsilon = t\}$ (对任意 $t \in (-1 + b, 1 - b)$, 这里 $0 < b < 1$ 是一个固定的常数) 都可以表示为 Lipschitz 函数的图像, $\{x_n = f_\varepsilon^t(x')\}$.

第 2 步 放大 (blow up). 记 $\delta_\varepsilon := E(1; u_\varepsilon, \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})^{1/2}$, 利用 $W^{1,2}$ 的弱紧性, 可以证明 $f_\varepsilon^t/\delta_\varepsilon$ 收敛到一个极限 h_∞ .

第 3 步 调和逼近. 这一步我们证明 h_∞ 是调和函数. 这是通过在稳态条件 (3.3) 中取试验向量场 $Y(x) := \phi(x')\psi(x_n)e_n$ 然后再令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 取极限得到的, 这里 e_n 是第 n 个标准坐标基, ϕ 是 B_1^{n-1} 上的一个标准截断函数, 而 ψ 是区间 $(-1, 1)$ 上的一个标准截断函数.

第 4 步 过剩的衰减估计. 在这一步我们完成 (4.7) 的证明. 这是通过在稳态条件 (3.3) 中取试验向量场 $Y(x) := \phi(x')\psi(x_n)x_n e_n$ 然后再取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限得到的, 这里 ϕ 和 ψ 仍然是第 3 步中所选的截断函数.

如上述第 2 步所见, 由于我们用一种 $W^{1,2}$ 范数来进行放大, 所以这里只需要利用 $W^{1,2}$ 的弱紧性就可以找到逼近的调和函数. 作为对比, Savin ^[117] (也见其后续的简化工作 ^[118]) 需要证明类似于 $f_\varepsilon^t/\delta_\varepsilon$ 的放大序列是一致 Hölder 连续的, 才可以取其子列获得一致收敛. 这种一致 Hölder 连续性是通过建立 Harnack 不等式得到的 (类似于椭圆方程理论中的 Krylov-Safanov 估计). 但由于 Savin 的平坦性改进估计完全通过黏性解方法得到, 故可以推广到不带变分结构的、具有完全非线性椭圆算子

的 Allen-Cahn 型方程 (参见文献 [116]). 当然, 上述 $W^{1,2}$ 框架则具有可以推广到方程组情形的优势, 例如, Halavati 等 [72] 将该方法运用于 Abelian Higgs 模型的研究并证明了相应的 Allard 型 ε -正则性定理.

在上述第 3 和 4 步中, 在稳态条件 (3.3) 中所取的两种特殊向量场, 实际上分别对应于线性椭圆方程理论中的如下两种操作: 如果 $u \in W^{1,2}(B_1^{n-1})$ 是椭圆方程

$$\operatorname{div}(A \nabla u) = 0$$

的解 (这里 A 是 B_1^{n-1} 上矩阵值的可测函数), 则对任意 $\varphi \in C_0^\infty(B_1^{n-1})$, 有

$$\int_{B_1^{n-1}} A \nabla u \cdot \nabla \varphi = 0$$

和

$$\int_{B_1^{n-1}} A \nabla u \cdot \nabla(\varphi u) = 0.$$

以上讨论的都是重数为 1 的情形, 对于高重数情形, Tonegawa 提出了如下层状性质 (sheeting property) 问题.

猜想 4.1 若 u_ε 是 B_1^n 内 (1.1) 的稳定解, 满足

$$\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \rightharpoonup Q \sigma_0 \mathcal{H}^{n-1} \llcorner_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}}, \quad Q \geq 2,$$

则有

$$\{u_\varepsilon = 0\} \cap B_{1/2}^n = \bigcup_{\alpha=1}^Q \{x_n = f_{\alpha,\varepsilon}(x')\},$$

且 $f_{\alpha,\varepsilon}$ 在 $C^{1,\theta}(B_{1/2}^{n-1})$ 中一致有界.

这个猜想对应于稳定极小曲面中具有多重数时的正则性结果, 即 Schoen 和 Simon [123] 证明的稳定极小超曲面的层状性质.

定理 4.6 设 M 是 B_1^n 中一个嵌入、双边 (two sided)、稳定的极小超曲面, 其奇点集的 $n-3$ 维 Hausdorff 测度为 0. 如果 M 在变分意义下接近于 $Q \mathcal{H}^{n-1} \llcorner_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}}$ (相对于由变分收敛定义的拓扑或者度量结构), 则在 $B_{1/2}^n$ 中 M 可分解为 Q 个互不相交的、近乎平坦的光滑极小图的并.

由这个结果及 Wickramasekera [143] 的工作, 在适当条件下 (主要是文献 [143] 中引入的一种 α -结构性条件), 我们可以得到稳定余一维稳态变分形的最优部分正则性.

与单重数情形的结果相比 (定理 4.2 和 4.3), 高重数情形的困难在于, 一般而言界面聚类或者极小超曲面的不同层并不是如图 4 那样相互分离: 它们之间可能会通过一些细长的“脖子”连接起来, 如在悬链面 (catenoid) 中发生的那样. 这种“脖子”区域如果过大, 会使得任何调和函数都不能很好地逼近相变界面或者极小超曲面, 从而让调和逼近方法失效. 相应地, 文献 [123] 中证明定理 4.6 的关键一步即为利用稳定性条件来估计这种“脖子”区域的测度. 这依赖于 Schoen 的一个估计倾斜过剩的技巧. 不幸的是, 目前我们还没有在 Allen-Cahn 方程中找到这个估计的一个合适对应, 所以猜想 4.1 仍然是一个公开问题³⁾.

3) 由最近 Florit-Simon 和 Serra 对四维弱稳定 De Giorgi 问题 [62] 的证明, 该猜想在四维时已经被予以证实.

5 二阶正则性: 相变界面的一致 $C^{2,\theta}$ -正则性

本节讨论如下问题: 给定 Allen-Cahn 方程 (1.1) 在 B_1^n 上的一列解 u_ε , 假设其相变界面已经具有一致的一阶 Hölder 正则性 (如上一节所定义), 是否可以证明它也是一致二阶 Hölder 正则的? 与上一节类似, 这是指 $\{u_\varepsilon = 0\}$ 在适当坐标系下可以表示成函数的图像, 即 $\{u_\varepsilon = 0\} = \{x_n = f_\varepsilon(x')\}$, $(x', x_n) \in B_{1/2}^n$, 且存在常数 $0 < \theta < 1$ 和 $C > 0$ 使得

$$\|f_\varepsilon\|_{C^{2,\theta}(B_{1/2}^{n-1})} \leq C. \quad (5.1)$$

这类似于椭圆方程的 Schauder 估计. 由于二阶导数与 $\{u_\varepsilon = 0\}$ 作为超曲面的曲率有关系, 所以这也类似于极小曲面理论中的曲率估计 (参见文献 [122, 124]).

首先对于重数一情形, 我们有下列结果 (参见文献 [139, 定理 2.7]).

定理 5.1 设 u_ε 是 B_1^n 内 (1.1) 的一列解. 如果 $\{u_\varepsilon = 0\} = \{x_n = f_\varepsilon(x')\}$, 且

$$\sup_\varepsilon \text{Lip} |f_\varepsilon| < +\infty,$$

则对于任意 $0 < \theta < 1$, 估计 (5.1) 成立.

高重数时的情况则较为复杂. 首先有如下两个例子.

例 5.1 Del Pino 等 [44] 构造了 $\mathbb{R}^2$ 上 Allen-Cahn 方程的多端解 u_ε , 其相变界面 $\{u_\varepsilon = 0\} = \bigcup_{\alpha=1}^Q \{x_2 = f_{\alpha,\varepsilon}(x_1)\}$, $x_1 \in \mathbb{R}$, 这里

$$f_{\alpha,\varepsilon}(x_1) \approx \varepsilon f_\alpha(\varepsilon^{-1/2}x_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\varepsilon|\log \varepsilon|,$$

而 f_α 是 $\mathbb{R}$ 上 Toda 方程组

$$f''_\alpha = e^{-\sqrt{2}(f_{\alpha-1}-f_\alpha)} - e^{-\sqrt{2}(f_{\alpha+1}-f_\alpha)} \quad (5.2)$$

的一个解, 这里 $f_1 < f_2 < \dots < f_Q$ 且约定 $f_0 = -\infty$ 和 $f_{Q+1} = +\infty$. 由于

$$f''_{\alpha,\varepsilon}(0) \approx f''_\alpha(0) \neq 0,$$

但对任意的 $x_1 \neq 0$, 有

$$f''_{\alpha,\varepsilon}(x_1) \approx f''_\alpha\left(\frac{x_1}{\varepsilon^{1/2}}\right) \rightarrow 0,$$

所以 $f''_{\alpha,\varepsilon}$ 不是一致连续的. 注意 u_ε 是不稳定的解.

例 5.2 当 $n \geq 11$ 时, Agudelo 等 [2] 构造了 $\mathbb{R}^n$ 上 (1.1) 的一族稳定解, 其相变界面 $\{u_\varepsilon = 0\} = \{x_n = \pm f_\varepsilon(x')\}$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, 这里

$$f_\varepsilon(x') \approx \varepsilon f(\varepsilon^{-1/2}x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon|\log \varepsilon|,$$

而 f 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上 Liouville 方程

$$\Delta f = e^{-\sqrt{2}f} \quad (5.3)$$

的一个光滑、径向对称且稳定的解 (这样的解只在 $n \geq 11$ 时才存在). 与上个例子类似, 我们也可以证明 $\nabla^2 f_\varepsilon$ 不是一致连续的.

上述例子告诉我们, 为了获得相变界面的二阶正则性, 首先, 稳定性条件是必须的 (否则该结论在二维时都不成立); 其次, 即使对稳定解, 适当的维数限制也是必要的. 这方面最一般的结果是如下定理:

定理 5.2 对任意 $\theta \in (0, 1)$, $0 < b_1 < b_2 < 1$ 和 $\Lambda > 0$, 存在常数 $C = C(\theta, b_1, b_2, \Lambda)$ 以及 $\varepsilon_* = \varepsilon(\theta, b_1, b_2, \Lambda)$ 使得下述结果成立.

