



关于 Lie 代数上 CR 结构形变的 Tian-Todorov 定理

宋嘉硕

重庆理工大学数学科学研究中心, 重庆 400054

E-mail: franksong123321@gmail.com

收稿日期: 2024-03-12; 接受日期: 2024-10-16; 网络出版日期: 2024-12-18

摘要 本文引入关于 Lie 代数上 CR (Cauchy-Riemann) 结构形变的 Tian-Todorov 定理, 并得到关于 Lie 代数上 CR 结构的 Kuranishi 空间光滑性的相关结论, 即在 CR 结构常数为零和关于算子 d' 与算子 d'' 的上同调群相等以及微分算子 d 可被分解成 d' 与 d'' 之和的假设下, 可得出 Lie 代数上的 CR 结构形变是无障碍的, 具体见定理 3.1.

关键词 CR 结构的形变 Tian-Todorov 定理 Lie 代数上的 CR 结构

MSC (2020) 主题分类 32V05, 32G07, 57T15

1 引言

在形变理论中, 假设流形 X 上存在一个平凡的典范丛, 由著名的 Bogomolov-Tian-Todorov 定理可知流形 X 形变无障碍. 该定理首先由 Bogomolov^[2] 在复 Hamilton 流形情形下给出了证明. 随后, Tian^[21] 和 Todorov^[22] 对于存在平凡的典范丛的紧 Kähler 流形情形给出了证明, 在其证明过程中利用了 $\partial\bar{\partial}$ -引理. Kawamata^[9] 和 Ran^[17] 给出了代数版本的证明. 此外, Iacono 和 Manetti^[8] 给出了纯代数版本的 Bogomolov-Tian-Todorov 定理的证明. 最近的相关工作参见文献 [11, 16]. Tian-Todorov 定理的 CR (Cauchy-Riemann) 类比版本在文献 [1] 中被首先给出. 文献 [18] 给出了更简洁的关于 CR 结构形变的 Tian-Todorov 定理的证明.

Lie 代数上的形变问题也在先前的许多文献中有所讨论. 例如, Nijenhuis 和 Richardson^[15] 研究了复结构的形变, 文献 [5] 给出了 Lie 代数上复结构的刚性定理. 此外, 文献 [20] 对相应的 Lie 群具有左不变复结构的实 6 维幂零流形进行了分类, 一些相关工作也可参见文献 [25].

由于 $\mathfrak{g}$ 上复结构的形变与幂零流形以及 Lie-Hermite 流形上左不变复结构的形变相关联, 本文的结果可以为研究复幂零流形和 Lie-Hermite 流形的形变提供理论依据. 一方面, 我们所描述的复幂零流形是指形如 $\Gamma \backslash G$ 的紧复流形, 其中 Γ 是 G 的具有极大秩的格, G 是具有左不变复结构的单连通

英文引用格式: Song J S. Tian-Todorov theorem on the deformation of CR-structures on Lie algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 2145–2156, doi: 10.1360/SSM-2024-0059

幂零 Lie 群. 文献 [26] 分析了复幂零流形具有 Bismut 联络、Chern 联络或 Riemann 联络的条件. 此外, 文献 [3, 13, 19] 研究了幂零流形的形变. 另一方面, 所谓 Lie-Hermite 流形是指三元组 (G, J, g) , 其中 G 是一个 Lie 群, J 是 G 上的左不变复结构, g 是 G 上与 J 相容的左不变度量. 此前有大量关于 Lie-Hermite 流形的研究, 相关工作可参见文献 [4, 6, 24]. 注意到 Lie 代数与 Lie 群之间存在一个自然的对应关系: $\{\mathfrak{g}$ 上的复结构 $\} = \{G$ 上的左不变复结构 $\}$. G 上的任意左不变复结构 J 都决定了一个 $\Gamma \backslash G$ 上的复结构, 可知 $M := (\Gamma \backslash G, J)$ 为一个复流形. 这意味着 $\Gamma \backslash G$ 上的复结构是从 G 继承而来的. 在 G 上的左不变复结构也会诱导一个在 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的复结构, 这里仍用 J 表示. 因此, $\mathfrak{g}$ 上复结构的形变与幂零流形以及 Lie-Hermite 流形上左不变复结构的形变相关联.

本文推广并利用了 $\mathfrak{g}$ 上的结构常数. 文献 [23] 利用了 $\mathfrak{g}$ 上的复结构常数, 在文中将 s-Gauduchon 联络分量用 $\mathfrak{g}$ 上的复结构常数来表示, 其中 s-Gauduchon 联络被定义为 Chern 联络和 Bismut 联络的凸组合. 此外, 文献 [7] 讨论了结构常数 D 的几何意义. 具体而言, $D = 0$ 当且仅当 J 使得 $\mathfrak{g}$ 为复 Lie 代数. 因此, 复结构的可积条件等价于 $C_{ab}^c = C_{l\bar{j}}^{\bar{\beta}} = 0$.

本文证明关于 Lie 代数上 CR 结构形变的 Tian-Todorov 定理, 即在结构常数 $E_{ij}^k = C_{ab}^c = C_{l\bar{j}}^{\bar{\beta}} = 0$ 和 $\mathcal{H}_{d'}^{p,q} = \mathcal{H}_{d''}^{p,q}$ 以及 $d = d' + d''$ 的假设下, Lie 代数上 CR 结构的形变是无障碍的. 具体而言, 本文证明了以下结果:

定理 1.1 (= 定理 3.1) 设 ω_0 为 $\Lambda^{n,0}$ 上任意的 $(n, 0)$ 形式, $\varphi_1 \in \mathcal{H}_{d''}^{0,1}(\bar{\mathfrak{q}})$. 如果 $\mathcal{H}_{d''}^{p,q} = \mathcal{H}_{d'}^{p,q}$ 并且 $E_{ij}^k = C_{ab}^c = C_{l\bar{j}}^{\bar{\beta}} = 0$, 则当 t 足够小时, 存在一个收敛的形式幂级数

$$\phi(t) = \phi_1 t + \phi_2 t^2 + \cdots + \phi_K t^K + \cdots,$$

该幂级数满足:

- (a) $d''\phi(t) = \frac{1}{2}[\phi(t), \phi(t)];$
- (b) $\phi_i \lrcorner \omega_0 = \frac{1}{2}d'\psi_i.$

