中国科学: 数学 2026 年 第 56 卷 第 ? 期: 1 ∼ 16
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

2- 一致凸和一致光滑 Banach 空间上关于变分不等式问题的混合外梯度算法

胡绍涛[1], 王元恒[2*], 谢忠兵[3]

1. 重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331;
2. 浙江师范大学数学科学学院, 金华 321004;
3. 重庆理工大学数学科学学院, 重庆 400054

E-mail: shaotaohu@163.com, yhwang@zjnu.cn, xzbmath@163.com

收稿日期: 2025-08-24; 接受日期: 2025-09-20; 网络出版日期: 2025-10-20; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12301159 和 12171435) 资助项目

摘要 本文在 2- 一致凸和一致光滑 Banach 空间中提出一种结合了外梯度算法和 Tseng 型算法的混合型外梯度算法来解决变分不等式问题和不动点问题. 该算法中的两个步长均由 Armijo- 线性搜索过程来控制, 在参数满足恰当的假设条件下, 本文证明由该算法生成的序列强收敛到变分不等式问题和不动点问题的一个公共解.

关键词 2- 一致凸和一致光滑 Banach 空间 强收敛 外梯度算法 变分不等式 伪单调算子

MSC (2020) 主题分类 46B10, 46B20, 47H05

1 引言

设 $\mathscr{X}$ 是实 Banach 空间, 具有范数 $\|\cdot\|$, D 是 $\mathscr{X}$ 中非空闭凸子集. $\mathscr{X}^*$ 表示 $\mathscr{X}$ 的对偶空间, 对任意的 $x\in\mathscr{X}$, $f\in\mathscr{X}^*$, 配对 $\langle f,x\rangle$ 表示 $f(x)$. 经典的变分不等式问题就是找到一个点 $\bar{x}\in D$, 使得

$$\langle F\bar{x},x-\bar{x}\rangle\geqslant 0,\quad \forall\, x\in D, \tag{1.1}$$

其中 $F:\mathscr{X}\to\mathscr{X}^*$ 为非线性算子. 变分不等式问题 (1.1) 的解集记为 $\mathrm{VI}(D,F)$.

变分不等式问题在最优化理论、非线性规划、控制理论、工程力学等领域具有广泛的理论和实际应用背景. 为解决该问题, 大量学者深入研究并形成了一系列经典算法, 如投影算法、外梯度算法、投影压缩算法和次梯度外梯度算法等. 1976 年, Korpelevich [9] 在有限维空间 $\mathbb{R}^n$ 中提出了如下具有双投影型的外梯度算法:

$$\begin{cases} y_n=P_D(x_n-\tau Fx_n),\\ x_{n+1}=P_D(x_n-\tau Fy_n), \end{cases}$$

英文引用格式: Hu S T, Wang Y H, Xie Z B. A hybrid extragradient algorithm for solving variational inequality problems in 2-uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1–16, doi: 10.1360/SSM-2025-0204

© 2025《中国科学》杂志社

其中映射 $P_D:\mathbb{R}^n\to D\ (\subseteq\mathbb{R}^n)$ 是度量投影, 算子 $F:D\to\mathbb{R}^n$ 是单调和 L-Lipschitz 连续的, $\tau\in(0,\frac{1}{L})$. 2000 年, Tseng [14] 在 Hilbert 空间 H 中提出了具有如下形式的 Tseng 型算法:

$$\begin{cases} y_n = P_D(x_n-\tau Fx_n),\\ x_{n+1}=y_n-\tau(Fy_n-Fx_n), \end{cases}$$

其中算子 $F:D\to H$ 是单调和 L-Lipschitz 连续的, $\tau\in(0,\frac{1}{L})$. 以上两类算法作为解决变分不等式问题的经典算法, 至今仍受到学者们的广泛关注 (参见文献 [5,7,13,18]). 最近, Xie 等 [15] 将以上两类经典算法巧妙结合起来, 在 Hilbert 空间 H 中提出了如下具有双自适应步长的迭代算法 (算法 1). 他们证明了由算法 1 生成的序列强收敛到变分不等式问题解集 $\mathrm{VI}(D,F)$ 中的一个元素.

算法 1 具有双自适应步长的混合外梯度算法

初始化: 给定 $\tau_0>0$, $\mu\in(0,1)$, $\lambda\in(0,1)$. 任取 x_0,$x_1\in H$.

迭代步骤: 如下计算 x_{n+1}:

第 1 步 给定 x_{n-1} 和 x_n. 设

$$w_n=x_n+\alpha_n(x_n-x_{n-1}).$$

第 2 步 计算

$$\begin{aligned} y_n &= P_D(w_n-\tau_nFw_n),\\ z_n &= P_D(w_n-\tau_nFy_n), \end{aligned}$$

其中

$$\tau_{n+1}=\begin{cases} \min\left\{\mu\dfrac{\|w_n-y_n\|^2+\|z_n-y_n\|^2}{2\langle Fw_n-Fy_n,z_n-y_n\rangle},\tau_n\right\}, & \text{若 } \langle Fw_n-Fy_n,z_n-y_n\rangle>0,\\ \tau_n, & \text{其他.}\end{cases}$$

若 $w_n=y_n$ 或者 $Fy_n=0$, 则迭代停止, 且 y_n 是变分不等式问题的一个解. 否则, 进行第 3 步.

第 3 步 计算

$$x_{n+1}=\eta_nf(s_n)+(1-\eta_n)s_n,$$

其中 $s_n=z_n-\beta_n(Fz_n-Fy_n)$, 更新

$$\beta_{n+1}=\begin{cases} \min\left\{\lambda\dfrac{\|z_n-y_n\|}{\|Fz_n-Fy_n\|},\beta_n\right\}, & \text{若 } Az_n-Ay_n\neq 0,\\ \beta_n, & \text{其他.}\end{cases}$$

令 $n:=n+1$, 跳回到第 1 步.

受该文献启发, 本文继续以 Korpelevich 的外梯度算法和 Tseng 的算法为基础研究变分不等式问题, 提出一个新的具有外梯度算法和 Tseng 型算法的混合外梯度算法, 主要贡献如下.

• 研究空间从 Hilbert 空间推广到更一般的 2- 一致凸和一致光滑 Banach 空间, 大大拓宽了算法的应用范围.

• 首次采用双 Armijo- 线性搜索过程来控制步长. 该步长一方面比固定步长灵活性更高, 提升了算法的收敛速度; 另一方面同自适应步长相比避免了单调性的考虑, 只需要保证其有界性.

• 同不动点问题相结合, 联合解决了变分不等式问题和不动点问题的公共解问题.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节列出基本定义、性质和引理. 第 3 节提出新算法并进行收敛性分析. 第 4 节对本文的内容进行总结, 并针对本文工作提出可能的推广, 为下一步工作指出研究方向.

2 预备知识

用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集, $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\{x_n\}$ 表示无穷序列 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ 用 $x_n \to x$ 表示序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 x, $x_n \rightharpoonup x$ 表示序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x.

众所周知, $\mathscr{X}$ 是一致凸 (或者一致光滑) 的当且仅当其对偶空间 $\mathscr{X}^*$ 是一致光滑 (或一致凸) 的. 因此, 若 $\mathscr{X}$ 是 2- 一致凸和一致光滑 Banach 空间, 则 $\mathscr{X}^*$ 是 2- 一致光滑和一致凸的. 事实上, 我们熟知的 L_p 和 l_p 空间都是一致凸和一致光滑的, 其中 $1 < p < +\infty$. 更多关于一致凸、一致光滑 Banach 空间的性质详见文献 [3].