若 u_ε 是 B_1^n 内 (1.1) 的一个稳定解, 且在 $\{|u_\varepsilon| \leq 1 - b_2\} \cap B_1^n$ 内满足

$$|\nabla u_\varepsilon| \neq 0, \quad |B(u_\varepsilon)| \leq \Lambda,$$

则当 $n \leq 10$ 和 $\varepsilon \leq \varepsilon_*$ 时, 对任意 $t \in [-1 + b_1, 1 - b_1]$, $\{u_\varepsilon = t\} \cap B_{1/2}^n$ 是 (一系列) 光滑超曲面, 且它们第二基本形式的 C^θ 范数可以被常数 C 控制. 对 $\{u_\varepsilon = t\}$ 的平均曲率 $H^t(u_\varepsilon)$ 有估计

$$|H^t(u_\varepsilon)| \leq C\varepsilon \quad \text{在 } B_{1/2}^n \text{ 中}. \quad (5.4)$$

该定理的二维及一些特殊的高维情形在文献 [139] 中首先证明, 然后 Chodosh 和 Mantoulidis [32] 证明了三维的一些情形 (这被用于他们对 Allen-Cahn 情形的 Marques-Neves 重数一猜想及三维情形下丘成桐 “无穷多极小曲面存在性猜想” 的证明, 见第 6.3 小节), 上述最一般形式是在文献 [138] 中建立的.

与定理 5.1 相比, 该结果的复杂之处完全源于相变界面具有高重数, 即注 3.1 中所描述的界面聚类情形. 实际上, 在上述定理中, 我们甚至允许 $\{u_\varepsilon = 0\}$ 的连通分支个数随 $\varepsilon \rightarrow 0$ 趋于无穷. 相应地, 该定理的证明也依赖于相变界面不同连通分支之间相互作用形式的确定.

这种相互作用基本上可由如下非线性偏微分方程描述:

$$\Delta' f_{\alpha, \varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon} [e^{-\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(f_{\alpha, \varepsilon} - f_{\alpha-1, \varepsilon})} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(f_{\alpha+1, \varepsilon} - f_{\alpha, \varepsilon})}]. \quad (5.5)$$

这里 Δ' 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的 Laplace 算子, A 则是一个正常数. 该方程即在可积系统理论中已经被大量研究过的 Toda 方程组 (参见文献 [80, 108]). 注意该方程组仅在空间一维、二维情形下完全可积, 且可以用可积系统方法来研究, 但在定理 5.2 的证明中, 我们需要的是 Toda 方程组在任意维数情形时的一些正则性结果, 如稳定解的先验估计、Liouville 定理等性质.

通过利用 Toda 方程组稳定解的一些先验估计, 可以证明对 Allen-Cahn 方程的稳定解, 其界面不同连通分支之间的距离有如下下界. 记 D_ε 为相变界面不同连通分支之间的距离, 则对任意的 $0 < \theta < 1$, 存在常数 C 使得

$$D_\varepsilon \geq \frac{(1+\theta)\sqrt{2}}{2} \varepsilon |\log \varepsilon| - C\varepsilon. \quad (5.6)$$

由此距离下界估计, 即可对方程 (5.5) 运用标准的 Schauder 估计推导出 $f_{\alpha, \varepsilon}$ 的 $C^{2, \theta}$ 估计.

所以, (5.6) 是整个证明中的一个关键估计, 而它是否成立与 Toda 方程组的 Liouville 性质紧密相关. 事实上, 如果该距离估计不成立, 即如果有

$$D_\varepsilon \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon |\log \varepsilon| + C\varepsilon,$$

则通过定义尺度变换

$$\tilde{f}_{\alpha, \varepsilon}(x) := \frac{1}{\varepsilon} f_{\alpha, \varepsilon}(\varepsilon^{\frac{1}{2}} x) - \frac{\sqrt{2}\alpha}{2} |\log \varepsilon|, \quad (5.7)$$

可以证明 $\tilde{f}_{\alpha,\varepsilon}$ 在适当意义下收敛到标准 Toda 方程组在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的一个全空间解

$$\Delta' f_\alpha = e^{-\sqrt{2}(f_\alpha - f_{\alpha-1})} - e^{-\sqrt{2}(f_{\alpha+1} - f_\alpha)}. \quad (5.8)$$

换言之, 如果能够证明这样的全空间解不存在 (即某种 Liouville 定理), 就可以得到矛盾, 从而说明 (5.6) 中的距离下界成立. 当然, 这种 Liouville 定理一般都需要额外的条件, 例如, 文献 [137] 证明了关于 Toda 方程组稳定解的 Liouville 定理.

定理 5.3 对任意 $Q \geq 2$, 考虑方程组 (5.8), 其中 $\alpha = 1, \dots, Q$.

- (1) 当 $n \leq 10$ 时, (5.8) 不存在稳定的全空间解;
- (2) 当 $4 \leq n \leq 10$ 时, (5.8) 不存在具有有限 Morse 指标的全空间解.

定理 5.2 中的维数 10 即为该定理中的最优维数.

本节最后简略介绍文献 [138, 139] 中从 Allen-Cahn 方程推导出 Toda 方程组 (5.5) 及证明不同界面之间距离下界 (5.6) 的方法.

Toda 方程组的推导运用了一种反向形式的无穷维 Lyapunov-Schmidt 约化方法. 约化方法是非线性泛函分析理论中的一个经典方法, 已经被广泛运用于证明微分方程解的存在性 (如在分歧理论和黏连方法中, 参见文献 [27, 第 1.3 小节]). 在 Allen-Cahn 方程的研究中, Del Pino, Kowalczyk, Pacard 和魏军城等学者发展了无穷维 Lyapunov-Schmidt 约化方法, 利用极小曲面和 Toda 方程组构造了很多 Allen-Cahn 方程的解, 例如:

- (1) Riemann 流形上非退化极小超曲面附近的解 (参见文献 [111]);
- (2) $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 9$) 上的单调解 (参见文献 [46]), 这与 De Giorgi 猜想有关且对应于极小曲面理论中的 Bombieri-De Giorgi-Giusti 图, 见第 6.1 小节;
- (3) 二维区域或 $\mathbb{R}^2$ 上具有界面聚类的解 (参见文献 [44, 45], 特别地, 文献 [45] 首先发现了 Allen-Cahn 方程与 Toda 方程组之间的联系);
- (4) 紧 Riemann 流形上具有界面聚类的解 (参见文献 [48]);
- (5) 对应于 $\mathbb{R}^3$ 中全曲率有限极小曲面的解 (参见文献 [47]);
- (6) $\mathbb{R}^8$ 中渐近于 Simons 锥的解 (参见文献 [112]) 等.

文献 [138, 139] 中所使用的则是 Lyapunov-Schmidt 约化方法的一种反向形式. 这是因为我们并不是从已有的极小曲面或者 Toda 方程组的解出发来构造 Allen-Cahn 方程的解, 而是从已有的 Allen-Cahn 方程的解出发来推导其相变界面所 (近似) 满足的椭圆方程. 这种想法在 Del Pino 等 [43] 以及 Gui 等 [70] 等的工作中已经出现过. 但他们关注的是 Allen-Cahn 方程一些全空间解在无穷远处的渐近行为, 而在定理 5.2 的证明中, 我们需要处理的是界面聚类情形的分析. 处理这种情形的想法是利用反向约化方法建立 Allen-Cahn 方程中的相变界面与极小曲面、Toda 方程组之间的对应关系, 从而使得我们可以借用 Toda 方程组稳定解的先验估计来建立稳定相变界面的曲率估计.

首先, 在相变界面具有一致一阶正则性的假设下, 界面可局部表示为一列函数图像的并 $\bigcup_\alpha \Gamma_{\alpha,\varepsilon}$, 其中 $\Gamma_{\alpha,\varepsilon} = \{x_n = f_{\alpha,\varepsilon}(x')\}$, 且满足序关系 $\dots < f_{\alpha-1,\varepsilon} < f_{\alpha,\varepsilon} < f_{\alpha+1,\varepsilon} < \dots$, 这里允许指标集的基数趋于无穷. 同时在每一个 $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}$ 附近, 沿着每条法线 u_ε 都很接近于 $g(\varepsilon^{-1}d_{\alpha,\varepsilon})$, 这里 $d_{\alpha,\varepsilon}$ 代表到 $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}$ 的符号距离函数.

在此基础上, 可以得到解 u_ε 如下形式的正交分解:

$$u_\varepsilon = \sum_\alpha g_{\alpha,\varepsilon} + \phi_\varepsilon,$$

这里 ϕ_ε 是误差函数. 而在每一个 $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}$ 的 Fermi 坐标系 (y, z) 中 (y 是 $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}$ 中的局部坐标, 而 z 是到 $\Gamma_{\alpha,z}$ 的符号距离), 有

$$g_{\alpha,\varepsilon}(y, z) = g\left((-1)^\alpha \frac{z - h_{\alpha,\varepsilon}(y)}{\varepsilon}\right).$$

函数 $h_{\alpha,\varepsilon}$ 的引入是为了确保如下关键的正交性条件成立:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(y, z) g'\left((-1)^\alpha \frac{z - h_{\alpha,\varepsilon}(y)}{\varepsilon}\right) dz = 0, \quad \forall y \in \Gamma_{\alpha,\varepsilon}. \quad (5.9)$$

这相当于我们在 $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}$ 的法线方向对一维解作适当平移, 使其在 L^2 意义下最优逼近 u_ε . 此即所谓的调参 (modulation) 过程.

由此正交性条件, 可确保 Allen-Cahn 方程基本可以拆分为两个方程: 一个是关于相变界面的, 另一个是关于误差函数 ϕ_ε 的. 由正交性条件, 这两个方程之间有非常弱的耦合 (仅通过一些高阶的误差项)—所以我们在两个方程之间实现了解耦 (decoupling). 相变界面所满足的方程可以理解为核空间 (kernel space, 相对于 Allen-Cahn 方程在 u_ε 处的线性化算子) 上的一个方程, 而误差函数 ϕ_ε 则近似满足一个线性化方程. 由于误差函数还和核空间正交, 我们可以推导出 ϕ_ε 满足一些非常好的先验估计.