在 Kodaira 和 Spencer 的经典理论 [14] 中, 复结构的形变可以被形式幂级数所表示. 那么自然地能够想到一个问题; 反过来, 给定幂级数的初始项 ϕ_1 , 是否能由其构造出一个表示复结构形变的形式幂级数? 值得注意的是, 复结构的形变是无障碍的当且仅当 $\phi(t)$ 满足 Maurer-Cartan 方程, 即 $\mathcal{H}^{0,2}[\phi(t), \phi(t)] = 0$. 本文考虑关于算子 d'' 的 Maurer-Cartan 方程的幂级数展开式, 即将 $\phi(t)$ 替换为 $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i t^i$:

$$d'' \left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i t^i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} [\phi_i, \phi_j] t^{i+j} = 0,$$

这就得到了关于算子 d'' 的 Maurer-Cartan 迭代方程组:

$$\begin{aligned} d''\phi_1 &= 0, \\ d''\phi_2 + \frac{1}{2}[\phi_1, \phi_1] &= 0, \\ &\vdots \\ d''\phi_k + \frac{1}{2} \sum_{0 < i < k} [\phi_i, \phi_{k-i}] &= 0. \end{aligned}$$

本文的主要结果为定理 3.1, 即 Lie 代数上的 CR 结构的 Tian-Todorov 定理, 其直接给出了 Maurer-Cartan 迭代方程组的解. 本文得到关于 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的 Kuranishi 空间的光滑性的相关结论, 它可以为研究复幂零流形和 Lie-Hermite 流形的形变提供理论依据.

2 Lie 代数上 CR 结构的形变

2.1 Lie 代数上的 CR 结构

一个实 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ 上的 CR 结构是指三元组 $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{p}, J)$, 其中 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的线性子空间, J 是使得 $J^2 = -\text{id}_{\mathfrak{p}}$ 的关于 $\mathfrak{p}$ 的自同态且对任意的 $x, y \in \mathfrak{p}$, 有 $[x, y] - [Jx, Jy] \in \mathfrak{p}$ 和 $[Jx, Jy] = [x, y] + J[Jx, y] + J[x, Jy]$. 设 $\mathfrak{q} = \{x - iJx/x \in \mathfrak{p}\}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 的复化, 则 $\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的复子代数且 $\mathfrak{g}$ 可以写成一个向量空间的直和 $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{q}} \oplus \mathfrak{q} \oplus \mathcal{V}$, 其中 $\mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}} = \{0\}$ ($\bar{\mathfrak{q}} = \tau\mathfrak{q}$, τ 为复共轭), $\mathcal{V} = \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{C}x_j$, $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{g}_0$, 整数 r 称为 CR 结构的实余维数. 下文称 $\mathfrak{q}$ 是一个 CR 结构. 如果存在 $\sigma \in \text{Aut}\mathfrak{g}$, 使得 $\sigma\tau = \tau\sigma$ 并且 $\sigma\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$, 则两个 CR 结构 $\mathfrak{q}_1$ 和 $\mathfrak{q}_2$ 被认为是等价的. 一个 CR 结构必为一个近 CR 结构. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个域 k 上的 Lie 代数, 算子 d 的具体表达式由以下公式给出:

$$(d\omega)(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} x_i \omega(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}), \quad (2.1)$$

其中变量上方的插入符号的含义为忽略该变量. 在 (2.1) 中, 令 $n = 1$, 可得

$$(d\omega)(x, y) = x\omega(y) - y\omega(x) - \omega([x, y]). \quad (2.2)$$

在外代数 $\wedge \mathfrak{g}^* = \bigoplus_k \wedge^k \mathfrak{g}^*$ 上, 存在 Chevalley-Eilenberg 复形

$$(\wedge \mathfrak{g}^*, d) : 0 \longrightarrow \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d} \wedge^2 \mathfrak{g}^* \longrightarrow \dots \longrightarrow \wedge^{2n-1} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d} \wedge^{2n} \mathfrak{g}^* \longrightarrow 0,$$

在 Lie 代数情形下, (2.2) 中右端的前两项为零, 故得到

$$d\omega(x, y) := -\omega[x, y], \quad \forall \omega \in \mathfrak{g}^*, \quad x, y \in \mathfrak{g}. \quad (2.3)$$

设 $\wedge^k \mathfrak{g}^* = \bigoplus_{p,q} ((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^p(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^q(\mathfrak{q})^*))$, 则 $((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^p(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^q(\mathfrak{q})^*)) \subset \wedge^k \mathfrak{g}^*$, $\wedge^{k+1} \mathfrak{g}^* = ((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^p(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^{q+1}(\mathfrak{q})^*)) \oplus ((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^{p+1}(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^q(\mathfrak{q})^*)) \oplus ((\wedge^{p+1}(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^{q+1}(\mathfrak{q})^*))$, 其中 $p+q+1=k$,

$$d : ((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^p(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^q(\mathfrak{q})^*)) \rightarrow \wedge^{k+1} \mathfrak{g}^*.$$

在 $((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^p(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^q(\mathfrak{q})^*))$ 上引入 d'' 算子, 即对于 $((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^p(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^q(\mathfrak{q})^*))$ 中的 u , 有 $d''u = (du)_{((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^p(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^{q+1}(\mathfrak{q})^*))}$, 其中 $(du)_{((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^p(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^{q+1}(\mathfrak{q})^*))}$ 为 du 的关于分解的 $((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^p(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^{q+1}(\mathfrak{q})^*))$ 部分. 同理, 对于 $((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^p(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^q(\mathfrak{q})^*))$ 中的 u , 有

$$d'u = (du)_{((\mathcal{V})^* \wedge (\wedge^{p+1}(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^q(\mathfrak{q})^*))}.$$

因此,

$$du = d''u + d'u + (du)_{((\wedge^{p+1}(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^{q+1}(\mathfrak{q})^*))}.$$

进行直接计算, 有

$$(du)_{((\wedge^{p+1}(\bar{\mathfrak{q}})^*) \wedge (\wedge^{q+1}(\mathfrak{q})^*))} = -d\theta \wedge (\mathcal{V} \lrcorner u),$$

其中 θ 是满足 $\theta|_{\bar{q}+q} = 0$ 和 $\theta(\mathcal{V}) = 1$ 条件的 1-形式 (1-form), 这里 $\lrcorner$ 代表缩并运算. 对于上面的任意 u , 有

$$du = d'u + d''u - d\theta \wedge (\mathcal{V} \lrcorner u).$$

假设

$$(du)_{((\wedge^{p+1}(\bar{q})^*) \wedge (\wedge^{q+1}(q)^*))} = -d\theta \wedge (\mathcal{V} \lrcorner u) = 0,$$