正规对偶映射 $J : \mathscr{X} \to 2^{\mathscr{X}^*}$ 定义为

$$J(x) = \{x^* \in \mathscr{X}^* : \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2, \|x^*\|_* = \|x\|\},$$

其中 $\|x^*\|_*$ 表示 x^* 在 $\mathscr{X}^*$ 中的范数. 如果 $\mathscr{X}$ 是光滑的, 则 J 是一对一的, 单值的. 更一般地, 如果 $\mathscr{X}$ 是 2- 一致凸和一致光滑的, 则 J 在 $\mathscr{X}$ 的有界子集上范 - 范一致连续, 更多细节详见文献 [1,4,11].

接下来介绍 Lyapunov 函数 $\phi : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to [0, +\infty)$, 其定义如下:

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle J(y), x\rangle + \|y\|^2, \quad \forall\, x, y \in \mathscr{X}.$$

易知, $\phi(x, y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2 \geqslant 0$. 若 $x = y$, 则 $\phi(x, y) = 0$. 称算子 $\Pi_D : \mathscr{X} \to D$ 为广义投影算子, 若

$$\bar{x} = \Pi_D(x) \;\Leftrightarrow\; \phi(\bar{x}, x) = \inf_{y \in D} \phi(y, x).$$

称 D 中的点 $\bar{x}$ 为点 x 的广义投影. 对于 Lyapunov 函数, 有以下性质:

(1) 两点等式

$$\phi(x_1, x_2) + \phi(x_2, x_1) = 2\langle x_1 - x_2, J(x_1) - J(x_2)\rangle, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathscr{X};$$

(2) 三点等式

$$\phi(x_1, x_3) = \phi(x_1, x_2) + \phi(x_2, x_3) + 2\langle x_1 - x_2, J(x_2) - J(x_3)\rangle, \quad \forall\, x_1, x_2, x_3 \in \mathscr{X}.$$

更多细节详见文献 [1].

若 $\mathscr{X}$ 是实一致凸 Banach 空间, 双函数 $V : \mathscr{X} \times \mathscr{X}^* \to [0, +\infty)$ 定义为

$$V(x, x^*) = \|x\|^2 - 2\langle x, x^*\rangle + \|x^*\|_*^2, \quad \forall\, x \in \mathscr{X}, \quad x^* \in \mathscr{X}^*,$$

则

$$V(x,x^*)=\phi(x,J^{-1}(x^*)),\quad \forall x\in\mathscr{X},\quad x^*\in\mathscr{X}^*, \tag{2.1}$$

$$V(x,x^*)+2\langle J^{-1}(x^*)-x,r^*\rangle\leqslant V(x,x^*+r^*),\quad \forall x\in\mathscr{X},\quad x^*,r^*\in\mathscr{X}^*, \tag{2.2}$$

且 V 关于第二个变量是凸的, 即

$$V\left(x,\sum_{i=1}^{N}a_ix_i^*\right)\leqslant\sum_{i=1}^{N}a_iV(x,x_i^*),\quad \forall x\in\mathscr{X}, \tag{2.3}$$

其中 $\{x_i^*\}_{i=1}^N\subset\mathscr{X}^*$, $\{a_i\}_{i=1}^N\subset(0,1)$, $\sum_{i=1}^N a_i=1$. 更多细节详见文献 [1,7].

称算子 $F:\mathscr{X}\to\mathscr{X}^*$ 为

(1) 单调的, 若

$$\langle Fx_1-Fx_2,x_1-x_2\rangle\geqslant 0,\quad \forall x_1,x_2\in\mathscr{X};$$

(2) 伪单调的, 若

$$\langle F\bar{x},x-\bar{x}\rangle\geqslant 0\Rightarrow\langle Fx,x-\bar{x}\rangle\geqslant 0,\quad \forall x,\bar{x}\in\mathscr{X};$$

(3) L-Lipschitz 连续的, 若存在常数 $L>0$ (若 $0<L<1$, 称 F 为为压缩映射; 若 $L=1$, 称 F 为为非扩张映射) 使得

$$\|Fx_1-Fx_2\|\leqslant L\|x_1-x_2\|,\quad \forall x_1,x_2\in\mathscr{X};$$

(4) 弱序列连续的, 若任给 $\mathscr{X}$ 中的序列 $\{x_n\}$, 当 $x_n\rightharpoonup\bar{x}$ 时, 有 $Fx_n\rightharpoonup F\bar{x}$ $(n\to\infty)$.

设 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 是一个映射, $\mathrm{Fix}(T)=\{x\in\mathscr{X}:Tx=x\}$ 表示 T 的不动点集. 称点 $\bar{x}$ 是 T 的渐近不动点, 如果 $\mathscr{X}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\rightharpoonup\bar{x}$, 使得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$. T 的渐近不动点集用 $\widehat{\mathrm{Fix}}(T)$ 表示. 称 $\bar{x}$ 为 T 的强渐近不动点, 如果 $\mathscr{X}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\to\bar{x}$, 使得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$. T 的强渐近不动点集用 $\widetilde{\mathrm{Fix}}(T)$ 表示. 显然, $\mathrm{Fix}(T)\subset\widetilde{\mathrm{Fix}}(T)\subset\widehat{\mathrm{Fix}}(T)$. 基于以上几类不动点, 称映射 T 为

(1) 拟非扩张的, 如果 $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$,

$$\phi(\bar{x},Tx)\leqslant\phi(\bar{x},x),\quad \forall x\in\mathscr{X},\quad \bar{x}\in\mathrm{Fix}(T);$$

(2) 相对非扩张的, 如果 $\mathrm{Fix}(T)\neq\emptyset$, $\widehat{\mathrm{Fix}}(T)=\mathrm{Fix}(T)$, 且

$$\phi(\bar{x},Tx)\leqslant\phi(\bar{x},x),\quad \forall x\in\mathscr{X},\quad \bar{x}\in\mathrm{Fix}(T).$$

更多细节详见文献 [12].

为了证明主要定理, 需要下述引理.

引理 2.1 [8] 假设 D 是光滑 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 中的凸子集, $x\in\mathscr{X}$, $z\in D$. 则

(1) $z=\Pi_D(x)\Leftrightarrow\langle J(x)-J(z),y-z\rangle\leqslant 0$, $\forall y\in D$;

(2) $\phi(y,\Pi_D(x))+\phi(\Pi_D(x),x)\leqslant\phi(y,x)$, $\forall y\in D$.

引理 2.2 [8] 假设 $\mathscr{X}$ 是一致凸和一致光滑 Banach 空间, $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的两个序列. 如果 $\lim_{n\to\infty}\phi(x_n,y_n)=0$, $\{x_n\}$ 或者 $\{y_n\}$ 有界, 则 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

引理 2.3 [2] 假设 $\mathscr{X}$ 是 2- 一致凸 Banach 空间. 则存在 $\gamma \geqslant 1$, 使得

$$\phi(x,y) \geqslant \frac{1}{\gamma}\|x-y\|^2, \quad \forall\, x,y \in \mathscr{X}.$$

引理 2.4 [17] 假设实数 $q \geqslant 1$, $r > 0$. 则 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 是一致凸的当且仅当存在连续严格增加的凸函数 $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, g(0) = 0$, 使得对所有的 $x, y \in B_r$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 有

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^q \leqslant \lambda\|x\|^q + (1-\lambda)\|y\|^q - W_q(\lambda)g(\|x-y\|),$$

其中 $W_q(\lambda) = \lambda^q(1-\lambda) + \lambda(1-\lambda)^q$, $B_r = \{x \in \mathscr{X} : \|x\| \leqslant r\}$.