将误差函数 ϕ_ε 的估计代入核空间方向的方程中, 即可推导出相变界面近似满足 Toda 方程组 (5.5). 为此目的, 我们还需要确定相变界面不同连通分支之间的相互作用模式, 如图 6 所示 (在放大了 ε^{-1} 倍之后的图景下): 首先在每个连通分支 (如 Γ_0 , Γ_1 和 Γ_{-1}) 附近, u 基本上是一维解 g 和其符号距离函数 (分别记作 d_0 , d_1 和 d_{-1}) 的复合; 然后, 由 g 在无穷远处的渐近展开式, 可知在 Γ_0 附近, 它的两个相邻分支 Γ_1 和 Γ_{-1} 产生的贡献中 (分别由 $g(d_1)$ 和 $g(d_{-1})$ 代表), 主阶项 (分别是 -1 和 1) 恰好抵消, 余下的是 g 在无穷远处的下一阶展开项, 即 $e^{-\sqrt{2}d_1}$ 和 $e^{-\sqrt{2}d_{-1}}$, 它们给出了 Toda 方程组中的两个指数非线性项; 最后, 再由 g 在无穷远处的指数收敛, 可知除了 Γ_1 和 Γ_{-1} 之外的其他连通分支对 Γ_0 的影响都是高阶无穷小 (即在 Allen-Cahn 方程中, 相变界面各连通分支之间的相互作用仅在最近的邻居之间发生 (interaction between nearest neighbors)).

推导出相变界面所满足的近似 Toda 方程组后, 我们还需要将 Allen-Cahn 方程的稳定性条件约化

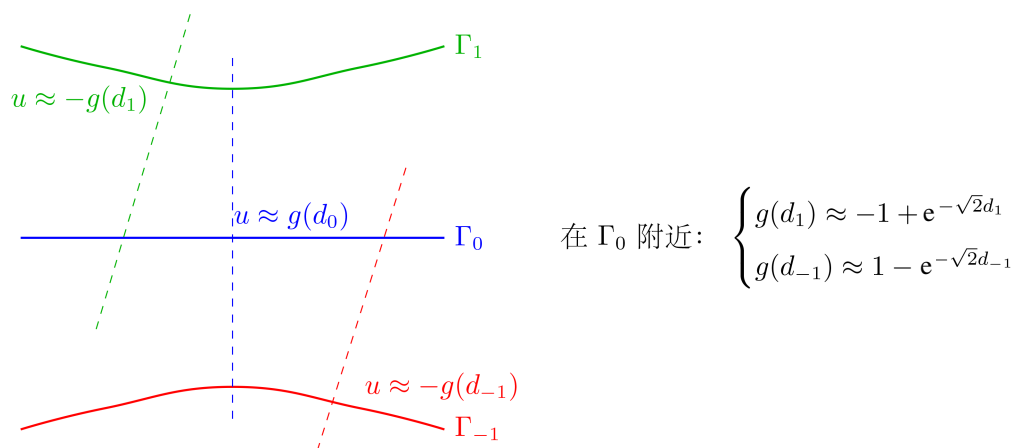


图 6 (网络版彩图) 相变界面不同分支之间的相互作用

为 Toda 方程组的稳定性条件. 这是通过在 Allen-Cahn 方程的稳定性条件中取形如

$$\eta := \sum_{\alpha} \phi_{\alpha,\varepsilon} g'_{\alpha,\varepsilon}$$

的试验函数, 这里 $\phi_{\alpha,\varepsilon}$ 是 $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}$ 上的任意紧支集光滑函数—这相当于我们取这些相变界面的切向扰动来计算二阶变分.

一旦我们证明了 $f_{\alpha,\varepsilon}$ 是 Toda 方程组的 (近似) 稳定解, 就可借助关于 Toda 方程组稳定解的一些先验估计, 如 Farina 型积分估计 (这是由 Farina 对 Liouville 方程稳定解证明的一些积分估计, 参见文献 [55]—它们可以推广到 Toda 方程组, 参见文献 [137]). 由此积分估计再结合一些标准的椭圆估计, 如 $W^{2,p}$ 估计等 (这里需要维数小于等于 10 的限制), 即可得到 (5.6) 中的距离下界估计.

6 应用

本节介绍前述理论的一些应用, 主要是在 De Giorgi 猜想、有限 Morse 指标解的分类以及 Riemann 流形上极小曲面的构造这三个问题的研究中.

6.1 De Giorgi 猜想

De Giorgi [39] 提出了如下关于 Allen-Cahn 方程全空间解 “一维对称性” 的著名猜想:

猜想 6.1 设 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 是方程 (1.1) 的一个解, 满足单调性条件 $\partial_{x_n} u > 0$. 则当 $n \leq 8$ 时, u 仅依赖于一个变量, 等价地, u 的每一个水平集 $\{u = t\}$ 都是超平面.

该猜想最近二十余年受到了广泛关注, 例如, Ghoussoub 和 Gui 证明了二维情形 (参见文献 [66]) 和高维的一些特殊情形 (参见文献 [67]), Ambrosio 和 Cabré [9] 证明了三维情形, Savin [117] 在一个附加条件下证明了直至八维的情形 (也可参见文献 [136]), Del Pino 等 [46] 给出了九维及以上的反例. 关于该猜想的更多讨论, 可参见 Chan 和 Wei 的综述文章 [26].

Savin [117] 在上述工作中同时证明了直至七维时局部能量极小解的一维对称性, 即如下定理:

定理 6.1 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上 Allen-Cahn 方程的局部能量极小解. 如果 $n \leq 7$, 则 u 是一维的.

该定理可以通过相变界面的一阶正则性得到, 证明步骤简述如下.

第 1 步 对任意 $\varepsilon > 0$, 定义

$$u_{\varepsilon}(x) := u(\varepsilon^{-1}x).$$

则由 Γ -收敛理论或者 Hutchinson-Tonegawa 理论可知, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\{u_{\varepsilon} = 0\}$ 收敛到一个面积极小的极小超曲面且其重数为 1. 由极小曲面的 Bernstein 定理可知, 当 $n \leq 7$ 时, 该极限极小超曲面是一个超平面.

第 2 步 由定理 4.3 可知, $\{u_{\varepsilon} = 0\}$ 是一列具有一致 $C^{1,\theta}$ 正则性的函数的图. 但 $\{u_{\varepsilon} = 0\} = \varepsilon\{u = 0\}$, 这蕴涵着 $\{u = 0\}$ 是一个超平面.

回到 De Giorgi 猜想, 对于满足单调性条件 $\partial_{x_n} u > 0$ 的解, Savin 所加的额外条件其实是为了确保解是局部能量极小, 从而使得上述第 1 步中的结论仍然成立. 为了在没有此额外条件时完全证明 De Giorgi 猜想, 一个可能途径是证明 “稳定 De Giorgi 猜想”, 即如下猜想:

猜想 6.2 设 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 是方程 (1.1) 的一个稳定解. 如果 $n \leq 7$, 则 u 是一维的.

一个证明这个猜想的新困难是, 如何由稳定性条件证明解具有自然能量增长: 存在常数 C 使得

$$\int_{B_R^n(x)} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + W(u) \right] \leqslant CR^{n-1}, \quad \forall R > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

作为对比, 在最近 Chodosh 等 [31] 和 Mazet [99] 对直至六维稳定 Bernstein 猜想的证明中, 关键一步即为利用 μ - 泡泡 (μ -bubble) 方法证明稳定极小超曲面具有自然面积增长. 是否可以将此方法推广至椭圆变分问题、特别是 Allen-Cahn 方程等相变模型的研究中, 是一个非常有趣的问题.

最后, 即使假设上述自然能量增长条件满足, 如何证明全空间稳定解的一维对称性 (即 “弱稳定 De Giorgi 猜想”), 目前也仅在四维情形得到了解决 (由最近 Florit-Simon 和 Serra [62] 的突破性工作), 而五维至七维情形仍然是一个公开问题. 文献 [62] 通过选取好的球心和尺度 (good center and good scale) 及定义一种好球 - 坏球分解 (good-bad ball decomposition), 仍然可以在界面聚类情形由调和逼近得到相变界面的平坦性改进估计. 巧合的是, 该证明强烈依赖于相变界面的二阶正则性理论. 具体而言, 为了启动调和逼近程序, 他们需要在好球区域中利用定理 5.2 中的相变界面平均曲率的 L^∞ 估计 (5.4), 从而得到相变界面平均曲率的一个整体 L^1 估计.

6.2 有限 Morse 指标解的结构

本小节讨论 Allen-Cahn 方程有限 Morse 指标解的分类问题. 在极小曲面理论中, 具有有限 Morse 指标的极小曲面自 20 世纪 80 年代起便受到广泛关注 (参见文献 [60]). 受这方面结果的启发, Del Pino 等在文献 [47, 第 10 节] 中提出了一系列关于 $\mathbb{R}^3$ 上 Allen-Cahn 方程有限 Morse 指标解分类的问题. 特别地, 他们问是否 Allen-Cahn 方程的有限 Morse 指标解一定只有有限个端.

定义 6.1 (有限端解) 设 u 是 Allen-Cahn 方程在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个解, 如果存在一个紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $\{u = 0\} \cap (\mathbb{R}^n \setminus K)$ 只有有限多个连通分支, 则称 u 为一个有限端解.

一般而言, 除此拓扑有限性之外, 我们还需要对解在无穷远处的渐近行为有更多要求. 例如, $\mathbb{R}^2$ 上的 k -端解实际上定义如下 (参见文献 [43]): 存在 k 条有向射线 $\{a_j \cdot x + b_j = 0\}$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $a_j \in \mathbb{S}^1$, $b_j \in \mathbb{R}$, 使得在一个紧集外, u 渐近逼近于 $g(a_j \cdot x + b_j)$, 即存在常数 $C, c > 0$ 使得

$$\left| u(x) - \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} g(a_j \cdot x + b_j) \right| \leqslant Ce^{-c|x|},$$

其中 g 是 (2.1) 中定义的一维解.

图 7 是 $\mathbb{R}^2$ 上具有四个端或者六个端的解. Kowalczyk 等 [84] 构造了一系列更复杂的 $\mathbb{R}^2$ 上的多端解.

在二维情形, 我们有如下结果.

定理 6.2 [139] 若 u 是 $\mathbb{R}^2$ 上 (1.1) 的有限 Morse 指标解, 则其只有有限个端. 同时 u 具有自然能量增长, 即存在 $C > 0$ 使得对于任意 $R > 1$, 有

$$\int_{B_R^2} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + W(u) \right] \leqslant CR.$$

我们期待这样的结果在高维还是成立的, 但目前只能证明轴对称情形⁴⁾.