则有

$$du = d'u + d''u, \quad d'd'' = -d''d'.$$

记 $\Lambda^{p,q} = ((\wedge^p(\bar{q})^*) \wedge (\wedge^q(q)^*))$. 设 $\bar{q}^*$ 的基为 $\{z^\alpha\}_{\alpha=1}^n$, $\bar{q}$ 的基为 $\{z_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, 则有

$$d'z^\alpha = -\frac{1}{2}z^\alpha[z_\beta, z_\gamma]z^{\beta\gamma}, \quad d''z^\alpha = -z^\alpha[z_\beta, \bar{z}_\gamma]z^{\beta\bar{\gamma}}, \quad d''z_\alpha = -z^\gamma[\bar{z}_\beta, z_\alpha]\bar{z}^\beta \otimes z_\gamma,$$

其中 $z^{\beta\gamma} := z^\beta \wedge z^\gamma$ 且 $z^{\beta\bar{\gamma}} := z^\beta \wedge \bar{z}^\gamma$.

2.2 Lie 代数上的 CR 结构常数

命题 2.1 设 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的 CR 结构, $\bar{q} = \mathbb{C}\{z_i\}$, $\bar{q}^* = \mathbb{C}\{z^i\}$ 且

$$\begin{aligned} [z_i, z_j] &= C_{ij}^k z_k, \quad [z_i, \bar{z}_j] = C_{ij}^k z_k + \bar{C}_{ij}^k \bar{z}_k + \tilde{C}_{ij}^k x_k, \quad [x_i, x_j] = E_{ij}^k x_k, \\ [x_i, z_j] &= D_{ij}^k z_k + \bar{D}_{ij}^k \bar{z}_k + \tilde{D}_{ij}^k x_k, \quad [x_i, \bar{z}_j] = \bar{D}_{ij}^k z_k + D_{ij}^k \bar{z}_k + \tilde{D}_{ij}^k x_k, \end{aligned} \quad (2.4)$$

则有

$$d\bar{z}^i = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < k \leq n} C_{jk}^i \bar{z}^j \wedge \bar{z}^k - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \bar{C}_{jk}^i z^j \wedge \bar{z}^k - \sum_{1 \leq \beta < \gamma \leq n} D_{\beta\gamma}^i x^\beta \wedge \bar{z}^\gamma.$$

证明 设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* = \bar{q}^* \oplus q^* \oplus \mathcal{V}^*$ 且 $\wedge^2 \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* = \wedge^2(\bar{q}^* \oplus q^* \oplus \mathcal{V}^*) = \wedge^2 \bar{q}^* \oplus (\bar{q}^* \wedge q^*) \oplus (q^* \wedge \mathcal{V}^*) \oplus \cdots \oplus \wedge^2 q^*$. 算子 d 可以延拓至 $d: \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$, 则

$$d\bar{z}^\alpha = A_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} \bar{z}^\beta \wedge \bar{z}^\gamma + B_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} z^\beta \wedge \bar{z}^\gamma + F_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} x^\beta \wedge \bar{z}^\gamma. \quad (2.5)$$

将 $(\bar{z}_p, \bar{z}_q)$ 代入 (2.5), 可得上述 (2.5) 右侧的第二项为零. 根据上文中关于 d 的定义, (2.5) 的左端等于 $-\bar{z}^\alpha[\bar{z}_p, \bar{z}_q]$. 具体而言, 有

$$-\bar{z}^\alpha[\bar{z}_p, \bar{z}_q] = A_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}(\delta_p^\beta \delta_q^\gamma - \delta_p^\gamma \delta_q^\beta) = A_{p\bar{q}}^{\bar{\alpha}} - A_{q\bar{p}}^{\bar{\alpha}} = 2A_{p\bar{q}}^{\bar{\alpha}}.$$

因此,

$$A_{p\bar{q}}^{\bar{\alpha}} = -\frac{1}{2}\bar{z}^\alpha[\bar{z}_p, \bar{z}_q]. \quad (2.6)$$

根据 (2.4), 可得

$$A_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\theta}} = -\frac{1}{2}\bar{z}^\alpha C_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\theta}} \bar{z}_\theta = -\frac{1}{2}\delta_\theta^\alpha C_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\theta}} = -\frac{1}{2}C_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}.$$

同样地, 将 $(z_p, \bar{z}_q)$ 代入 (2.5), 得到 $B_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} = -C_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}$. 将 $(x_p, \bar{z}_q)$ 代入 (2.5), 得到 $F_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} = -D_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}$. 因此, 将 $A_{p\bar{q}}^{\bar{\theta}}$, $B_{p\bar{q}}^{\bar{\alpha}}$ 和 $E_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}$ 代入 (2.5), 即可完成证明. $\square$

注 2.1 对于给定的 $\bar{\mathfrak{q}}^*$ 的一组基 $\{z^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ 和 $\bar{\mathfrak{q}}$ 的一组基 $\{z_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, 有

$$d''z^\alpha = -z^\alpha[z_i, \bar{z}_j]z^{i\bar{j}} = -z^\alpha(C_{i\bar{j}}^k z_k + C_{i\bar{j}}^{\bar{k}} \bar{z}_k + \tilde{C}_{i\bar{j}}^k x_k)z^{i\bar{j}} = C_{i\bar{j}}^\alpha z^{i\bar{j}}.$$

类似地, 可得

$$d''d'z^\alpha = -\frac{1}{2}C_{ij}^\alpha z^{ij}, \quad d''z_\alpha = C_{i\bar{\alpha}}^j \bar{z}^i \otimes z_j, \quad d'z_\alpha = C_{i\bar{\alpha}}^j z^i \otimes z_j, \quad d'\bar{z}^\alpha = -\frac{C_{i\bar{\alpha}}^j}{2} z^i \otimes z_j. \quad (2.7)$$