引理 2.5 [10] 假设 $\{u_n\}$ 为非负实数序列, 存在 $\{u_n\}$ 的子列 $\{u_{n_i}\}$, 使得对任意的 $i \in \mathbb{N}$ 有 $u_{n_i} < u_{n_i+1}$. 则存在非递减序列 $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$, 使得 $\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$ 且对任意 (足够大) 的 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$u_{m_k} \leqslant u_{m_k+1}, \quad u_k \leqslant u_{m_k+1},$$

其中 $m_k = \max\{j \mid j \leqslant k : u_j < u_{j+1}\}$.

引理 2.6 [16] 假设 $\{a_n\}$ 是非负实数列且满足 $a_{n+1} \leqslant (1-\alpha_n)a_n + \alpha_n b_n + \gamma_n$, $\forall\, n \geqslant 1$. 若

(1) $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;

(2) $\limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant 0$;

(3) $\gamma_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$,

则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3 主要结果

设 $\mathscr{X}$ 是 2- 一致凸和一致光滑 Banach 空间, D 是 $\mathscr{X}$ 中非空闭凸子集. 假设

(3a) $F: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是伪单调的、L-Lipschitz 连续和弱序列连续的;

(3b) $T: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是相对非扩张映射;

(3c) $\mathrm{VI}(D,F) \cap \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$;

(3d) $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是 $(0,1)$ 上的序列, 且满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$.

在以上假设条件下, 我们给出如下算法 (算法 2).

算法 2 具有双线性搜索步长的混合外梯度算法

初始值: 任取 $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$, $0 < l_1, l_2 < 1$, $\tau > \sigma > 0$. 令 $s_0, s_1 \in \mathscr{X}$.

第 1 步 给定 s_n, 计算

$$u_n = \Pi_D J^{-1}(J(s_n) - \tau_n F s_n).$$

若 $u_n = s_n$ 或者 $Fs_n = 0$, 则迭代停止, 此时 u_n 是变分不等式问题的一个解. 否则, 进行迭代第 2 步.

第 2 步 计算

$$v_n = \Pi_D J^{-1}(J(s_n) - \tau_n F u_n),$$

其中 $\tau_n = \tau l_1^{m_n}$, m_n 是最小的非负整数 m, 使得

$$\tau l_1^m \langle Fs_n - Fu_n, v_n - u_n\rangle \leqslant \frac{\alpha}{2}(\phi(u_n, s_n) + \phi(v_n, u_n)). \tag{3.1}$$

第 3 步 计算

$$r_n = J^{-1}(J(v_n) - \sigma_n(Fv_n - Fu_n)),$$

其中 $\sigma_n = \sigma l_2^{k_n}$, k_n 是最小的非负整数 k, 使得

$$\sigma l_2^k \langle Fv_n - Fu_n, v_n - r_n\rangle \leqslant \frac{\beta}{2}(\phi(v_n, u_n) + \phi(r_n, v_n)). \tag{3.2}$$

第 4 步 计算

$$s_{n+1} = J^{-1}(a_n J(s_0) + (1-a_n)(b_n J(r_n) + (1-b_n)J(Tr_n))).$$

令 $n := n+1$, 回到迭代第 1 步.

接下来, 对该算法生成的迭代序列 $\{s_n\}$ 进行收敛性分析.

引理 3.1 假设条件 (3a) 和 (3c) 成立, 则分别由 (3.1) 和 (3.2) 定义的序列 $\{\tau_n\}$ 和 $\{\sigma_n\}$ 是有意义的, 且

$$\frac{\alpha l_1}{\gamma L} < \tau_n \leqslant \tau, \quad \frac{\beta l_2}{\gamma L} < \sigma_n \leqslant \sigma.$$

证明 首先, 证明由 (3.1) 定义的序列 $\{\tau_n\}$ 是有意义的. 如果 $\langle Fs_n - Fu_n, v_n - u_n\rangle \leqslant 0$, 则对任意的 $m \in \mathbb{N}$, (3.1) 恒成立, 此时取 $m_n = 0$, 于是 $\tau_n = \tau$. 如果 $\langle Fs_n - Fu_n, v_n - u_n\rangle > 0$, 考虑两种情形.

情形 1 若 $s_n \in \mathrm{VI}(D, F)$, 则对任意的 $s \in D$, 有 $\langle Fs_n, s - s_n\rangle \geqslant 0$, 即 $\langle J(s_n) - \tau_n Fs_n - J(s_n), s - s_n\rangle \leqslant 0$. 由引理 2.1 可知 $s_n = \Pi_D J^{-1}(J(s_n) - \tau_n Fs_n)$, 于是 $u_n = s_n$, 因此 $Fs_n - Fu_n = \phi(u_n, s_n) = 0$. 于是, 对任意的 $m \in \mathbb{N}$, (3.1) 恒成立, 此时 $\tau_n = \tau$.

情形 2 若 $s_n \notin \mathrm{VI}(D, F)$, 利用反证法, 假设对任意的 $m \in \mathbb{N}$,

$$\tau l_1^m \langle Fs_n - Fu_m, v_m - u_m\rangle > \frac{\alpha}{2}(\phi(u_m, s_n) + \phi(v_m, u_m)) \tag{3.3}$$

成立, 其中 $u_m = \Pi_D J^{-1}(J(s_n) - \tau l_1^m Fs_n)$, $v_m = \Pi_D J^{-1}(J(s_n) - \tau l_1^m Fu_m)$. 根据引理 2.3, (3.3) 两边分别满足

$$\begin{aligned}
&\tau l_1^m \langle Fs_n - Fu_m, v_m - u_m\rangle \leqslant \tau l_1^m \|Fs_n - Fu_m\|\|v_m - u_m\|,\\
&\frac{\alpha}{2}(\phi(u_m, s_n) + \phi(v_m, u_m)) \geqslant \frac{\alpha}{2\gamma}(\|u_m - s_n\|^2 + \|v_m - u_m\|^2) \geqslant \frac{\alpha}{\gamma}\|u_m - s_n\|\|v_m - u_m\|,
\end{aligned}$$

将此代入 (3.3) 得

$$\tau l_1^m \|Fs_n - Fu_m\| > \frac{\alpha}{\gamma}\|u_m - s_n\|, \tag{3.4}$$

即

$$\|Fs_n - Fu_m\| > \frac{\alpha}{\gamma\tau l_1^m}\|u_m - s_n\|. \tag{3.5}$$

再考虑两种情形.