4) 在最近的一个工作 [61] 中, 在假设稳定 De Giorgi 猜想 (猜想 6.2) 成立前提下, Florit-Simon 移除了该轴对称假设, 证明了该定理对 $\mathbb{R}^n$ ($3 \leqslant n \leqslant 7$) 上具有自然能量增长条件的有限 Morse 指标解都成立.

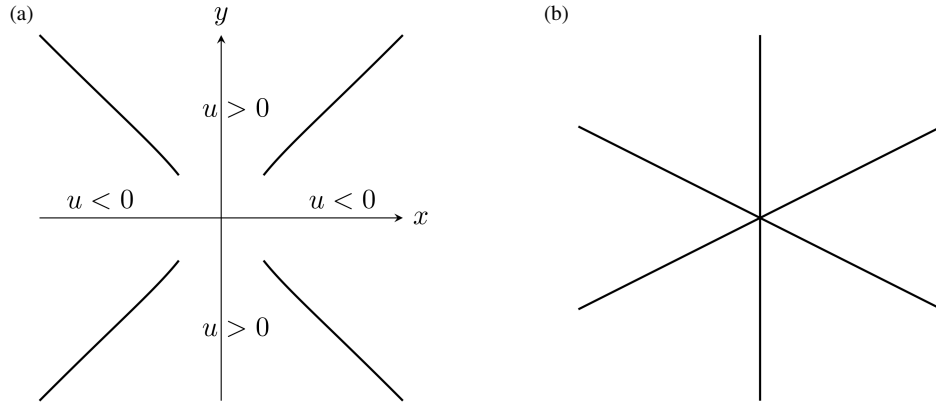


图 7 $\mathbb{R}^2$ 上的有限端解. (a) 具有四个端的解; (b) 具有六个端的解

定理 6.3 ^[71] 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上 (1.1) 关于 x_n 轴旋转对称的解.

- (1) 当 $4 \leq n \leq 10$ 时, 若 u 的 Morse 指标有限, 则 u 仅依赖于 x_n (即它只有一个端);
- (2) 当 $n = 3$ 时, 若 u 的 Morse 指标有限, 则 u 具有有限个端, 且存在常数 $C > 0$ 使得对任意 $R > 0$, 有

$$\int_{B_R^3} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + W(u) \right] \leq CR^2;$$

- (3) 当 $n = 3$ 时, 若 u 的 Morse 指标为 1, 则 u 恰好有两个端;

- (4) 当 $n = 3$ 时, 若 u 的 Morse 指标为 0 (即它是稳定解), 则 u 仅依赖于 x_n (即只有一个端).

这个定理第一个结果对应于定理 5.3 中关于 Toda 方程组有限 Morse 指标解的结论. 对有限端解, 目前我们已经有很多结果: $\mathbb{R}^2$ 上有限端解的模空间构造参见文献 [43]; Kowalczyk 等 [81–83] 对 $\mathbb{R}^2$ 上最简单的有限端解 (除了平凡的一维解)—四端解, 进行了系统研究; Gui 等 [70] 对 $\mathbb{R}^3$ 中两端解的结构及其模空间进行了深入研究.

证明上述两个定理的一个关键是相变界面的曲率衰减估计, 例如, 定理 6.2 证明中的关键一步是如下曲率衰减估计 (这里 $B(u)$ 是 (2.6) 中出现的曲率型量, 见 (2.7)).

定理 6.4 如果 u 是 $\mathbb{R}^2$ 上 (1.1) 的有限 Morse 指标解, 则对任意 $b \in (0, 1)$, 存在常数 $C > 0$ 和 R , 使得在 $\{|u| \leq 1 - b\} \setminus B_R^2$ 上,

$$|B(u)(x)| \leq \frac{C}{|x|}. \quad (6.1)$$

这一结果类似于 Schoen ^[122] 建立的三维空间中稳定极小曲面的内部曲率估计 ⁵⁾.

定理 6.5 若 $\Sigma \subset B_r^3$ 是一个浸入的、具有平凡法丛的稳定极小曲面, 且 $\partial\Sigma \subset \partial B_r^3$, 则 Σ 的第二基本形式 A 满足估计

$$\sup_{B_{r/2}^3} |A| \leq \frac{C}{r}.$$

5) 由于直至六维的稳定 Bernstein 猜想最近都已获得了解决 (参见文献 [30, 31, 99]), 目前该定理已经可以推广到六维.

Schoen 的证明强烈依赖于 Simons 不等式 (由 Simons^[128] 发现):

$$\Delta_{\Sigma}|A|^2 \geq -2|A|^4 + 2\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)|\nabla_{\Sigma}|A||^2.$$

这里 Δ_{Σ} 是 Σ 上的 Beltrami-Laplace 算子. 很不幸的是, Allen-Cahn 方程中没有类似的关于曲率的不等式, 因此我们证明定理 6.4 采用的是爆破方法: 假设 (6.1) 不成立, 则可以通过适当的尺度变换得到 (1.1) 在 B_1^2 上的一列稳定解 u_{ε} ($\varepsilon \rightarrow 0$), 其满足相变界面的曲率一致有界, 但在原点处的曲率恒等于 1 (这是正规化条件). 由曲率一致有界条件, 我们即可使用定理 5.2 得到相变界面的一致 $C^{2,\theta}$ 正则性以及 C^2 中的收敛性, 这最终会导致与正规化条件的矛盾.

6.3 极小超曲面的构造

极小曲面的存在性一直是一个受到广泛关注的问题. 几何测度论中很多理论都起源于尝试通过极小化方法来构造极小曲面 (如 Plateau 问题). 对非面积极小的极小曲面, 在 Almgren^[6,7] 于 20 世纪 60 年代的若干工作基础上, Pitts^[115] 在 1981 年建立了一个关于面积泛函的极小极大理论并由此证明当 $n \leq 6$ 时, 任意 n 维紧 Riemann 流形中均存在一个闭的、光滑嵌入的极小超曲面. Schoen 和 Simon^[123] 通过他们建立的正则性理论, 将此结果延伸到了任意维数 (高维时得到的极小超曲面具有受控的奇点集). 受这些工作启发, Yau^[144] 提出了如下著名猜想:

猜想 6.3 任意闭三维 Riemann 流形一定包含无穷多个浸入的极小曲面.

最近十余年, 从 Marques 和 Neves^[94] 对 Willmore 猜想的开创性证明开始, Almgren-Pitts 极小极大理论被系统地发展 (如 Marques 和 Neves^[96]、Irie 等^[76] 和 Marques 等^[98]) 并最终促使了 Song^[130] 对丘成桐猜想的完全解决.

但这些证明都是非直接的, 我们并不能从证明中获得极小曲面的更多信息. 一个核心困难在于, 为了获得必要的弱紧性, 我们必须要在变分形或者流动形 (current) 框架下来寻找面积泛函的临界点. 这样的话, 即使我们有一列光滑超曲面, 由于在取弱极限时可能会出现折叠现象, 它们的弱极限的重数就有可能大于 1 (见图 8(a), 局部图景见图 8(b)). 因此, 虽然利用极小极大理论可以推得面积泛函有无穷多个临界点, 但这些临界点有可能是同一个极小超曲面, 只是具有不同的重数. 为了解决此困难, Marques 和 Neves^[95] 提出了如下两个猜想:

猜想 6.4 (重数一猜想) 如果紧 Riemann 流形 M^n 上的度量 g 是多凸的 (bumpy)⁶⁾ 且 $3 \leq n \leq 7$, 则由极小极大方法得到的闭极小超曲面的每个连通分支都是可定向的且其重数为 1.

猜想 6.5 (Morse 指标猜想) 如果紧 Riemann 流形 M^n 上的度量 g 是多凸的且 $3 \leq n \leq 7$, 则存在一系列光滑、嵌入、双边 (two sided) 的闭极小超曲面 $\{\Sigma_k\}$ 满足

$$\text{Index}(\Sigma_k) = k, \quad C^{-1}k^{\frac{1}{n}} \leq \text{Area}(\Sigma_k) \leq Ck^{\frac{1}{n}}.$$

在这之后, 重数一猜想由 Zhou^[145] 予以解决⁷⁾, Morse 指标猜想也由 Marques 和 Neves^[97] 解决. 相关工作也可参见 Wang 和 Zhou^[141] 的综述文章. 这些猜想的解决, 不仅给予了丘成桐猜想一个肯定的回答, 即得到了无穷多极小曲面的存在性, 同时也可以给出这些极小超曲面的 Morse 指标特征等丰富信息.

6) 这里指每一个闭的、浸入极小超曲面都是非退化的, 即在其上不存在非平凡的 Jacobi 场.

7) Wang 和 Zhou^[142] 的最近工作表明, 如果 Riemann 度量不是多凸的, 极小极大方法构造出的极小超曲面确实有可能是高重数的. 所以多凸性假设在重数一猜想中是必须的.