注 2.2 对于给定的 $\mathfrak{g}$ 上的近 CR 结构 $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ 的任意小形变 $\mathfrak{q}_t$ 都可用唯一的 $\phi \in \Lambda^{0,1} \otimes \bar{\mathfrak{q}}$ 来表示. 实际上, 设 $\{z^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ 是 $\bar{\mathfrak{q}}^*$ 的基, $\{z_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ 是它的对偶基, 则 $\phi \in \Lambda^{0,1} \otimes \bar{\mathfrak{q}}$ 由下式所定义:

$$\phi := \phi_\beta^\alpha \bar{z}^\beta \otimes z_\alpha.$$

2.3 Frölicher-Nijenhuis 括号

Frölicher-Nijenhuis 括号 $[\cdot, \cdot] : (\Lambda^{0,1} \otimes \bar{\mathfrak{q}}) \times (\Lambda^{0,1} \otimes \bar{\mathfrak{q}}) \rightarrow \Lambda^{0,2} \otimes \mathfrak{g}^{1,0}$ 的定义如下: 对于任意 $\varphi, \psi \in \mathfrak{g}^*$ 和 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 有

$$[\varphi \otimes X, \psi \otimes Y] = \varphi \wedge \psi \otimes [X, Y] - (i_Y d\varphi \wedge \psi \otimes X + i_X d\psi \wedge \varphi \otimes Y + i_Y \varphi d\psi \otimes X + i_X \psi d\varphi \otimes Y),$$

其中 i_X 和 i_Y 分别表示与 X 和 Y 进行缩并运算. 给定 $\mathfrak{g}$ 上的近 CR 结构 $\mathfrak{q}$, 则 $\mathfrak{q}$ 的任意小形变 $\mathfrak{q}_t$ 都可由唯一的 $\phi \in \Lambda^{0,1} \otimes \bar{\mathfrak{q}}$ 来表示. 实际上, 假设 $\{z^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ 是 $\mathfrak{q}^*$ 的基, $\{z_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ 是它的对偶基. 同样地, 设 $\{w^i\}_{i=1}^n$ 为 $\mathfrak{q}_t^*$ 的基, $\{w_i\}_{i=1}^n$ 为它的对偶基. 我们有

$$\begin{cases} w^i = A_\alpha^i z^\alpha + B_\alpha^i \bar{z}^\alpha + C_\alpha^i x^\alpha, \\ w_i = c_i^\alpha z_\alpha + d_i^\alpha \bar{z}_\alpha + e_i^\alpha x_\alpha, \end{cases} \quad (2.8)$$

则 $\phi \in \Lambda^{0,1} \otimes \bar{\mathfrak{q}}$ 由下式所定义:

$$\phi := \phi_\beta^\alpha \bar{z}^\beta \otimes z_\alpha = (A^{-1})_i^\alpha B_\beta^i \bar{z}^\beta \otimes z_\alpha = -(\bar{c}^{-1})_\beta^i \bar{d}_i^\alpha \bar{z}^\beta \otimes z_\alpha. \quad (2.9)$$

定理 2.1 假设 $E_{ij}^k = 0$, 如果 $\mathfrak{q}$ 是可积的, 即它是一个 CR 结构, 则有

$$[\mathfrak{q}_t, \mathfrak{q}_t] \subseteq \mathfrak{q}_t \Leftrightarrow d''\phi = \frac{1}{2}[\phi, \phi].$$

证明 实际上, 设 $\xi_\beta^\alpha := A_\beta^i c_i^\alpha$, 则由 (2.9) 可知 $A_\beta^i d_i^\alpha = -\xi_\beta^\gamma \bar{\phi}_\gamma^\alpha$. 由 (2.8) 可得 $[\mathfrak{q}_t, \mathfrak{q}_t] \subseteq \mathfrak{q}_t$ 当且仅当

$$\begin{aligned} 0 &= (A^{-1})_k^\tau w^k [\bar{w}_i, \bar{w}_j] \bar{A}_\delta^i \bar{A}_\mu^j \bar{z}^{\delta\mu} \otimes z_\tau \\ &= (A^{-1})_k^\tau (A_\alpha^k z^\alpha + B_\alpha^k \bar{z}^\alpha + C_\alpha^k x^\alpha) \\ &\quad \times [\bar{c}_i^\alpha \bar{z}_\alpha + \bar{d}_i^\alpha z_\alpha + e_i^\alpha x_\alpha, \bar{c}_j^\alpha \bar{z}_\alpha + \bar{d}_j^\alpha z_\alpha + e_j^\alpha x_\alpha] \bar{A}_\delta^i \bar{A}_\mu^j \bar{z}^{\delta\mu} \otimes z_\tau \\ &= (A^{-1})_k^\tau (A_\alpha^k z^\alpha + B_\alpha^k \bar{z}^\alpha) [\bar{c}_i^\alpha \bar{z}_\alpha + \bar{d}_i^\alpha z_\alpha, \bar{c}_j^\alpha \bar{z}_\alpha + \bar{d}_j^\alpha z_\alpha] \bar{A}_\delta^i \bar{A}_\mu^j \bar{z}^{\delta\mu} \otimes z_\tau \\ &= (\bar{d}_i^\beta \bar{d}_j^\gamma z^\tau [\bar{z}_\beta, \bar{z}_\gamma] + (\bar{c}_i^\beta \bar{d}_j^\gamma - \bar{c}_j^\beta \bar{d}_i^\gamma) z^\tau [\bar{z}_\beta, z_\gamma]) \bar{A}_\delta^i \bar{A}_\mu^j \bar{z}^{\delta\mu} \otimes z_\tau \\ &\quad + (\phi_\alpha^\tau \bar{c}_i^\beta \bar{c}_j^\gamma \bar{z}^\alpha [\bar{z}_\beta, \bar{z}_\gamma] + \phi_\alpha^\tau (\bar{c}_i^\beta \bar{d}_j^\gamma - \bar{c}_j^\beta \bar{d}_i^\gamma) \bar{z}^\alpha [\bar{z}_\beta, z_\gamma]) \bar{A}_\delta^i \bar{A}_\mu^j \bar{z}^{\delta\mu} \otimes z_\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\bar{\xi}_\delta^\alpha \phi_\alpha^\beta \bar{\xi}_\mu^\lambda \phi_\lambda^\gamma z^\tau [z_\beta, z_\gamma] - 2\bar{\xi}_\delta^\beta \bar{\xi}_\mu^\lambda \phi_\lambda^\gamma z^\tau [\bar{z}_\beta, z_\gamma]) \bar{z}^{\delta\mu} \otimes z_\tau \\
 &\quad + (\phi_\alpha^\tau \bar{\xi}_\delta^\beta \bar{\xi}_\mu^\lambda \bar{z}^\alpha [\bar{z}_\beta, \bar{z}_\gamma] - 2\phi_\alpha^\tau \bar{\xi}_\delta^\beta \bar{\xi}_\mu^\lambda \phi_\lambda^\gamma \bar{z}^\alpha [z_\beta, z_\gamma]) \bar{z}^{\delta\mu} \otimes z_\tau.
 \end{aligned}$$