情形 2.1 若 $s_n \in D$, 则 $s_n \in D \setminus \mathrm{VI}(D,F)$, 且 $s_n = \Pi_D(s_n) = \Pi_D J^{-1}(J(s_n))$. 由 $l_1 \in (0,1)$ 可知 $\lim_{m\to\infty} \tau l_1^m F s_n = 0$, 再利用 J^{-1} 在 $\mathscr{X}^*$ 的有界子集上范 - 范一致连续可得

$$\lim_{m\to\infty} (J^{-1}J(s_n) - J^{-1}(J(s_n) - \tau l_1^m F s_n)) = 0.$$

进一步地, 由投影算子 Π_D 连续可得

$$\lim_{m\to\infty} (\Pi_D(s_n) - \Pi_D J^{-1}(J(s_n) - \tau l_1^m F s_n)) = 0,$$

即

$$\lim_{m\to\infty} \|s_n - u_m\| = 0. \tag{3.6}$$

于是, 由 F 连续可得

$$\lim_{m\to\infty} \|Fs_n - Fu_m\| = 0,$$

再对 (3.5) 两端关于 m 取极限可得

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\|u_m - s_n\|}{\tau l_1^m} = 0.$$

进一步地, 因为 $J(\lambda s) = \mathrm{sgn}(\lambda)|\lambda| J(s)$ ($s \in \mathscr{X}, \lambda \in \mathbb{R}$, 详见文献 [19]), 根据 J 在 $\mathscr{X}$ 的有界子集上范 - 范一致连续可知

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\|J(u_m) - J(s_n)\|_*}{\tau l_1^m} = 0. \tag{3.7}$$

事实上, 根据 $\{u_m\}$ 的表达式, 由引理 2.1 可得

$$\langle J(s_n) - \tau l_1^m F s_n - J(u_m), s - u_m\rangle \leqslant 0, \quad \forall\, s \in D.$$

于是

$$\langle Fs_n, s - s_n\rangle \geqslant \left\langle \frac{J(s_n) - J(u_m)}{\tau l_1^m}, s - u_m \right\rangle + \langle Fs_n, u_m - s_n\rangle, \quad \forall\, s \in D. \tag{3.8}$$

由 (3.6) 和 (3.7), 对 (3.8) 两端关于 m 取极限可得

$$\langle Fs_n, s - s_n\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, s \in D.$$

因此 $s_n \in \mathrm{VI}(D,F)$, 与 $s_n \notin \mathrm{VI}(D,F)$ 矛盾, 故假设不成立.

情形 2.2 若 $s_n \notin D$, 由 Π_D 连续可知

$$\lim_{m\to\infty} \|s_n - u_m\| = \lim_{m\to\infty} \|s_n - \Pi_D(J^{-1}(J(s_n) - \tau l_1^m F s_n))\| = \|s_n - \Pi_D s_n\| > 0, \tag{3.9}$$

再根据 F 连续可得

$$\lim_{m\to\infty} \tau l_1^m \|Fs_n - Fu_m\| = 0. \tag{3.10}$$

由 (3.9) 和 (3.10), 对 (3.4) 两端关于 m 取极限可得 $0 \geqslant \frac{\alpha}{\gamma}\|s_n - \Pi_D s_n\| > 0$, 矛盾, 故假设也不成立.

综上所述, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 (3.1) 成立. 因此, 由 (3.1) 定义的序列 $\{\tau_n\}$ 有意义.

现在, 估计序列 $\{\tau_n\}$ 的界. 显然, $0 < \tau_n \leqslant \tau$. 若 $\langle Fs_n - Fu_n, v_n - u_n\rangle \leqslant 0$, 则对任意的 $m \in \mathbb{N}$, (3.1) 恒成立, 此时 $\tau_n = \tau$. 若 $\langle Fs_n - Fu_n, v_n - u_n\rangle > 0$, 则由 (3.1) 可知

$$\frac{\tau_n}{l_1}\langle Fs_n - Fu_n, v_n - u_n\rangle > \frac{\alpha}{2}(\phi(u_n, s_n) + \phi(v_n, u_n)). \tag{3.11}$$

注意到, 上式两端分别满足

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau_n}{l_1}\langle Fs_n - Fu_n, v_n - u_n\rangle \leqslant \frac{\tau_n L}{l_1}\|s_n - u_n\|\|v_n - u_n\|,\\
&\frac{\alpha}{2}(\phi(u_n, s_n) + \phi(v_n, u_n)) \geqslant \frac{\alpha}{\gamma}\|u_n - s_n\|\|v_n - u_n\|,
\end{aligned}$$

将此代入 (3.11) 可得 $\tau_n > \frac{\alpha l_1}{\gamma L}$. 因此, $\frac{\alpha l_1}{\gamma L} < \tau_n \leqslant \tau$.

接下来, 证明由 (3.2) 定义的序列 $\{\sigma_n\}$ 是有意义的. 如果 $\langle Fv_n - Fu_n, v_n - r_n\rangle \leqslant 0$, 则对任意的 $k \in \mathbb{N}$, (3.2) 恒成立, 此时取 $k_n = 0$, 于是 $\sigma_n = \sigma$. 如果 $\langle Fv_n - Fu_n, v_n - r_n\rangle > 0$, 考虑两种情形.

情形 1 若 $s_n \in \mathrm{VI}(D, F)$, 则 $u_n = s_n$, 进一步可知 $v_n = \Pi_D J^{-1}(J(s_n) - \tau_n Fs_n) = u_n = s_n$, 因此 $Fv_n - Fu_n = \phi(v_n, u_n) = 0$. 于是, 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, (3.2) 恒成立, 此时 $\sigma_n = \sigma$.

情形 2 若 $s_n \notin \mathrm{VI}(D, F)$, 利用反证法, 假设对任意的 $k \in \mathbb{N}$,

$$\sigma l_2^k\langle Fv_n - Fu_n, v_n - r_k\rangle > \frac{\beta}{2}(\phi(v_n, u_n) + \phi(r_k, v_n)) \tag{3.12}$$

成立, 其中 $r_k = J^{-1}(J(v_n) - \sigma l_2^k(Fv_n - Fu_n))$. 注意到, (3.12) 两边分别满足

$$\begin{aligned}
&\sigma l_2^k\langle Fv_n - Fu_n, v_n - r_k\rangle \leqslant \sigma l_2^k\|Fv_n - Fu_n\|\|v_n - r_k\|,\\
&\frac{\beta}{2}(\phi(v_n, u_n) + \phi(r_k, v_n)) \geqslant \frac{\beta}{2\gamma}(\|v_n - u_n\|^2 + \|r_k - v_n\|^2) \geqslant \frac{\beta}{\gamma}\|v_n - u_n\|\|r_k - v_n\|,
\end{aligned}$$

将此代入 (3.12) 得

$$\sigma l_2^k\|Fv_n - Fu_n\| > \frac{\beta}{\gamma}\|v_n - u_n\|.$$

当 $k \to \infty$ 时, 对上式取极限可得 $0 \geqslant \frac{\beta}{\gamma}\|v_n - u_n\|$. 这说明 $v_n = u_n$, 进一步可得 $s_n = v_n = u_n$. 于是 $s_n \in \mathrm{VI}(D, F)$, 与 $s_n \notin \mathrm{VI}(D, F)$ 矛盾, 故假设不成立.

综上所述, 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 (3.2) 成立. 因此, 由 (3.2) 定义的序列 $\{\sigma_n\}$ 有意义. 类似于对 $\{\tau_n\}$ 的界的估计, 也可得到 $\frac{\beta l_2}{\gamma L} < \sigma_n \leqslant \sigma$. □

引理 3.2 假设条件 (3a) 和 (3c) 成立. 若 $y \in \mathrm{VI}(D, F)$, $\frac{\sigma_n}{\tau_n} < 1$, 则

$$\phi(y, r_n) \leqslant \phi(y, s_n) - (1 - \alpha - \beta)\phi(v_n, u_n) - (1 - \beta)\phi(r_n, v_n) - \left(1 - \alpha - \frac{\sigma_n}{\tau_n}\right)\phi(u_n, s_n).$$