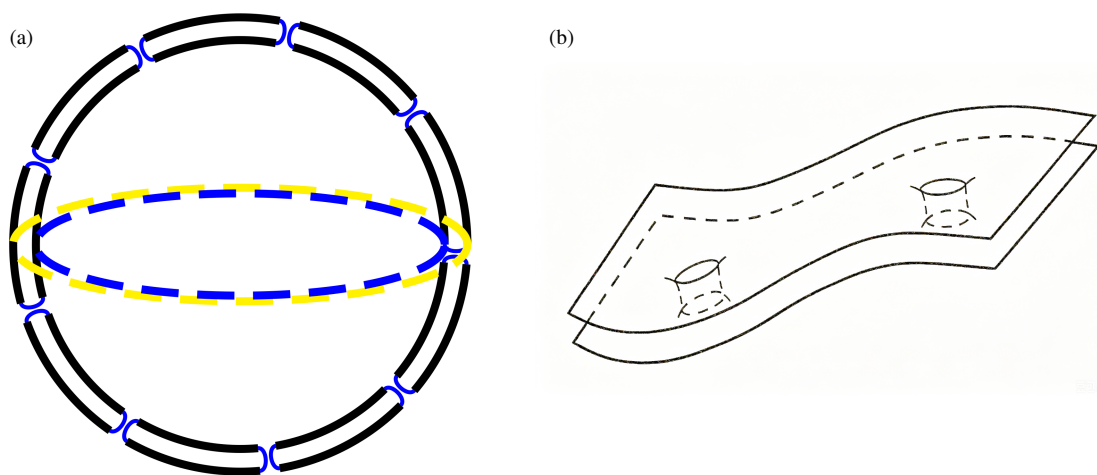


图 8 (网络版彩图) 曲面折叠形成高重数. (a) 整体图景; (b) 局部图景

这些证明都用到了几何测度论中一些非常艰深的理论和复杂的构造方法. 由于 Allen-Cahn 方程和极小超曲面之间的紧密联系, 一个自然的想法是利用 Allen-Cahn 方程逼近方法来构造极小超曲面. 采用 Allen-Cahn 逼近的一个好处是, Allen-Cahn 方程及其对应的能量泛函具有非常好的性质, 可以直接运用变分法中一系列标准的临界点理论 (如山路引理和 $\mathbb{Z}_2$ 指标理论等) 得到其解的存在性. 例如, Guaraco [69] 利用山路引理得到了任意紧 Riemann 流形上 Allen-Cahn 能量泛函的一个山路型临界点, 再利用稳定解和有限 Morse 指标解的收敛性结果 (见定理 3.5), 在 Allen-Cahn 方程中令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可得到一个山路型的极小超曲面, 且其具有最优的部分正则性 (在 8 维以下是光滑的, 8 维及以上可以控制其奇点集的 Hausdorff 维数). 在后续一系列工作中, Riemann 流形上 Allen-Cahn 方程相关问题被一大批数学家研究 (参见文献 [12, 13, 28, 50, 51, 64, 65, 93]). Chodosh 和 Mantoulidis [33] 利用 Allen-Cahn 逼近方法解决了关于二维 Riemann 流形的 p -宽度 (p -width) 问题. 虽然该问题本质上只是一个测地线问题, 但由于 Almgren-Pitts 极小极大理论无法排除具有非等分角的测地网 (geodesic net) 的出现, Allen-Cahn 方程的使用在这项工作中是本质的. 另外, 他们使用的并不是标准的 Allen-Cahn 方程, 而是椭圆 sine-Gordon 方程

$$\Delta u = \sin(\pi u).$$

该方程仍然具有双势阱结构, 所以是广义意义下的 Allen-Cahn 方程, 且它还是完全可积的, 由此 Liu 和 Wei [92] 利用可积系统方法给出了该方程在 $\mathbb{R}^2$ 上有限 Morse 指标解的完全分类. 这个分类结果 (特别地, 刘 - 魏切锥定理) 是文献 [33] 中一个非常关键的工具.

在 Hutchinson-Tonegawa 理论中, 我们见到 Allen-Cahn 方程解的极限变分形可能具有高重数. 这与 Almgren-Pitts 极小极大理论中遇到的困难是类似的, 所以由 Allen-Cahn 逼近得到的极小超曲面也有可能几何上是同一个超曲面, 只是具有不同的重数. 为解决此困难, 我们也需要证明 Allen-Cahn 情形下的重数一猜想. 在三维情形, 这已经由 Chodosh 和 Mantoulidis [32] 予以解决.

在以下定理中, 设 (M^3, g) 是一个闭三维 Riemann 流形, $\{u_\varepsilon\}$ 是 Allen-Cahn 方程的一列解, 具有一致有界的能量和 Morse 指标. 由定理 3.3, 我们可以说 u_ε 收敛到一个变分形 V_0 . 由定理 3.5, V_0 的支集是一个嵌入、光滑的极小曲面 Σ . Chodosh 和 Mantoulidis [32] 首先证明了如下关键定理:

定理 6.6 如果 V_0 的重数大于 1 或者 Σ 是单边的 (one sided), 则 Σ 有一个正的 Jacobi 场 (在第二种情形下, 则是在 Σ 的双边覆盖上).

这个定理的证明首先需要相变界面的二阶正则性以确保在界面聚类情形下, 相变界面仍然在光滑意义下收敛到极限极小曲面 Σ , 所以定理 5.2 涉及的全部分析在这里都是需要的. 但为了构造 Σ 上的正 Jacobi 场, 我们还需要比距离下界估计 (5.6) 更精确的描述: 存在常数 $L_\varepsilon \rightarrow +\infty$ 使得

$$D_\varepsilon \geq \sqrt{2}\varepsilon |\log \varepsilon| - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon \log |\log \varepsilon| + \varepsilon L_\varepsilon. \quad (6.2)$$

这一估计用于确保在对 Allen-Cahn 方程进行约化之后所得到的方程中, 与由曲率带来的一些几何项相比, Toda 方程组中的指数非线性项都是高阶无穷小. 估计 (6.2) 的证明则需要我们将定理 5.2 证明中的约化分析进一步精细化, 推导出一种 Jacobi-Toda 方程组 (这是 Jacobi 场方程和 Toda 方程组结合起来的一个方程组, 它之前已经在文献 [48] 中构造界面聚类的解时出现过), 然后利用这个方程组稳定解的一些先验估计.

作为上述定理的推论, 我们推导出: 当度量 g 是多凸的或者具有正 Ricci 曲率时, 由于任何一个极小曲面都不可能有正 Jacobi 场, V_0 的每一个连通分支都是双边的且具有重数 1. 这证明了 Allen-Cahn 情形下的重数一猜想, 从而也给出了丘成桐猜想 (猜想 6.3) 的另一个证明.

推论 6.1 如果 (M^3, g) 是一个闭三维流形, 且度量 g 是多凸的, 则存在一个常数 C 仅依赖于 M^3 , g 和双势阱 W , 使得对任意正整数 $k > 0$, 存在一个光滑、嵌入极小曲面 Σ_k 满足:

- (1) Σ_k 的每个连通分支均是双边的;
- (2) 对 Σ_k 的面积有估计

$$C^{-1}k^{1/3} \leq \text{area}_g(\Sigma_k) \leq Ck^{1/3};$$

- (3) Σ_k 的 Morse 指标等于 k ;
- (4) 对 Σ_k 的亏格 (genus) 有估计

$$k \geq \text{genus}(\Sigma_k) \geq k - Ck^{1/3}.$$

特别地, 由上述 Morse 指标的刻画, Σ_k 在几何上是不同的.

与 Zhou [145] 的结果相比, 目前还无法解决 Allen-Cahn 情形下高维时的重数一猜想. 这是由于我们还无法证明高重数情形时相变界面的一阶正则性 (即猜想 4.1). 但由最近 Florit-Simon 和 Serra [62] 对四维弱稳定 De Giorgi 猜想的证明, 上述定理已经可以推广至四维.

7 总结及若干未涉及的问题

由前几节的讨论, 我们可以总结如下一些结论.

(1) Allen-Cahn 方程相变界面的正则性与极小超曲面的正则性非常相似, 但它们的证明经常具有很大差异. 这是由于很多几何关系或者几何构造 (如关于极小曲面第二基本形式的 Simons 不等式、 μ -泡泡) 在 Allen-Cahn 方程中没有对应的形式. 这样的现象在很多椭圆偏微分方程的研究中都会遇到, 因此我们经常需要寻找一些新的途径 (如上文所见到的反向 Lyapunov-Schmidt 约化方法).

(2) 相变界面的零阶、一阶及二阶正则性都与某种 ε -正则性相关, 这包括零阶正则性中的清除性质 (命题 3.4) 和一阶正则性中的 Allard 型 ε -正则性 (定理 4.2). 在二阶时, 虽然我们没有陈述这样的结果, 但对应于 Toda 方程组稳定解的 ε -正则性 (参见文献 [137, 定理 3.1]), 我们也可以建立一个利用

Sternberg-Zumbrun 曲率量 $|B(u_\varepsilon)|$ 描述的、关于稳定相变界面的二阶 ε - 正则性. 由此应该可以得到高维时稳定相变界面的一种部分正则性, 从而补全定理 5.2 在大于等于 11 维时的情形.

(3) 在研究 Allen-Cahn 方程相变界面的正则性时, 最主要的麻烦来自高重数 (即界面聚类) 情形. 特别地, 由于在能量极小解中不会出现界面聚类 (见定理 3.3(5)), 我们现在对能量极小情形的理解已经比较完备. 与之相比, 一般临界点的相变界面可以非常复杂, 我们不应该期望可以得到任何正面结果, 除非加上单重假设 (则相应结果即为定理 4.1 和 5.1). 目前遗留的主要问题都是关于这二者之间的解类, 即稳定解和有限 Morse 指标解.

(4) 相变界面的零阶、二阶正则性目前已经基本理解清楚, 只有高重数情形时的一阶正则性 (即猜想 4.1) 还没有完全证明. 对于该猜想, 稳定性条件是一个必要假设 (否则, 具有悬链面形状相变界面的解就是一个反例, 参见文献 [70]), 而现在缺乏的恰好是在 Allen-Cahn 方程中有效利用稳定性条件的方法. 这也与能量极小条件形成鲜明对比: 能量极小条件是一种全局条件, 可以利用它构造能量比较函数 (energy competitor) 来得到先验估计; 而稳定性条件仅是一种局部条件, 目前除了利用它的二阶内变分形式或者约化形式⁸⁾, 我们仍然无法充分利用它得到有效的先验估计.

(5) 我们只讨论到相变界面的二阶正则性, 这是因为类似于二阶椭圆方程理论, $C^{2,\theta}$ 正则性在实际应用中一般已足够. 但一个自然的问题是, 相变界面是否具有更高阶的 ($C^{3,\theta}, C^{4,\theta}, \dots$) 正则性. 由于相变界面并不真正满足一个椭圆方程, 其高阶正则性并不能从标准的椭圆方程理论得到, 这需要对反向约化分析过程中出现的各种误差项有更好的控制. 这种高阶正则性问题可能也与 Allen-Cahn 方程的解是否可以作 Hilbert 展开

$$u_\varepsilon = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots + \varepsilon^N U_N + O(\varepsilon^{N+1})$$

有联系. (这里 U_0 和 U_1 等是从极限极小曲面构造的一系列函数.)

关于 Allen-Cahn 方程, 还有很多方面, 本文无法继续讨论, 在此仅列举若干.