上述第三个等式可由下式得到:

$$\begin{aligned}
 &(A_\alpha^k z^\alpha + B_\alpha^k \bar{z}^\alpha + C_\alpha^k x^\alpha)([\bar{c}_i^\alpha \bar{z}_\alpha + \bar{d}_i^\alpha z_\alpha, \bar{c}_j^\alpha \bar{z}_\alpha + \bar{d}_j^\alpha z_\alpha] + [e_i^\alpha x_\alpha, e_j^\alpha x_\alpha] \\
 &\quad \times [\bar{c}_i^\alpha \bar{z}_\alpha + \bar{d}_i^\alpha z_\alpha, e_j^\alpha x_\alpha] + [e_i^\alpha x_\alpha, \bar{c}_j^\alpha \bar{z}_\alpha + \bar{d}_j^\alpha z_\alpha]) \\
 &= (A_\alpha^k z^\alpha + B_\alpha^k \bar{z}^\alpha)[\bar{c}_i^\alpha \bar{z}_\alpha + \bar{d}_i^\alpha z_\alpha, \bar{c}_j^\alpha \bar{z}_\alpha + \bar{d}_j^\alpha z_\alpha].
 \end{aligned}$$

由于矩阵 ξ_β^α 是非奇异的, 所以上述公式等价于

$$\begin{aligned}
 0 &= \phi_\alpha^\beta \phi_\lambda^\gamma z^\tau [z_\beta, z_\gamma] \bar{z}^{\alpha\lambda} \otimes z_\tau - 2\phi_\lambda^\gamma z^\tau [\bar{z}_\beta, z_\gamma] \bar{z}^{\beta\lambda} \otimes z_\tau \\
 &\quad + \phi_\alpha^\tau \bar{z}^\alpha [\bar{z}_\beta, \bar{z}_\gamma] \bar{z}^{\beta\gamma} \otimes z_\tau - 2\phi_\alpha^\tau \phi_\lambda^\gamma \bar{z}^\alpha [\bar{z}_\beta, z_\gamma] \bar{z}^{\beta\lambda} \otimes z_\tau \\
 &= 2\phi_\beta^\alpha \bar{z}^\beta \otimes \bar{\partial} z_\alpha - 2\phi_\alpha^\tau \bar{\partial} \bar{z}^\alpha \otimes z_\tau + \phi_\alpha^\beta \phi_\lambda^\gamma \bar{z}^{\alpha\lambda} \otimes [z_\beta, z_\gamma] - 2\phi_\alpha^\tau \phi_\lambda^\gamma \bar{z}^\alpha [\bar{z}_\beta, z_\gamma] \bar{z}^{\beta\lambda} \otimes z_\tau \\
 &= -2\bar{\partial}\phi + [\phi, \phi].
 \end{aligned}$$

上述第二个等式可由下式得出:

$$[\phi, \phi] = \phi_\alpha^\beta \phi_\lambda^\gamma \bar{z}^{\alpha\lambda} \otimes [z_\beta, z_\gamma] - 2\phi_\alpha^\tau \phi_\lambda^\gamma \bar{z}^\alpha [\bar{z}_\beta, z_\gamma] \bar{z}^{\beta\lambda} \otimes z_\tau. \quad (2.10)$$

至此完成了定理的证明. $\square$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 有 $E_{ij}^k = 0$. 根据 Frölicher-Nijenhuis 括号的定义, 有

$$[\bar{z}^\alpha \otimes z_k, \bar{z}^\beta \otimes z_l] = \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta \otimes [z_k, z_l] + i_{z_l} d\bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta \otimes z_k + i_{z_k} d\bar{z}^\beta \wedge \bar{z}^\alpha \otimes z_l + \mu, \quad (2.11)$$

其中 $\mu = i_{z_l} \bar{z}^\alpha d\bar{z}^\beta \otimes z_k + i_{z_k} \bar{z}^\beta d\bar{z}^\alpha \otimes z_l$. 由 $i_{z_l} \bar{z}^\alpha = \bar{z}^\alpha(z_l) = 0$ 可得 (2.11) 的右端的第四项为零. 根据 (2.4), 可得

$$\bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta \otimes [z_k, z_l] = C_{kl}^\tau \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta \otimes z_r. \quad (2.12)$$

通过直接计算, 有

$$\begin{aligned}
 i_{z_l} d\bar{z}^\alpha &= i_{z_l} \left(-\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < k \leq n} C_{jk}^\alpha \bar{z}^j \wedge \bar{z}^k - \sum_{1 \leq j < k \leq n} C_{jk}^{\bar{\alpha}} \bar{z}^j \wedge \bar{z}^k - \sum_{1 \leq \beta < \gamma \leq n} D_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}} x^\beta \wedge \bar{z}^\gamma \right) \\
 &= -C_{lk}^{\bar{\alpha}} \bar{z}^k.
 \end{aligned}$$

因此, (2.11) 的右端的第二项等于

$$C_{l\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} \bar{z}^\beta \wedge \bar{z}^\gamma \otimes z_k. \quad (2.13)$$

类似地, (2.11) 的右端的第三项等于

$$C_{k\bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\gamma \otimes z_l. \quad (2.14)$$

因此, 将 (2.12)–(2.14) 代入 (2.11), 得到

$$[\bar{z}^\alpha \otimes z_k, \bar{z}^\beta \otimes z_l] = \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta \otimes [z_k, z_l] + C_{l\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} \bar{z}^\beta \wedge \bar{z}^\gamma \otimes z_k + C_{k\bar{\gamma}}^{\bar{\beta}} \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\gamma \otimes z_l.$$

命题 2.2 假设 $C_{l\bar{y}}^{\bar{\beta}} = 0$, 则有

$$[\bar{z}^\alpha \otimes z_k, \bar{z}^\beta \otimes z_l] = \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta \otimes [z_k, z_l].$$