证明 根据函数 ϕ 的定义可得

$$\begin{aligned}
\phi(y, r_n) &= \|y\|^2 - 2\langle J(r_n), y\rangle + \|r_n\|^2\\
&= \|y\|^2 - \|r_n\|^2 - 2\langle J(r_n), y - r_n\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|y\|^2 - \|r_n\|^2 - 2\langle J(v_n) - \sigma_n(Fv_n - Fu_n), y - r_n\rangle \\
&= \phi(y, v_n) - \phi(r_n, v_n) + 2\langle J(v_n), y\rangle - 2\langle J(v_n), r_n\rangle - 2\langle J(v_n) - \sigma_n(Fv_n - Fu_n), y - r_n\rangle \\
&= \phi(y, v_n) - \phi(r_n, v_n) + 2\sigma_n\langle Fv_n - Fu_n, y - r_n\rangle \\
&= \phi(y, v_n) - \phi(r_n, v_n) + 2\sigma_n\langle Fv_n - Fu_n, y - v_n\rangle + 2\sigma_n\langle Fv_n - Fu_n, v_n - r_n\rangle. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

由 $y \in \mathrm{VI}(D, F)$, $v_n \in D$ 知 $\langle Fy, v_n - y\rangle \geqslant 0$, 再由算子 F 伪单调可得 $\langle Fv_n, v_n - y\rangle \geqslant 0$, 将此代入 (3.13) 得

$$
\phi(y, r_n) \leqslant \phi(y, v_n) - \phi(r_n, v_n) - 2\sigma_n\langle Fu_n, y - v_n\rangle + 2\sigma_n\langle Fv_n - Fu_n, v_n - r_n\rangle. \qquad (3.14)
$$

记 $x_n := J^{-1}(J(s_n) - \tau_n Fu_n)$, 根据引理 2.1 可知

$$
\begin{aligned}
\phi(y, v_n) &\leqslant \phi(y, x_n) - \phi(v_n, x_n) \\
&= \|y\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\langle Jx_n, y\rangle - \|v_n\|^2 - \|x_n\|^2 + 2\langle Jx_n, v_n\rangle \\
&= \|y\|^2 - \|v_n\|^2 - 2\langle J(s_n) - \tau_n Fu_n, y - v_n\rangle \\
&= \phi(y, u_n) - \phi(v_n, u_n) + 2\langle J(u_n), y\rangle - 2\langle J(u_n), v_n\rangle - 2\langle J(s_n) - \tau_n Fu_n, y - v_n\rangle \\
&= \phi(y, u_n) - \phi(v_n, u_n) + 2\langle J(u_n), y - v_n\rangle - 2\langle J(s_n) - \tau_n Fu_n, y - v_n\rangle \\
&= \phi(y, u_n) - \phi(v_n, u_n) - 2\langle J(s_n) - \tau_n Fu_n - J(u_n), y - v_n\rangle. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

将 (3.15) 代入 (3.14) 可得

$$
\begin{aligned}
\phi(y, r_n) &\leqslant \phi(y, u_n) - \phi(v_n, u_n) - 2\langle J(s_n) - \tau_n Fu_n - J(u_n), y - v_n\rangle \\
&\quad - \phi(r_n, v_n) - 2\sigma_n\langle Fu_n, y - v_n\rangle + 2\sigma_n\langle Fv_n - Fu_n, v_n - r_n\rangle \\
&= \phi(y, u_n) - \phi(v_n, u_n) - \phi(r_n, v_n) \\
&\quad - 2\langle J(s_n) - J(u_n) + (\sigma_n - \tau_n)Fu_n, y - v_n\rangle + 2\sigma_n\langle Fv_n - Fu_n, v_n - r_n\rangle. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

接下来估计 $\langle J(s_n) - J(u_n) + (\sigma_n - \tau_n)Fu_n, y - v_n\rangle$. 注意到

$$
\begin{aligned}
&\langle J(s_n) - J(u_n) + (\sigma_n - \tau_n)Fu_n, y - v_n\rangle \\
&= \langle J(s_n) - J(u_n), y - u_n\rangle + \langle J(s_n) - J(u_n), u_n - v_n\rangle \\
&\quad + (\sigma_n - \tau_n)\langle Fu_n, y - u_n\rangle + (\sigma_n - \tau_n)\langle Fu_n, u_n - v_n\rangle \\
&= \langle J(s_n) - J(u_n), y - u_n\rangle + \langle J(s_n) - J(u_n) - \tau_n Fs_n, u_n - v_n\rangle + \tau_n\langle Fs_n, u_n - v_n\rangle \\
&\quad + (\sigma_n - \tau_n)\langle Fu_n, y - u_n\rangle + (\sigma_n - \tau_n)\langle Fu_n, u_n - v_n\rangle. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

由 $y \in \mathrm{VI}(D, F)$, $u_n \in D$ 知 $\langle Fy, u_n - y\rangle \geqslant 0$, 再由算子 F 伪单调可知 $\langle Fu_n, u_n - y\rangle \geqslant 0$. 另外, 由 $\{u_n\}$ 的表达式和 $v_n \in D$ 可得

$$
\langle J(s_n) - \tau_n Fs_n - J(u_n), v_n - u_n\rangle \leqslant 0.
$$

因为 $\frac{\sigma_n}{\tau_n} < 1$, 将以上结论代入 (3.17) 可知

$$
\langle J(s_n) - J(u_n) + (\sigma_n - \tau_n)Fu_n, y - v_n\rangle
$$

$$\begin{aligned}
&\geqslant \langle J(s_n)-J(u_n), y-u_n\rangle + \tau_n\langle Fs_n, u_n-v_n\rangle + (\sigma_n-\tau_n)\langle Fu_n, u_n-v_n\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\phi(y,u_n)+\phi(u_n,s_n)-\phi(y,s_n)) \\
&\quad + \tau_n\langle Fs_n-Fu_n, u_n-v_n\rangle + \sigma_n\langle Fu_n, u_n-v_n\rangle. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

将 (3.18) 代入 (3.16), 并根据 (3.1) 和 (3.2) 可得

$$\begin{aligned}
\phi(y,r_n) &\leqslant \phi(y,u_n)-\phi(v_n,u_n)-\phi(r_n,v_n)-\phi(y,u_n)-\phi(u_n,s_n)+\phi(y,s_n) \\
&\quad -2\tau_n\langle Fs_n-Fu_n, u_n-v_n\rangle - 2\sigma_n\langle Fu_n, u_n-v_n\rangle + 2\sigma_n\langle Fv_n-Fu_n, v_n-r_n\rangle \\
&= \phi(y,s_n)-\phi(v_n,u_n)-\phi(r_n,v_n)-\phi(u_n,s_n)+2\tau_n\langle Fs_n-Fu_n, v_n-u_n\rangle \\
&\quad + 2\sigma_n\langle Fv_n-Fu_n, v_n-r_n\rangle + 2\sigma_n\langle Fu_n, v_n-u_n\rangle \\
&\leqslant \phi(y,s_n)-\phi(v_n,u_n)-\phi(r_n,v_n)-\phi(u_n,s_n)+\alpha(\phi(u_n,s_n)+\phi(v_n,u_n)) \\
&\quad + \beta(\phi(v_n,u_n)+\phi(r_n,v_n))+2\sigma_n\langle Fu_n, v_n-u_n\rangle \\
&= \phi(y,s_n)-(1-\alpha-\beta)\phi(v_n,u_n)-(1-\beta)\phi(r_n,v_n) \\
&\quad -(1-\alpha)\phi(u_n,s_n)+2\sigma_n\langle Fu_n, v_n-u_n\rangle. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