抛物型 Allen-Cahn 方程. 它与平均曲率流 (尤其是几何测度论意义下的弱解, Brakke 流, 参见文献 [18]) 有紧密联系. 关于相变界面的一阶正则性, 可参见文献 [29, 40, 54, 75] 等工作. 最近, Nguyen 和 Wang^[109, 110] 分别证明了相变界面的一阶正则性 (Brakke 型 ε - 正则性)、二阶正则性. 这两项工作都是关于单重情形的. 这是由于抛物方程没有能量极小解、稳定解的概念, 所以我们目前还缺乏合适的条件来控制抛物 Allen-Cahn 方程中的界面聚类现象. 如何对抛物 Allen-Cahn 方程的解定义稳定性条件是一个有趣的问题.

分数阶 Allen-Cahn 方程. 对带分数阶 Laplace 算子的 Allen-Cahn 方程

$$(-\Delta)^s u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{2s}} W'(u_\varepsilon) = 0,$$

目前已有大量研究. 在 $0 < s < 1/2$ 时, 该方程会收敛到非局部极小曲面 (由 Caffarelli 等^[24] 引入), 但在 $1/2 \leq s < 1$ 时仍然收敛到经典的极小超曲面.

关于该方程的 Γ -收敛理论可参见文献 [121], Hutchinson-Tonegawa 理论的对应结果可参见文献 [100, 140] (仅在 $0 < s < 1/2$ 时), 相变界面的一阶正则性及对应的 De Giorgi 型猜想方面的工作可参见文献 [52, 58, 119, 120], 另外还有 Cabré 等^[20] 关于稳定解先验估计方面的工作、关于分数阶情形的丘成桐猜想的工作^[25] 等.

最后, 关于分数阶 Allen-Cahn 方程最近的一些综述文章, 可参见文献 [53, 125, 126].

⁸⁾ 即在定理 5.2 证明中, 在足够正则的界面聚类情形下, 我们可以将 Allen-Cahn 方程的稳定性条件转化为 Toda 方程组的稳定性条件.

向量值 Allen-Cahn 方程. 关于能量极小解的 Γ -收敛理论, 可参见文献 [63, 132] 等. 关于一般临界点在变分形意义下的收敛, 目前所知甚少, 仅有 Bethuel [14] 在二维时的结果.

向量值 Allen-Cahn 方程也会作为弹性力学、液晶理论中的一些数学模型而出现, 可分别参见 Conti 等 [34]、Conti 和 Schweizer [35, 36] 的工作, 以及 Fei 等 [57]、Laux 和 Liu [85]、Park 等 [113] 的工作.

在向量值 Allen-Cahn 方程中, 势能函数可能具有多个势阱 (即有多个稳定的相), 对应的极限问题是极小划分 (minimal partition)、具有多个相的平均曲率流 (mean curvature flow with multiple phases) 等, 如 Baldo [10]、Bronsard 和 Reitich [19]、Laux 和 Simon [86] 等的工作. 另外, 在向量值 Allen-Cahn 方程中, 势能函数的势阱有可能不再只是点, 而是一个高维子集, 此时会涉及相变界面与调和映照的耦合, 参见 Fei 等 [56]、Lin 等 [89]、Liu [91] 等工作.

向量值 Allen-Cahn 方程也可以是各向异性的, 形如

$$\sum_{i,j=1}^n \sum_{\beta=1}^N A_{\alpha\beta}^{ij} \frac{\partial^2 u^\beta}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial W}{\partial u_\alpha}(u),$$

这里未知函数 $u: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^N$, W 则是 $\mathbb{R}^N$ 上具有两个 (或者多个) 阱的位势函数. 该方程与各向异性的极小曲面问题 (参见文献 [41, 42, 107]) 密切相关. 关于该情形下相变界面的收敛性, 目前仅有 Γ -收敛方面的一些工作 (参见文献 [11]).

最后, Alikakos 等的专著 [3] 是目前对向量值 Allen-Cahn 方程理论一个比较全面的总结, 也可参考 Bethuel 最近的一篇综述 [15].

Allen-Cahn 方程的边界值问题. 例如, 考虑有界光滑区域上的 Allen-Cahn 方程, 则可以在边界上赋予 Neumann 边值条件 $\partial_\nu u_\varepsilon = 0$ (这里 ν 是这个区域的单位外法向量) 或者更一般的固定接触角条件 (fixed contact angle condition). 这样的边值问题与带自由边界的极小曲面 (free boundary minimal surfaces) 或者毛细曲面 (capillary surfaces) 等问题有紧密联系. 在这方面, 我们仅列举一些工作, 参见文献 [1, 59, 77, 78, 88, 101, 104, 133].

最后, Allen-Cahn 方程与 Ginzburg-Landau 方程

$$-\Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - |u_\varepsilon|^2) u_\varepsilon, \quad u_\varepsilon: \Omega \mapsto \mathbb{C}$$

有很大的相似性. 事实上, Allen-Cahn 方程可以视为实值版本的 Ginzburg-Landau 方程, 并且 Allen 和 Cahn [5] 就是使用了 Landau 相变理论推导出的 Allen-Cahn 方程. Ginzburg-Landau 方程的 Γ -收敛理论 [90]、变分形收敛理论 [16, 17] 与本文介绍的 Allen-Cahn 方程相关理论直接对应, 不过其技术处理会有很多不同. 由于 Ginzburg-Landau 方程中只有能量为 $|\log \varepsilon|$ 阶时才会出现漩涡 (vorticity) 集, 这一特殊能量层次为研究漩涡集的一阶正则性、二阶正则性带来了很大困难. 如果在 Ginzburg-Landau 方程中加上磁场项 (即交换 Yang-Mills-Higgs 模型 (Abelian Yang-Mills-Higgs model)), 则其具有与 Allen-Cahn 方程非常类似的性质, 例如, 关于漩涡集的一阶正则性 (参见文献 [72])、在 Riemann 流形上用该模型逼近来构造余二维极小子流形 (参见文献 [114]) 等工作都是受到 Allen-Cahn 方程对应结果的启发.

致谢 感谢刘勇、刘豫宁、王伟、杨军诸教授对本文初稿的意见和建议, 感谢评审专家对本文的细致审阅及提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Abels H, Moser M. Convergence of the Allen-Cahn equation with a nonlinear Robin boundary condition to mean curvature flow with contact angle close to 90° . *SIAM J Math Anal*, 2022, 54: 114–172

- 2 Agudelo O, del Pino M, Wei J. Higher-dimensional catenoid, Liouville equation, and Allen-Cahn equation. *Int Math Res Not IMRN*, 2016, 2016: 7051–7102
- 3 Alikakos N D, Fusco G, Smyrnelis P. Elliptic Systems of Phase Transition Type. *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, vol. 91. Cham: Birkhäuser/Springer, 2018
- 4 Allard W K. On the first variation of a varifold. *Ann of Math (2)*, 1972, 95: 417–491
- 5 Allen S, Cahn J W. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metall*, 1979, 27: 1084–1095
- 6 Almgren F J Jr. The homotopy groups of the integral cycle groups. *Topology*, 1962, 1: 257–299
- 7 Almgren F J Jr. The Theory of Varifolds. Mimeographed notes, Princeton, 1965
- 8 Ambrosio L. Geometric evolution problems, distance function and viscosity solutions. In: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations (Pisa, 1996)*. Berlin: Springer, 2000, 5–93
- 9 Ambrosio L, Cabré X. Entire solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbf{R}^3$ and a conjecture of De Giorgi. *J Amer Math Soc*, 2000, 13: 725–739
- 10 Baldo S. Minimal interface criterion for phase transitions in mixtures of Cahn-Hilliard fluids. *Ann Inst H Poincaré C Anal Non Linéaire*, 1990, 7: 67–90
- 11 Barroso A C, Fonseca I. Anisotropic singular perturbations-the vectorial case. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1994, 124: 527–571
- 12 Bellettini C. Generic existence of multiplicity-1 minmax minimal hypersurfaces via Allen-Cahn. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2022, 61: 149
- 13 Bellettini C. Multiplicity-1 minmax minimal hypersurfaces in manifolds with positive Ricci curvature. *Comm Pure Appl Math*, 2024, 77: 2081–2137
- 14 Bethuel F. Asymptotics for 2-dimensional vectorial Allen-Cahn systems. *Acta Math*, 2025, 234: 189–314
- 15 Bethuel F. Scalar and vectorial Allen-Cahn equations and their asymptotics. In: *Variational and PDE Methods in Nonlinear Science. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2366. Cham: Springer, 2025, 1–82
- 16 Bethuel F, Brezis H, Orlandi G. Asymptotics for the Ginzburg-Landau equation in arbitrary dimensions. *J Funct Anal*, 2001, 186: 432–520
- 17 Bethuel F, Orlandi G, Smets D. Convergence of the parabolic Ginzburg-Landau equation to motion by mean curvature. *Ann of Math (2)*, 2006, 163: 37–163
- 18 Brakke K A. The Motion of a Surface by Its Mean Curvature. *Mathematical Notes*, vol. 20. Princeton: Princeton Univ Press, 1978
- 19 Bronsard L, Reitich F. On three-phase boundary motion and the singular limit of a vector-valued Ginzburg-Landau equation. *Arch Ration Mech Anal*, 1993, 124: 355–379
- 20 Cabré X, Cinti E, Serra J. Stable solutions to the fractional Allen-Cahn equation in the nonlocal perimeter regime. *Amer J Math*, 2025, 147: 957–1024
- 21 Caffarelli L A, Córdoba A. An elementary regularity theory of minimal surfaces. *Differential Integral Equations*, 1993, 6: 1–13
- 22 Caffarelli L A, Córdoba A. Uniform convergence of a singular perturbation problem. *Comm Pure Appl Math*, 1995, 48: 1–12
- 23 Caffarelli L A, Córdoba A. Phase transitions: Uniform regularity of the intermediate layers. *J Reine Angew Math*, 2006, 593: 209–235
- 24 Caffarelli L A, Roquejoffre J M, Savin O. Nonlocal minimal surfaces. *Comm Pure Appl Math*, 2010, 63: 1111–1144
- 25 Caselli M, Florit-Simon E, Serra J. Yau’s conjecture for nonlocal minimal surfaces. [arXiv:2306.07100](https://arxiv.org/abs/2306.07100), 2023
- 26 Chan H, Wei J. On De Giorgi’s conjecture: Recent progress and open problems. *Sci China Math*, 2018, 61: 1925–1946
- 27 Chang K C. *Methods in Nonlinear Analysis*. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2005
- 28 Chen J, Gaspar P. Morse theory for the Allen-Cahn functional. *J Funct Anal*, 2025, 288: 110876
- 29 Chen X. Generation and propagation of interfaces for reaction-diffusion equations. *J Differential Equations*, 1992, 96: 116–141
- 30 Chodosh O, Li C. Stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^4$. *Acta Math*, 2024, 233: 1–31
- 31 Chodosh O, Li C, Minter P, et al. Stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^5$. [arXiv:2401.01492](https://arxiv.org/abs/2401.01492), 2024
- 32 Chodosh O, Mantoulidis C. Minimal surfaces and the Allen-Cahn equation on 3-manifolds: Index, multiplicity, and curvature estimates. *Ann of Math (2)*, 2020, 191: 213–328
- 33 Chodosh O, Mantoulidis C. The p -widths of a surface. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 2023, 137: 245–342
- 34 Conti S, Fonseca I, Leoni G. A Γ -convergence result for the two-gradient theory of phase transitions. *Comm Pure Appl Math*, 2002, 55: 857–936
- 35 Conti S, Schweizer B. A sharp-interface limit for a two-well problem in geometrically linear elasticity. *Arch Ration*