证明 设 $\varphi, \psi \in \Lambda^{0,1} \otimes \bar{q}$. 则有

$$[\varphi, \psi] = [\varphi_\alpha^k \bar{z}^\alpha \otimes z_k, \psi_\beta^l \bar{z}^\beta \otimes z_l] = \varphi_\alpha^k \psi_\beta^l [\bar{z}^\alpha \otimes z_k, \bar{z}^\beta \otimes z_l] = \varphi_\alpha^k \psi_\beta^l \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta \otimes [z_k, z_l].$$

设 $\omega_0 \in \Lambda^{n,0}$. 根据 $\lrcorner$ 的定义, 有

$$[\phi, \psi] \lrcorner \omega_0 = \varphi_\alpha^k \psi_\beta^l ((\bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta \otimes [z_k, z_l]) \lrcorner \omega_0) = \varphi_\alpha^k \psi_\beta^l ([z_k, z_l] \lrcorner (\omega_0 \wedge \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta)).$$

因此, 将文献 [10, 引理 2.1] 应用于 Lie 代数的情形下, 并取 $(n-1, 2)$ 形式 $\omega = \omega_0 \wedge \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta$, 可得

$$\begin{aligned} & \varphi_\alpha^k \psi_\beta^l ([z_k, z_l] \lrcorner (\omega_0 \wedge \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta)) \\ &= \varphi_\alpha^k \psi_\beta^l (z_k \lrcorner d'(z_l \lrcorner (\omega_0 \wedge \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta)) + d'(z_k \lrcorner (z_l \lrcorner (\omega_0 \wedge \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta))) \\ & \quad - \varphi_\alpha^k \psi_\beta^l (z_l \lrcorner d'(z_k \lrcorner (\omega_0 \wedge \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta)) - z_l \lrcorner (z_k \lrcorner d'(\omega_0 \wedge \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta))). \end{aligned}$$

由 $d'(\omega_0 \wedge \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta) = 0$, 得上式中右端的最后一项为零. 另外, 根据 $\lrcorner$ 和 d' 的线性性, 有

$$[\phi, \psi] \lrcorner \omega_0 = \phi \lrcorner d'(\psi \lrcorner \omega_0) - d'(\psi \lrcorner (\phi \lrcorner \omega_0)) + \psi \lrcorner d'(\phi \lrcorner \omega_0). \quad (2.15)$$

证毕. □

引理 2.1 当 $C_{ab}^c = 0$ 时, 对于每个 $\varphi, \varphi' \in \Lambda^{0,1} \otimes \bar{q}$, 有

$$d''[\varphi, \varphi'] = [d''\varphi, \varphi'] - [\varphi, d''\varphi'].$$

证明 根据定义, 可得 $\varphi = \varphi_\alpha^k \bar{z}^\alpha \otimes z_k$, $\varphi' = \varphi'_\beta^l \bar{z}^\beta \otimes z_l$, 则有

$$\begin{aligned} d''[\varphi, \varphi'] &= \varphi_\alpha^k \varphi'_\beta^l A, \quad \text{其中 } A = d''[\bar{z}^\alpha \otimes z_k, \bar{z}^\beta \otimes z_l], \\ [d''\varphi, \varphi'] &= \varphi_\alpha^k \varphi'_\beta^l B, \quad \text{其中 } B = [d''(\bar{z}^\alpha \otimes z_k), \bar{z}^\beta \otimes z_l], \\ [\varphi, d''\varphi'] &= \varphi_\alpha^k \varphi'_\beta^l C, \quad \text{其中 } C = [\bar{z}^\alpha \otimes z_k, d''(\bar{z}^\beta \otimes z_l)]. \end{aligned}$$

我们只需要验证 $A = B - C$, 其中

$$\begin{aligned} A &= d''[\bar{z}^\alpha \otimes z_k, \bar{z}^\beta \otimes z_l] \\ &= \frac{1}{2}(-C_{kl}^r C_{ab}^{\bar{\alpha}} \bar{z}^a \wedge \bar{z}^b \wedge \bar{z}^\beta \otimes z_r + C_{kl}^r C_{ab}^{\bar{\beta}} \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^a \wedge \bar{z}^b \otimes z_r - 2C_{kl}^r C_{ar}^b \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta \wedge \bar{z}^a \otimes z_b), \\ B &= [d''\bar{z}^\alpha \otimes z_k, \bar{z}^\beta \otimes z_l] - [\bar{z}^\alpha \otimes d''z_k, \bar{z}^\beta \otimes z_l] \\ &= -\frac{1}{2}C_{kl}^c C_{ab}^{\bar{\alpha}} \bar{z}^a \wedge \bar{z}^b \wedge \bar{z}^\beta \otimes z_c + C_{rl}^b C_{ak}^r \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^a \wedge \bar{z}^\beta \otimes z_b, \\ C &= [\bar{z}^\alpha \otimes z_k, d''\bar{z}^\beta \otimes z_l] - [\bar{z}^\alpha \otimes z_k, \bar{z}^\beta \otimes d''z_l] \\ &= -\frac{1}{2}C_{kl}^c C_{ab}^{\bar{\beta}} \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^a \wedge \bar{z}^b \otimes z_c + C_{kb}^c C_{al}^b \bar{z}^\alpha \wedge \bar{z}^\beta \wedge \bar{z}^a \otimes z_c. \end{aligned}$$

当 $C_{ab}^c = 0$ 时, 可得 $A = B - C$. □

命题 2.3 假设 $C_{\bar{a}\bar{b}}^c = 0$, 则有

$$d''[\varphi, \varphi'] = [d''\varphi, \varphi'] - [\varphi, d''\varphi'].$$

证明 根据引理 2.1 可得该结论成立. $\square$

引理 2.2 在命题 2.3 的条件下, 有 $d'(\bar{z}^\alpha) = 0$.