下面估计 $\langle Fu_n, v_n-u_n\rangle$. 由 $\{v_n\}$ 的表达式和 $u_n\in D$ 可知

$$\langle J(s_n)-\tau_nFu_n-J(v_n), u_n-v_n\rangle \leqslant 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\phi(v_n,s_n)+2\tau_n\langle Fu_n, v_n-u_n\rangle \\
&\quad = \phi(u_n,s_n)-\phi(u_n,v_n)-2\langle J(v_n)-J(s_n), u_n-v_n\rangle + 2\tau_n\langle Fu_n, v_n-u_n\rangle \\
&\quad = \phi(u_n,s_n)-\phi(u_n,v_n)+2\langle J(s_n)-J(v_n)-\tau_nFu_n, u_n-v_n\rangle \\
&\quad \leqslant \phi(u_n,s_n)-\phi(u_n,v_n),
\end{aligned}$$

进一步可得

$$\langle Fu_n, v_n-u_n\rangle \leqslant \frac{1}{2\tau_n}(\phi(u_n,s_n)-\phi(u_n,v_n)-\phi(v_n,s_n)) \leqslant \frac{1}{2\tau_n}\phi(u_n,s_n). \qquad (3.20)$$

将 (3.20) 代入 (3.19) 可知

$$\begin{aligned}
\phi(y,r_n) &\leqslant \phi(y,s_n)-(1-\alpha-\beta)\phi(v_n,u_n)-(1-\beta)\phi(r_n,v_n)-(1-\alpha)\phi(u_n,s_n)+\frac{\sigma_n}{\tau_n}\phi(u_n,s_n) \\
&= \phi(y,s_n)-(1-\alpha-\beta)\phi(v_n,u_n)-(1-\beta)\phi(r_n,v_n)-\left(1-\alpha-\frac{\sigma_n}{\tau_n}\right)\phi(u_n,s_n).
\end{aligned}$$

证毕. □

引理 3.3 假设条件 (3a)–(3d) 成立. 若 $y\in \mathrm{VI}(D,F)\cap \mathrm{Fix}(T)$, $\frac{\sigma}{l_1}\leqslant \frac{\alpha(1-\alpha)}{\gamma L}$, 则由算法 2 生成的序列 $\{s_n\}$ 有界.

证明 由引理 3.1 和 $0<\frac{\sigma}{l_1}\leqslant\frac{\alpha(1-\alpha)}{\gamma L}$ 可知

$$\frac{\sigma_n}{\tau_n}<\frac{\sigma\gamma L}{\alpha l_1}\leqslant 1-\alpha.$$

因此, 由引理 3.2 可知

$$\phi(y, r_n) \leqslant \phi(y, s_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

再根据 (2.1), (2.3) 和相对非扩张映射的定义可知

$$\begin{aligned}
\phi(y, s_{n+1}) &= V(y, a_n J(s_0) + (1-a_n)(b_n J(r_n) + (1-b_n)J(Tr_n))) \\
&\leqslant a_n V(y, J(s_0)) + (1-a_n)b_n V(y, J(r_n)) + (1-a_n)(1-b_n)V(y, J(Tr_n)) \\
&= a_n \phi(y, s_0) + (1-a_n)b_n \phi(y, r_n) + (1-a_n)(1-b_n)\phi(y, Tr_n) \\
&\leqslant a_n \phi(y, s_0) + (1-a_n)b_n \phi(y, r_n) + (1-a_n)(1-b_n)\phi(y, r_n) \\
&= a_n \phi(y, s_0) + (1-a_n)\phi(y, r_n) \\
&\leqslant a_n \phi(y, s_0) + (1-a_n)\phi(y, s_n) \\
&\leqslant \max\{\phi(y, s_0), \phi(y, s_n)\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

由数学归纳法可知

$$\phi(y, s_n) \leqslant \max\{\phi(y, s_0), \phi(y, s_1)\}.$$

因此 $\{\phi(y, s_n)\}$ 有界, 从而 $\{s_n\}$ 有界. 我们还可得到 $\{r_n\}$, $\{v_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 有界. □

下述引理类似于文献 [6, 引理 14], 这里略去证明细节.

引理 3.4 假设条件 (3a)–(3d) 成立. 若算法 2 生成的序列 $\{s_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\|s_n - u_n\| = 0$, 且存在 $\{s_n\}$ 的一个子列弱收敛到 $z \in \mathscr{X}$, 则 $z \in \mathrm{VI}(D, F)$.

定理 3.1 假设 $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$, $0 < l_1, l_2 < 1$, $\tau > \sigma > 0$, 条件 (3a)–(3d) 成立. 若 $\frac{\sigma}{l_1} \leqslant \frac{\alpha(1-\alpha)}{\gamma L}$, 则由算法 2 生成的序列 $\{s_n\}$ 强收敛到 $x = \Pi_{\mathrm{VI}(D,F)\cap \mathrm{Fix}(T)}(s_0)$.

证明 记 $z_n := J^{-1}(b_n J(r_n) + (1-b_n)J(Tr_n))$. 由 (2.1), (2.3) 和引理 2.4 可知

$$\begin{aligned}
\phi(x, s_{n+1}) &= V(x, a_n J(s_0) + (1-a_n)J(z_n)) \\
&\leqslant a_n V(x, J(s_0)) + (1-a_n)V(x, J(z_n)) \\
&= a_n \phi(x, s_0) + (1-a_n)\big(\|x\|^2 + \|b_n J(r_n) + (1-b_n)J(Tr_n)\|_*^2 - 2\langle x, b_n J(r_n) \\
&\quad + (1-b_n)J(Tr_n)\rangle\big) \\
&\leqslant a_n \phi(x, s_0) + (1-a_n)\big(\|x\|^2 + b_n\|J(r_n)\|_*^2 + (1-b_n)\|J(Tr_n)\|_*^2 \\
&\quad - b_n(1-b_n)g(\|J(r_n) - J(Tr_n)\|_*) - 2b_n\langle x, J(r_n)\rangle - 2(1-b_n)\langle x, J(Tr_n)\rangle\big) \\
&= a_n \phi(x, s_0) + (1-a_n)\big(b_n V(x, J(r_n)) + (1-b_n)V(x, J(Tr_n)) \\
&\quad - b_n(1-b_n)g(\|J(r_n) - J(Tr_n)\|_*)\big) \\
&= a_n \phi(x, s_0) + (1-a_n)b_n \phi(x, r_n) + (1-a_n)(1-b_n)\phi(x, Tr_n) \\
&\quad - (1-a_n)b_n(1-b_n)g(\|J(r_n) - J(Tr_n)\|_*) \\
&\leqslant a_n \phi(x, s_0) + (1-a_n)\phi(x, r_n) - (1-a_n)b_n(1-b_n)g(\|J(r_n) - J(Tr_n)\|_*) \\
&\leqslant a_n \phi(x, s_0) + \phi(x, r_n) - (1-a_n)b_n(1-b_n)g(\|J(r_n) - J(Tr_n)\|_*).
\end{aligned}$$

由引理 3.2 可得

$$\begin{aligned}\phi(x,s_{n+1}) &\leqslant a_n\phi(x,s_0)+\phi(x,s_n)-(1-\alpha-\beta)\phi(v_n,u_n)-(1-\beta)\phi(r_n,v_n)\\ &\quad-\left(1-\alpha-\frac{\sigma_n}{\tau_n}\right)\phi(u_n,s_n)-(1-a_n)b_n(1-b_n)g(\|J(r_n)-J(Tr_n)\|_*)\\ &< a_n\phi(x,s_0)+\phi(x,s_n)-(1-\alpha-\beta)\phi(v_n,u_n)-(1-\beta)\phi(r_n,v_n)\\ &\quad-\left(1-\alpha-\frac{\sigma\gamma L}{\alpha l_1}\right)\phi(u_n,s_n)-(1-a_n)b_n(1-b_n)g(\|J(r_n)-J(Tr_n)\|_*).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&(1-\alpha-\beta)\phi(v_n,u_n)+(1-\beta)\phi(r_n,v_n)\\ &\quad+\left(1-\alpha-\frac{\sigma\gamma L}{\alpha l_1}\right)\phi(u_n,s_n)+(1-a_n)b_n(1-b_n)g(\|J(r_n)-J(Tr_n)\|_*)\\ &\quad< a_n\phi(x,s_0)+\phi(x,s_n)-\phi(x,s_{n+1}).\end{aligned}\tag{3.22}$$