- [Mech Anal](#), 2006, 179: 413–452
- 36 Conti S, Schweizer B. Rigidity and Gamma convergence for solid-solid phase transitions with $SO(2)$ invariance. [Comm Pure Appl Math](#), 2006, 59: 830–868
 - 37 De Giorgi E. *Frontiere Orientate di Misura Minima*. Pisa: Editrice Tecnico Scientifica, 1961
 - 38 De Giorgi E. Una estensione del teorema di Bernstein. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 1965, 19: 79–85
 - 39 De Giorgi E. Convergence problems for functionals and operators. In: *Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis* (Rome, 1978). Bologna: Pitagora, 1979, 131–188
 - 40 de Mottoni P, Schatzman M. Geometrical evolution of developed interfaces. [Trans Amer Math Soc](#), 1995, 347: 1533–1589
 - 41 De Philippis G, De Rosa A. The anisotropic min-max theory: Existence of anisotropic minimal and CMC surfaces. [Comm Pure Appl Math](#), 2024, 77: 3184–3226
 - 42 De Rosa A, Tione R. Regularity for graphs with bounded anisotropic mean curvature. [Invent Math](#), 2022, 230: 463–507
 - 43 del Pino M, Kowalczyk M, Pacard F. Moduli space theory for the Allen-Cahn equation in the plane. [Trans Amer Math Soc](#), 2013, 365: 721–766
 - 44 del Pino M, Kowalczyk M, Pacard F, et al. Multiple-end solutions to the Allen-Cahn equation in $\mathbb{R}^2$. [J Funct Anal](#), 2010, 258: 458–503
 - 45 del Pino M, Kowalczyk M, Wei J. The Toda system and clustering interfaces in the Allen-Cahn equation. [Arch Ration Mech Anal](#), 2008, 190: 141–187
 - 46 del Pino M, Kowalczyk M, Wei J. On De Giorgi’s conjecture in dimension $N \geq 9$. [Ann of Math \(2\)](#), 2011, 174: 1485–1569
 - 47 del Pino M, Kowalczyk M, Wei J. Entire solutions of the Allen-Cahn equation and complete embedded minimal surfaces of finite total curvature in $\mathbb{R}^3$. [J Differential Geom](#), 2013, 93: 67–131
 - 48 del Pino M, Kowalczyk M, Wei J, et al. Interface foliation near minimal submanifolds in Riemannian manifolds with positive Ricci curvature. [Geom Funct Anal](#), 2010, 20: 918–957
 - 49 Devyver B. On the finiteness of the Morse index for Schrödinger operators. [Manuscripta Math](#), 2012, 139: 249–271
 - 50 Dey A. A comparison of the Almgren-Pitts and the Allen-Cahn min-max theory. [Geom Funct Anal](#), 2022, 32: 980–1040
 - 51 Dey A. The Allen-Cahn equation on the complete Riemannian manifolds of finite volume. [Adv Math](#), 2024, 445: 109640
 - 52 Dipierro S, Serra J, Valdinoci E. Improvement of flatness for nonlocal phase transitions. [Amer J Math](#), 2020, 142: 1083–1160
 - 53 Dipierro S, Valdinoci E. Some perspectives on (non)local phase transitions and minimal surfaces. [Bull Math Sci](#), 2023, 13: 2330001
 - 54 Evans L C, Soner H M, Souganidis P E. Phase transitions and generalized motion by mean curvature. [Comm Pure Appl Math](#), 1992, 45: 1097–1123
 - 55 Farina A. Stable solutions of $-\Delta u = e^u$ on $\mathbb{R}^N$. [C R Math Acad Sci Paris](#), 2007, 345: 63–66
 - 56 Fei M, Lin F, Wang W, et al. Matrix-valued Allen-Cahn equation and the Keller-Rubinstein-Sternberg problem. [Invent Math](#), 2023, 233: 1–80
 - 57 Fei M, Wang W, Zhang P, et al. On the isotropic-nematic phase transition for the liquid crystal. [Peking Math J](#), 2018, 1: 141–219
 - 58 Figalli A, Serra J. On stable solutions for boundary reactions: A De Giorgi-type result in dimension $4 + 1$. [Invent Math](#), 2020, 219: 153–177
 - 59 Fischer J, Laux T, Simon T M. Convergence rates of the Allen-Cahn equation to mean curvature flow: A short proof based on relative entropies. [SIAM J Math Anal](#), 2020, 52: 6222–6233
 - 60 Fischer-Colbrie D. On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds. [Invent Math](#), 1985, 82: 121–132
 - 61 Florit-Simon E. Phase transitions with bounded index: Parallels to De Giorgi’s conjecture. [arXiv:2602.03136](#), 2026
 - 62 Florit-Simon E, Serra J. On stable solutions to the Allen-Cahn equation with bounded energy density in $\mathbb{R}^4$. [arXiv:2509.02739](#), 2025
 - 63 Fonseca I, Tartar L. The gradient theory of phase transitions for systems with two potential wells. [Proc Roy Soc Edinburgh Sect A](#), 1989, 111: 89–102
 - 64 Gaspar P, Guaraco M A M. The Allen-Cahn equation on closed manifolds. [Calc Var Partial Differential Equations](#), 2018, 57: 101
 - 65 Gaspar P, Guaraco M A M. The Weyl law for the phase transition spectrum and density of limit interfaces. [Geom](#)

- [Funct Anal](#), 2019, 29: 382–410
- 66 Ghoussoub N, Gui C. On a conjecture of De Giorgi and some related problems. [Math Ann](#), 1998, 311: 481–491
- 67 Ghoussoub N, Gui C. On De Giorgi’s conjecture in dimensions 4 and 5. [Ann of Math \(2\)](#), 2003, 157: 313–334
- 68 Giusti E. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. Monographs in Mathematics, vol. 80. Basel: Birkhäuser Verlag, 1984
- 69 Guaraco M A M. Min-max for phase transitions and the existence of embedded minimal hypersurfaces. [J Differential Geom](#), 2018, 108: 91–133
- 70 Gui C, Liu Y, Wei J. Two-end solutions to the Allen-Cahn equation in $\mathbb{R}^3$. [Adv Math](#), 2017, 320: 926–992
- 71 Gui C, Wang K, Wei J. Axially symmetric solutions of the Allen-Cahn equation with finite Morse index. [Trans Amer Math Soc](#), 2020, 373: 3649–3668
- 72 Halavati A, De Philippis G, Pigati A. Decay of excess for the abelian Higgs model. [arXiv:2405.14676](#), 2024
- 73 Hiesmayr F. Spectrum and index of two-sided Allen-Cahn minimal hypersurfaces. [Comm Partial Differential Equations](#), 2018, 43: 1541–1565
- 74 Hutchinson J E, Tonegawa Y. Convergence of phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory. [Calc Var Partial Differential Equations](#), 2000, 10: 49–84
- 75 Ilmanen T. Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke’s motion by mean curvature. [J Differential Geom](#), 1993, 38: 417–461
- 76 Irie K, Marques F C, Neves A. Density of minimal hypersurfaces for generic metrics. [Ann of Math \(2\)](#), 2018, 187: 963–972
- 77 Kagaya T. Convergence of the Allen-Cahn equation with a zero Neumann boundary condition on non-convex domains. [Math Ann](#), 2019, 373: 1485–1528
- 78 Kagaya T, Tonegawa Y. A singular perturbation limit of diffused interface energy with a fixed contact angle condition. [Indiana Univ Math J](#), 2018, 67: 1425–1437
- 79 Kohn R V, Sternberg P. Local minimisers and singular perturbations. [Proc Roy Soc Edinburgh Sect A](#), 1989, 111: 69–84
- 80 Kostant B. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory. [Adv Math](#), 1979, 34: 195–338
- 81 Kowalczyk M, Liu Y, Pacard F. The space of 4-ended solutions to the Allen-Cahn equation in the plane. [Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire](#), 2012, 29: 761–781
- 82 Kowalczyk M, Liu Y, Pacard F. Towards classification of multiple-end solutions to the Allen-Cahn equation in $\mathbb{R}^2$. [Netw Heterog Media](#), 2012, 7: 837–855
- 83 Kowalczyk M, Liu Y, Pacard F. The classification of four-end solutions to the Allen-Cahn equation on the plane. [Anal PDE](#), 2013, 6: 1675–1718
- 84 Kowalczyk M, Liu Y, Pacard F, et al. End-to-end construction for the Allen-Cahn equation in the plane. [Calc Var Partial Differential Equations](#), 2015, 52: 281–302
- 85 Laux T, Liu Y. Nematic-isotropic phase transition in liquid crystals: A variational derivation of effective geometric motions. [Arch Ration Mech Anal](#), 2021, 241: 1785–1814
- 86 Laux T, Simon T M. Convergence of the Allen-Cahn equation to multiphase mean curvature flow. [Comm Pure Appl Math](#), 2018, 71: 1597–1647
- 87 Le N Q. On the second inner variation of the Allen-Cahn functional and its applications. [Indiana Univ Math J](#), 2011, 60: 1843–1856
- 88 Li M M, Parise D, Sarnataro L. Boundary behavior of limit-interfaces for the Allen-Cahn equation on Riemannian manifolds with Neumann boundary condition. [Arch Ration Mech Anal](#), 2024, 248: 124
- 89 Lin F, Pan X B, Wang C. Phase transition for potentials of high-dimensional wells. [Comm Pure Appl Math](#), 2012, 65: 833–888
- 90 Lin F, Rivière T. Complex Ginzburg-Landau equations in high dimensions and codimension two area minimizing currents. [J Eur Math Soc \(JEMS\)](#), 1999, 1: 237–311
- 91 Liu Y. Phase transition of parabolic Ginzburg-Landau equation with potentials of high-dimensional wells. [Comm Pure Appl Math](#), 2025, 78: 1199–1247
- 92 Liu Y, Wei J. Classification of finite Morse index solutions to the elliptic sine-Gordon equation in the plane. [Rev Mat Iberoam](#), 2022, 38: 355–432
- 93 Mantoulidis C. Allen-Cahn min-max on surfaces. [J Differential Geom](#), 2021, 117: 93–135
- 94 Marques F C, Neves A. The min-max theory and the Willmore conjecture. [Ann of Math \(2\)](#), 2014, 179: 683–782
- 95 Marques F C, Neves A. Morse index and multiplicity of min-max minimal hypersurfaces. [Camb J Math](#), 2016, 4: 463–511
- 96 Marques F C, Neves A. Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature. [Invent Math](#),