证明 通过计算, 可得

$$d'(\bar{z}^\alpha) = -z^\alpha(C_{l\bar{\gamma}}^k z_k + C_{l\bar{\gamma}}^{\bar{k}} \bar{z}_k)z^l \wedge \bar{z}^\gamma = 0.$$

上述第一个等号由 (2.7) 所推导出, 第二个等号由命题 2.3 的条件所推导出, 即 $C_{\bar{a}\bar{b}}^c = 0$. $\square$

设 $T \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$ 为两个有限维复向量空间 V_1 与 V_2 之间的线性算子. 设向量空间 V_1 和 V_2 上的 Hermite 内积分别为 h_1 和 h_2 . 关于算子 T 的 Moore-Penrose 逆, 用 $T^\dagger \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, V_1)$ 表示, 具体定义如下:

$$T^\dagger y = \begin{cases} (T|_{(\ker T)^\perp})^{-1}y, & \forall y \in \text{im } T, \\ 0, & \forall y \in (\text{im } T)^\perp, \end{cases}$$

其中 $(\text{im } T)^\perp$ 为 $\text{im } T$ 的正交补, 使得 $V_2 = \text{im } T \oplus (\text{im } T)^\perp$. 则由定义可知

$$TT^\dagger = P_{\text{im } T} \quad \text{且} \quad T^\dagger T = P_{(\ker T)^\perp},$$

其中 $P_{\text{im } T}$ 和 $P_{(\ker T)^\perp}$ 分别为投影至空间 $\text{im } T$ 和 $(\ker T)^\perp$ 上的投影算子. 可以定义

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{d''}^{p,q} &:= \ker(d'' : \Lambda^{p,q} \otimes \bar{\mathbf{q}} \rightarrow \Lambda^{p,q+1} \otimes \bar{\mathbf{q}}) \cap \ker(d''^\dagger : \Lambda^{p,q} \otimes \bar{\mathbf{q}} \rightarrow \Lambda^{p,q-1} \otimes \bar{\mathbf{q}}), \quad p, q > 0, \\ \mathcal{H}_{d'}^{p,q} &:= \ker(d' : \Lambda^{p,q} \otimes \bar{\mathbf{q}} \rightarrow \Lambda^{p+1,q} \otimes \bar{\mathbf{q}}) \cap \ker(d'^\dagger : \Lambda^{p,q} \otimes \bar{\mathbf{q}} \rightarrow \Lambda^{p-1,q} \otimes \bar{\mathbf{q}}), \quad p, q > 0. \end{aligned}$$

特别地, 有 $\mathcal{H}_{d''}^{0,0} := \ker d' \cap \bar{\mathbf{q}}$, $\mathcal{H}_{d''}^{0,0} := \ker d'' \cap \bar{\mathbf{q}}$. 映射 $\mathcal{H}_{d''}^{p,q} \rightarrow \mathcal{H}_{d''}^{p,q}(\bar{\mathbf{q}})$ 为一个同构映射. 对于任意的 $0 \leq p \leq n$ 和 $0 \leq q \leq n$, 有关于空间 $\Lambda^{p,q} \otimes \bar{\mathbf{q}}$ 的直和分解:

$$1 = \mathcal{H}_{d''}^{p,q} + d''d''^\dagger + d''^\dagger d'', \quad (2.16)$$

$$1 = \mathcal{H}_{d'}^{p,q} + d'd'^\dagger + d'^\dagger d', \quad (2.17)$$

其中 $\mathcal{H}_{d''}^{p,q} : \Lambda^{p,q} \otimes \bar{\mathbf{q}} \rightarrow \mathcal{H}_{d''}^{p,q}$ 和 $\mathcal{H}_{d'}^{p,q} : \Lambda^{p,q} \otimes \bar{\mathbf{q}} \rightarrow \mathcal{H}_{d'}^{p,q}$ 为投影算子, $d''^\dagger$ 为算子 d'' 的 Moore-Penrose 逆.

引理 2.3 算子 $d''^\dagger$ 与 d' 是可交换的, 即在空间 $\Lambda^{p,q}$ 上成立等式 $d''^\dagger d' = d' d''^\dagger$.

证明 设 $\psi \in \Lambda^{p,q}$, 具体而言有 $\psi = \psi_{I\bar{J}} z^I \wedge \bar{z}^{\bar{J}}$, 其中 $z^I = z^{i_1} \wedge \cdots \wedge z^{i_p}$, $\bar{z}^{\bar{J}} = \bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{z}^{j_q}$ 且 $\psi_{I\bar{J}} = \psi_{i_1, \dots, i_p, \bar{j}_1, \dots, \bar{j}_q}$. 根据 (2.7), 可得

$$d'z^\alpha = -\frac{1}{2}C_{ab}^\alpha z^a \wedge z^b, \quad d'\bar{z}^\alpha = -C_{c\bar{d}}^\alpha z^c \wedge \bar{z}^{\bar{d}},$$

则可以得出下面的等式:

$$\begin{aligned} d'z^I &= d'(z^{i_1} \wedge \cdots \wedge z^{i_p}) \\ &= -\frac{1}{2}(C_{a_1 b_1}^{i_1} z^{a_1} \wedge z^{b_1} \wedge z^{i_2} \wedge \cdots \wedge z^{i_p} + \cdots + (-1)^{p-1} z^{i_1} \wedge z^{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{a_p b_p}^{i_p} z^{a_p} \wedge z^{b_p}). \end{aligned}$$

根据 $d''^\dagger$ 的定义, 可得

$$d''^\dagger \bar{z}^J = \xi_{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{q-1}}^{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_q} \bar{z}^{r_1} \wedge \dots \wedge \bar{z}^{r_{q-1}}. \quad (2.18)$$

一方面, 由定义可知

$$\begin{aligned} d'\psi &= \psi_{I\bar{J}} d'(z^I) \wedge \bar{z}^J + (-1)^p \psi_{I\bar{J}} z^I \wedge d'(\bar{z}^J) = \psi_{I\bar{J}} d'(z^I) \wedge \bar{z}^J, \\ d''^\dagger d'\psi &= \psi_{I\bar{J}} d'(z^I) \wedge d''^\dagger(\bar{z}^J). \end{aligned} \quad (2.19)$$

另一方面, 由定义可知

$$\begin{aligned} d''^\dagger \psi &= \psi_{I\bar{J}} d''^\dagger(z^I \wedge \bar{z}^J) = \psi_{I\bar{J}} [d'']^+ z^I \wedge \bar{z}^{r_1} \wedge \dots \wedge \bar{z}^{r_{q-1}}, \\ d' d''^\dagger \psi &= \psi_{I\bar{J}} [d'']^+ d'(z^I) \wedge \bar{z}^{r_1} \wedge \dots \wedge \bar{z}^{r_{q-1}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

因此, 根据 (2.18)–(2.20), 可得 $d''^\dagger d' = d' d''^\dagger$. $\square$

引理 2.4 设 $\eta \in \Lambda^{p,q}$ 为任意的闭形式且 $\mathcal{H}_{d''}^{p,q} = \mathcal{H}_{d'}^{p,q}$. 如果形式 η 关于算子 d' 是正合的, 则 η 关于算子 $d' d''$ 是正合的.