另外, 根据 (2.2) 和 (3.21) 以及 T 是相对非扩张映射, 可知

$$\begin{aligned}\phi(x,s_{n+1}) &= V(x,a_nJ(s_0)+(1-a_n)J(z_n))\\ &\leqslant V(x,a_nJ(s_0)+(1-a_n)J(z_n)-a_n(J(s_0)-J(x)))+2a_n\langle J(s_0)-J(x),s_{n+1}-x\rangle\\ &= V(x,a_nJ(x)+(1-a_n)(b_nJ(r_n)+(1-b_n)J(Tr_n)))+2a_n\langle J(s_0)-J(x),s_{n+1}-x\rangle\\ &\leqslant (1-a_n)b_n\phi(x,r_n)+(1-a_n)(1-b_n)\phi(x,Tr_n)+2a_n\langle J(s_0)-J(x),s_{n+1}-x\rangle\\ &\leqslant (1-a_n)\phi(x,s_n)+2a_n\langle J(s_0)-J(x),s_{n+1}-x\rangle.\end{aligned}\tag{3.23}$$

下面分两种情形进行证明.

情形 1 如果存在正整数 N_1, 使得 $\{\phi(x,s_n)\}_{n=N_1}^{\infty}$ 是单调非增加的, 则 $\{\phi(x,s_n)\}$ 收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty}(\phi(x,s_n)-\phi(x,s_{n+1}))=0.$$

根据 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $0<\liminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}b_n<1$ 和 (3.22), 可得

$$\lim_{n\to\infty}g(\|J(r_n)-J(Tr_n)\|_*)=0.$$

根据函数 g 的性质可得

$$\lim_{n\to\infty}\|J(r_n)-J(Tr_n)\|_*=0.\tag{3.24}$$

因为 J^{-1} 在 $\mathscr{X}^*$ 的有界子集上范 - 范一致连续, 故

$$\lim_{n\to\infty}\|r_n-Tr_n\|=0.\tag{3.25}$$

同时, 根据 (3.22) 还可得

$$\lim_{n\to\infty}\phi(v_n,u_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\phi(r_n,v_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\phi(u_n,s_n)=0.$$

再根据引理 2.2 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-u_n\|=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|r_n-v_n\|=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|u_n-s_n\|=0. \tag{3.26}$$

又因为

$$\begin{aligned}\|J(s_{n+1})-J(r_n)\|_* &= \|a_nJ(s_0)+(1-a_n)b_nJ(r_n)+(1-a_n)(1-b_n)J(Tr_n)-J(r_n)\|_*\\ &= \|a_n(J(s_0)-J(r_n))+(1-a_n)(1-b_n)(J(Tr_n)-J(r_n))\|_*\\ &\leqslant a_n\|J(s_0)-J(r_n)\|_*+(1-a_n)\|J(Tr_n)-J(r_n)\|_*,\end{aligned}$$

对上式取极限, 利用 (3.24) 和 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 可得 $\lim_{n\to\infty}\|J(s_{n+1})-J(r_n)\|=0$. 再根据 J^{-1} 在 $\mathscr{X}^*$ 的有界子集上范 - 范一致连续可知

$$\lim_{n\to\infty}\|s_{n+1}-r_n\|=0.$$

将上式联合 (3.26) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|s_{n+1}-s_n\|=0. \tag{3.27}$$

对于序列 $\{s_n\}$, 存在子列 $\{s_{n_i}\}$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle J(s_0)-J(x),s_n-x\rangle=\lim_{i\to\infty}\langle J(s_0)-J(x),s_{n_i}-x\rangle.$$

对于子列 $\{s_{n_i}\}$, 由 $\{s_n\}$ 的有界性可知, 存在 $\{s_{n_i}\}$ 的子列弱收敛到 x^*. 为便于书写, 该子列仍记为 $\{s_{n_i}\}$, 则 $s_{n_i}\rightharpoonup x^*$. 根据 (3.26) 和引理 3.4 可知 $x^*\in\mathrm{VI}(D,F)$. 此外, 不妨设与弱收敛子列 $\{s_{n_i}\}$ 对应的 $\{r_n\}$ 的子列记为 $\{r_{n_i}\}$, 则 $r_{n_i}\rightharpoonup x^*$. 由 (3.25) 和 T 是相对非扩张映射可知 $x^*\in\mathrm{Fix}(T)$. 综上所述, $x^*\in\mathrm{VI}(D,F)\cap\mathrm{Fix}(T)$. 根据 (3.27) 和引理 2.1 可知

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\langle J(s_0)-J(x),s_{n+1}-x\rangle\\ &\quad\leqslant\limsup_{n\to\infty}\langle J(s_0)-J(x),s_{n+1}-s_n\rangle+\limsup_{n\to\infty}\langle J(s_0)-J(x),s_n-x\rangle\\ &\quad=\limsup_{n\to\infty}\langle J(s_0)-J(x),s_{n+1}-s_n\rangle+\lim_{i\to\infty}\langle J(s_0)-J(x),s_{n_i}-x\rangle\\ &\quad=\langle J(s_0)-J(x),x^*-x\rangle\\ &\quad\leqslant 0.\end{aligned}$$

此不等式结合 $\{a_n\}\subset(0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$, 将引理 2.6 应用到 (3.23) 可得 $\lim_{n\to\infty}\phi(x,s_n)=0$, 从而 $\lim_{n\to\infty}\|s_n-x\|=0$.

情形 2 如果存在 $\{\phi(x,s_n)\}$ 的子列 $\{\phi(x,s_{n_i})\}$, 使得对任意的 $i\in\mathbb{N}$ 有 $\phi(x,s_{n_i})<\phi(x,s_{n_i+1})$, 则根据引理 2.5, 可知存在 $\mathbb{N}$ 上的非递减序列 $\{m_j\}$ 使得 $\lim_{j\to\infty}m_j=\infty$, 且对任意足够大的 $j\in\mathbb{N}$ 有

$$\phi(x,s_{m_j})<\phi(x,s_{m_j+1}),\quad \phi(x,s_j)<\phi(x,s_{m_j+1}), \tag{3.28}$$

其中 $m_j=\max\{i\leqslant j:\phi(x,s_i)<\phi(x,s_{i+1})\}$. 由 (3.22) 可知

$$\phi(x,s_{n+1})\leqslant a_n\phi(x,s_0)+\phi(x,s_n),$$

因此

$$\phi(x, s_{m_j+1}) - \phi(x, s_{m_j}) \leqslant a_{m_j}\phi(x, s_0),$$

取极限可得

$$\lim_{j\to\infty}(\phi(x, s_{m_j+1}) - \phi(x, s_{m_j})) = 0.$$

同情形 1 的证明过程类似, 也可得到

$$\lim_{j\to\infty}\|u_{m_j} - s_{m_j}\| = 0, \quad \lim_{j\to\infty}\|s_{m_j+1} - s_{m_j}\| = 0, \quad \lim_{j\to\infty}\|r_{m_j} - Tr_{m_j}\| = 0$$