- 2017, 209: 577–616
- 97 Marques F C, Neves A. Morse index of multiplicity one min-max minimal hypersurfaces. *Adv Math*, 2021, 378: 107527
- 98 Marques F C, Neves A, Song A. Equidistribution of minimal hypersurfaces for generic metrics. *Invent Math*, 2019, 216: 421–443
- 99 Mazet L. Stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^6$. arXiv:2405.14676, 2024
- 100 Millot V, Sire Y, Wang K. Asymptotics for the fractional Allen-Cahn equation and stationary nonlocal minimal surfaces. *Arch Ration Mech Anal*, 2019, 231: 1129–1216
- 101 Mizuno M, Tonegawa Y. Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions. *SIAM J Math Anal*, 2015, 47: 1906–1932
- 102 Modica L. Γ -convergence to minimal surfaces problem and global solutions of $\Delta u = 2(u^3 - u)$. In: Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1978). Bologna: Pitagora, 1979, 223–244
- 103 Modica L. A gradient bound and a Liouville theorem for nonlinear Poisson equations. *Comm Pure Appl Math*, 1985, 38: 679–684
- 104 Modica L. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. *Arch Ration Mech Anal*, 1987, 98: 123–142
- 105 Modica L. Monotonicity of the energy for entire solutions of semilinear elliptic equations. In: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, vol. II. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 2. Boston: Birkhäuser, 1989, 843–850
- 106 Modica L, Mortola S. Un esempio di Γ^- -convergenza. *Boll Unione Mat Ital B* (5), 1977, 14: 285–299
- 107 Mooney C, Yang Y. The anisotropic Bernstein problem. *Invent Math*, 2024, 235: 211–232
- 108 Moser J. Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential-an integrable system. In: Dynamical Systems, Theory and Applications (Rencontres, Battelle Res Inst, Seattle, Wash, 1974). Lecture Notes in Physics, vol. 38. Berlin-New York: Springer, 1975, 467–497
- 109 Nguyen H T, Wang S. Brakke regularity for the Allen-Cahn flow. arXiv:2010.12378, 2020
- 110 Nguyen H T, Wang S. Second-order estimates for transition layers and a curvature estimate for the parabolic Allen-Cahn. *Int Math Res Not IMRN*, 2024, 2024: 6759–6789
- 111 Pacard F, Ritoré M. From constant mean curvature hypersurfaces to the gradient theory of phase transitions. *J Differential Geom*, 2003, 64: 359–423
- 112 Pacard F, Wei J. Stable solutions of the Allen-Cahn equation in dimension 8 and minimal cones. *J Funct Anal*, 2013, 264: 1131–1167
- 113 Park J, Wang W, Zhang P, et al. On minimizers for the isotropic-nematic interface problem. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2017, 56: 41
- 114 Pigati A, Stern D. Minimal submanifolds from the abelian Higgs model. *Invent Math*, 2021, 223: 1027–1095
- 115 Pitts J T. Existence and Regularity of Minimal Surfaces on Riemannian Manifolds. Mathematical Notes, vol. 27. Princeton: Princeton Univ Press; Tokyo: Univ Tokyo Press, 1981
- 116 Savin O. Entire solutions to a class of fully nonlinear elliptic equations. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 2008, 7: 369–405
- 117 Savin O. Regularity of flat level sets in phase transitions. *Ann of Math* (2), 2009, 169: 41–78
- 118 Savin O. Some remarks on the classification of global solutions with asymptotically flat level sets. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2017, 56: 141
- 119 Savin O. Rigidity of minimizers in nonlocal phase transitions. *Anal PDE*, 2018, 11: 1881–1900
- 120 Savin O. Rigidity of minimizers in nonlocal phase transitions II. *Anal Theory Appl*, 2019, 35: 1–27
- 121 Savin O, Valdinoci E. Γ -convergence for nonlocal phase transitions. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2012, 29: 479–500
- 122 Schoen R. Estimates for stable minimal surfaces in three-dimensional manifolds. In: Seminar on Minimal Submanifolds. Annals of Mathematics Studies, vol. 103. Princeton: Princeton Univ Press, 1983, 111–126
- 123 Schoen R, Simon L. Regularity of stable minimal hypersurfaces. *Comm Pure Appl Math*, 1981, 34: 741–797
- 124 Schoen R, Simon L, Yau S T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. *Acta Math*, 1975, 134: 275–288
- 125 Serra J. The geometric structure of interfaces and free boundaries. *Eur Math Soc Mag*, 2021, 120: 8–15
- 126 Serra J. Nonlocal minimal surfaces: Recent developments, applications, and future directions. *SeMA J*, 2024, 81: 165–191
- 127 Simon L. Lectures on Geometric Measure Theory. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, vol. 3. Canberra: Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, 1983
- 128 Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann of Math* (2), 1968, 88: 62–105

- 129 Soner H M. Motion of a set by the curvature of its boundary. [J Differential Equations](#), 1993, 101: 313–372
- 130 Song A. Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in closed manifolds. *Ann of Math* (2), 2023, 197: 859–895
- 131 Sternberg P. The effect of a singular perturbation on nonconvex variational problems. [Arch Ration Mech Anal](#), 1988, 101: 209–260
- 132 Sternberg P, Zeimer W P. Local minimisers of a three-phase partition problem with triple junctions. [Proc Roy Soc Edinburgh Sect A](#), 1994, 124: 1059–1073
- 133 Sternberg P, Zumbrun K. Connectivity of phase boundaries in strictly convex domains. [Arch Ration Mech Anal](#), 1998, 141: 375–400
- 134 Tonegawa Y. On stable critical points for a singular perturbation problem. [Comm Anal Geom](#), 2005, 13: 439–459
- 135 Tonegawa Y, Wickramasekera N. Stable phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory. *J Reine Angew Math*, 2012, 668: 191–210
- 136 Wang K. A new proof of Savin’s theorem on Allen-Cahn equations. [J Eur Math Soc \(JEMS\)](#), 2017, 19: 2997–3051
- 137 Wang K. Stable and finite Morse index solutions of Toda system. [J Differential Equations](#), 2019, 268: 60–79
- 138 Wang K, Wei J. Second order estimate on transition layers. [Adv Math](#), 2019, 358: 106856
- 139 Wang K, Wei J. Finite Morse index implies finite ends. [Comm Pure Appl Math](#), 2019, 72: 1044–1119
- 140 Wang K, Wei J, Wu K. Quantitative stratification for the fractional Allen-Cahn equation and stationary nonlocal minimal surface. [arXiv:2503.16829](#), 2025
- 141 Wang T R, Zhou X. Recent progress on geometric variational theory (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2023, 53: 1287–1302 [王童瑞, 周鑫. 几何变分问题近期发展. *中国科学: 数学*, 2023, 53: 1287–1302]
- 142 Wang Z, Zhou X. Min-max minimal hypersurfaces with higher multiplicity. [J Differential Geom](#), 2025, 129: 225–260
- 143 Wickramasekera N. A general regularity theory for stable codimension 1 integral varifolds. [Ann of Math](#) (2), 2014, 179: 843–1007
- 144 Yau S T. Open problems in geometry. In: *Differential Geometry: Partial Differential Equations on Manifolds* (Los Angeles, CA, 1990). *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 54, Part 1. Providence: Amer Math Soc, 1993, 1–28
- 145 Zhou X. On the multiplicity one conjecture in min-max theory. *Ann of Math* (2), 2020, 192: 767–820

A regularity theory for transition layers in Allen-Cahn equations

Kelei Wang & Lubo Wang

Abstract The Allen-Cahn equation is a classical model describing phase transition phenomena. The regularity and convergence of transition layers (represented by the level set of the solution, for example, $\{u = 0\}$) are central problems in this field. In this paper, for the elliptic, singularly perturbed Allen-Cahn equation, we discuss the zeroth-order, first-order and second-order regularity of its transition layers as well as several applications of these regularity theories. For zeroth-order regularity, we give the convergence of transition layers in the sense of the Hausdorff distance with the help of the Γ -convergence theory or varifold theory, and describe the properties of the limit varifold. Regarding first-order regularity, we introduce results related to the uniform $C^{1,\theta}$ estimates of transition layers, such as the Allard type ε -regularity. For second-order regularity, we discuss the application of the reverse Lyapunov-Schmidt reduction method, and the connection between the uniform $C^{2,\theta}$ estimates of transition layers and the Liouville theorem for stable solutions of the Toda system. Finally, we present several applications of these regularity theories in problems, including the De Giorgi conjecture, the classification of solutions with finite Morse index, and the construction of infinitely many minimal surfaces in Riemannian manifolds.

Keywords Allen-Cahn equation, transition layer, regularity, minimal hypersurface

MSC(2020) 35B25, 35B45, 35J91, 49Q20

doi: 10.1360/SSM-2025-0335