和

$$\limsup_{j\to\infty}\langle J(s_0) - J(x), s_{m_j+1} - x\rangle \leqslant 0.$$

利用 (3.23) 和 (3.28) 可得

$$\begin{aligned}\phi(x, s_{m_j+1}) &\leqslant (1 - a_{m_j})\phi(x, s_{m_j}) + 2a_{m_j}\langle J(s_0) - J(x), s_{m_j+1} - x\rangle \\ &\leqslant (1 - a_{m_j})\phi(x, s_{m_j+1}) + 2a_{m_j}\langle J(s_0) - J(x), s_{m_j+1} - x\rangle,\end{aligned}$$

从而

$$\phi(x, s_{m_j+1}) \leqslant 2\langle J(s_0) - J(x), s_{m_j+1} - x\rangle.$$

取极限可得 $\lim_{j\to\infty}\phi(x, s_{m_j+1}) = 0$, 再根据 (3.28) 可知 $\lim_{j\to\infty}\phi(x, s_j) = 0$, 因此 $\lim_{j\to\infty}\|s_j - x\| = 0$. □

特别地, 如果 $\mathscr{X}$ 是 Hilbert 空间, $J = I$, 则算法 2 具有如下形式 (见算法 3), 这里 $P_D : \mathscr{X} \to D$ 表示度量投影. 类似地, 对参数进行恰当的假设后, 也可以证明由算法 3 生成的序列 $\{s_n\}$ 强收敛到 $x = P_{\mathrm{VI}(D,F)\cap\mathrm{Fix}(T)}(s_0)$.

算法 3 特殊的具有双线性搜索步长的混合外梯度算法

初始值: 任取 $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$, $0 < l_1, l_2 < 1$, $\tau > \sigma > 0$. 令 $s_0, s_1 \in \mathscr{X}$.

第 1 步 给定 s_n, 计算

$$u_n = P_D(s_n - \tau_n F s_n).$$

若 $u_n = s_n$ 或者 $Fs_n = 0$, 则迭代停止, 此时 u_n 是变分不等式问题的一个解. 否则, 进行迭代第 2 步.

第 2 步 计算

$$v_n = P_D(s_n - \tau_n F u_n),$$

其中 $\tau_n = \tau l_1^{m_n}$, m_n 是最小的非负整数 m, 使得

$$\tau l_1^m\langle Fs_n - Fu_n, v_n - u_n\rangle \leqslant \frac{\alpha}{2}(\|u_n - s_n\|^2 + \|v_n - u_n\|^2). \tag{3.29}$$

第 3 步 计算

$$r_n = v_n - \sigma_n(Fv_n - Fu_n),$$

其中 $\sigma_n = \sigma l_2^{k_n}$, k_n 是最小的非负整数 k, 使得

$$\sigma l_2^k \langle Fv_n - Fu_n, v_n - r_n\rangle \leqslant \frac{\beta}{2}(\|v_n - u_n\|^2 + \|r_n - v_n\|^2). \tag{3.30}$$

第 4 步 计算

$$s_{n+1} = a_n s_0 + (1 - a_n)(b_n r_n + (1 - b_n)Tr_n).$$

令 $n := n + 1$, 回到迭代第 1 步.

4 结论

本文在 2- 一致凸和一致光滑 Banach 空间中研究变分不等式问题和不动点问题的公共解问题. 基于 Korpelevich 的外梯度算法和 Tseng 型算法两类经典算法, 我们将其结合起来并首次采用双线性搜索步长得到了一种新的算法, 即算法 2. 在对参数赋予恰当的假设条件下, 由该算法生成的序列强收敛到变分不等式问题和不动点问题的一个公共解. 该算法的结果推广了文献 [15] 的成果. 事实上, 本文的研究内容还可以进一步深入, 例如将研究空间推广到自反 Banach 空间, 进一步拓宽算法的应用范围; 在算法的构造上加入合适的惯性, 步长的设计再进一步优化, 这都是提升算法收敛速度的一种手段, 可以作为后续对本文内容的进一步研究.

致谢 对本文的审稿老师付出的辛勤劳动表示衷心的感谢和诚挚的敬意.

参考文献

1 Alber Y I. Metric and Generalized Projection Operators in Banach Spaces: Properties and Applications. New York: Marcel Dekker, 1996
2 Aoyama K, Kohsaka F. Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings. Fixed Point Theory Appl, 2014, 2014: 95
3 Beauzamy B. Introduction to Banach Spaces and Their Geometry. Amsterdam: North-Holland, 1985
4 Cioranescu I. Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publ, 1990
5 Dong Q L, Lu Y Y, Yang J F. The extragradient algorithm with inertial effects for solving the variational inequality. Optimization, 2016, 65: 2217–2226
6 Hu S T, Wang Y H, Dong Q L. Convergence analysis of a new Bregman extragradient method for solving fixed point problems and variational inequality problems in reflexive Banach spaces. J Sci Comput, 2023, 96: 19–24
7 Jolaoso L O, Shehu Y. Single Bregman projection method for solving variational inequalities in reflexive Banach spaces. Appl Anal, 2022, 101: 4807–4828
8 Kamimura S, Takahashi W. Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space. SIAM J Optim, 2002, 13: 938–945
9 Korpelevich G M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. Ekon Math Meto, 1976, 12: 747–756
10 Maingé P E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. Set-Valued Anal, 2008, 16: 899–912
11 Reich S. Book Review: Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems. Bull Amer Math Soc (NS), 1992, 26: 367–371

12 Reich S. A Weak Convergence Theorem for the Alternating Method with Bregman Distances. New York: Marcel Dekker, 1996
13 Shehu Y. Single projection algorithm for variational inequalities in Banach spaces with application to contact problem. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2020, 40: 1045–1063
14 Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. SIAM J Control Optim, 2000, 38: 431–446
15 Xie Z B, Cai G, Li X X, et al. A new self adaptive Tseng's extragradient method with double-projection for solving pseudomonotone variational inequality problems in Hilbert spaces. Int J Nonlinear Sci Numer Simul, 2023, 24: 539–554
16 Xu H K. Iterative algorithms for nonlinear operators. J Lond Math Soc (2), 2002, 66: 240–256
17 Xu Z B, Roach G F. Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. J Math Anal Appl, 1991, 157: 189–210
18 Yao Y H, Marino G, Muglia L. A modified Korpelevich's method convergent to the minimum-norm solution of a variational inequality. Optimization, 2014, 63: 559–569
19 Zhou H Y, Qin X L. Fixed Points of Nonlinear Operators. Berlin: De Gruyter; Beijing: National Defense Industry Press, 2020

A hybrid extragradient algorithm for solving variational inequality problems in 2-uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces

Shaotao Hu, Yuanheng Wang & Zhongbing Xie

Abstract In this paper, we introduce a hybrid extragradient algorithm combining the extragradient algorithm with the Tseng-type algorithm for solving variational inequality problems and fixed point problems in 2-uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. The two step sizes in the algorithm are both controlled by two Armijo-type linear search processes. Under some appropriate assumptions on the parameters, we prove that the sequence generated by our proposed algorithm converges strongly to a common solution of the variational inequality problem and the fixed point problem.

Keywords **2-uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces, strong convergence, extragradient method, variational inequality, pseudomonotone operator**

MSC(2020) **46B10, 46B20, 47H05**

doi: 10.1360/SSM-2025-0204