证明 由于 η 关于算子 d' 是正合的, 因此有 $\eta = d'\gamma$. 根据 (2.16), 有

$$\gamma = \mathcal{H}_{d''}^{p,q}(\gamma) + d'' d''^\dagger \gamma + d''^\dagger d'' \gamma,$$

则

$$\eta = d' \mathcal{H}_{d''}^{p,q}(\gamma) + d' d'' d''^\dagger \gamma + d' d''^\dagger d'' \gamma. \quad (2.21)$$

一方面, 由 $\mathcal{H}_{d''}^{p,q} = \mathcal{H}_{d'}^{p,q}$ 可知 (2.21) 的第一项为零. 另一方面, 有

$$d' d'' \gamma = -d'' d' \gamma = -(d' + d'') d' \gamma = -d\eta = 0. \quad (2.22)$$

根据 η 为闭形式, 可得上述最后一个等式. 由引理 2.3 和 (2.22) 可得 $d' d''^\dagger d'' \gamma = d''^\dagger d' d'' \gamma = 0$, 则 (2.21) 的最后一项为零. 因此, $\eta = d' d'' \gamma$, 即 η 关于算子 $d' d''$ 是正合的. $\square$

引理 2.5 假设 $\varphi_\nu \in \Lambda^{0,1} \otimes \bar{q}$, $\nu = 2, \dots, K$,

$$d'' \varphi_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\alpha+\beta=\nu} [\varphi_\alpha, \varphi_\beta], \quad d'' \varphi_1 = 0,$$

则有

$$d'' \left(\sum_{\nu+\gamma=K+1} [\varphi_\nu, \varphi_\gamma] \right) = 0.$$

证明 与文献 [12, 引理 4.2] 的证明类似. $\square$

特别地, 当 $\varphi \in \mathcal{H}_{d''}^{0,1} = \mathcal{H}_{d''}^{0,1}(\bar{q}) \subset \Lambda^{0,1} \otimes \bar{q}$ 时, 有如下引理.

引理 2.6 设 $\omega_0 \in \Lambda^{n,0}$ 为 $(n,0)$ 形式, 对于任意的 $\varphi \in \mathcal{H}_{d''}^{0,1}$, 如果 $\mathcal{H}_{d''}^{p,q} = \mathcal{H}_{d'}^{p,q}$, 则 $\varphi \lrcorner \omega_0 \in \ker d'$ 为 $(n-1,1)$ 形式.

证明 设 $\varphi = \varphi_{\alpha}^k \bar{z}^{\alpha} \otimes z_k$ 且 $\omega_0 = z^1 \wedge \cdots \wedge z^n$, 则有

$$\varphi \lrcorner \omega_0 = \sum_{k, \alpha} (-1)^{n-1} \varphi_{\alpha}^k \bar{z}^{\alpha} \wedge \cdots \wedge \hat{z}^k \wedge \cdots \wedge z^n.$$

而且有 $d'\phi = 0$, 即

$$d'(\phi) = \varphi_{\alpha}^k d'(\bar{z}^{\alpha}) \otimes z_k - \varphi_{\alpha}^k \bar{z}^{\alpha} \otimes d'(z_k) = \frac{1}{2} \sum_{k, \alpha} \varphi_{\alpha}^k C_{ab}^k \bar{z}^{\alpha} \wedge z^a \wedge z^b = 0.$$

因为 φ_{α}^k 是可逆的, 故可以得到 $C_{ab}^k = 0$. 因此,

$$\begin{aligned} d'(\varphi \lrcorner \omega_0) &= \sum_{k, \alpha} ((-1)^{n-1} \varphi_{\alpha}^k d'(\bar{z}^{\alpha}) \wedge z^1 \wedge \cdots \wedge \hat{z}^k \wedge \cdots \wedge z^n - (-1)^{n-1} \varphi_{\alpha}^k \bar{z}^{\alpha} \wedge d'(z^1 \wedge \cdots \wedge \hat{z}^k \wedge \cdots \wedge z^n)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k, \alpha, a, b} \varphi_{\alpha}^k ((-1)^{n-1} C_{ab}^1 \bar{z}^{\alpha} \wedge z^a \wedge z^b \wedge z^2 \wedge \cdots \wedge \hat{z}^k \wedge \cdots \wedge z^n \\ &\quad - C_{ab}^n \bar{z}^{\alpha} \wedge z^1 \wedge \cdots \wedge \hat{z}^k \wedge \cdots \wedge z^{n-1} \wedge z^a \wedge z^b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

证毕. □

引理 2.7 设 $\omega_0 \in \Lambda^{n,0}$ 为 $(n,0)$ 形式, 对于任意的 φ , 都有 $\psi \in \mathcal{H}_{d''}^{0,1}$. 设 $\mathcal{H}_{d''}^{p,q} = \mathcal{H}_{d'}^{p,q}$, 则有 $[\phi, \psi] \lrcorner \omega_0 = -d'(\psi \lrcorner (\phi \lrcorner \omega_0))$.

证明 对 $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{d''}^{0,1} \subset \Lambda^{0,1} \otimes \bar{\mathfrak{q}}$, 根据 (2.15), 可得

$$[\phi, \psi] \lrcorner \omega_0 = \phi \lrcorner d'(\psi \lrcorner \omega_0) - d'(\psi \lrcorner (\phi \lrcorner \omega_0)) + \psi \lrcorner d'(\phi \lrcorner \omega_0).$$

此外, 根据引理 2.6, 有 $\phi \lrcorner d'(\psi \lrcorner \omega_0) = \psi \lrcorner d'(\phi \lrcorner \omega_0) = 0$. 因此, 可得 $[\phi, \psi] \lrcorner \omega_0 = -d'(\psi \lrcorner (\phi \lrcorner \omega_0))$. 至此完成了引理 2.7 的证明. □

3 结论

现在可以用数学归纳法求解第 1 节研究背景中所提及的 Maurer-Cartan 迭代方程组.

定理 3.1 设 ω_0 为 $\Lambda^{n,0}$ 上的任意的 $(n,0)$ 形式, $\varphi_1 \in \mathcal{H}_{d''}^{0,1}(\bar{\mathfrak{q}})$. 如果 $\mathcal{H}_{d''}^{p,q} = \mathcal{H}_{d'}^{p,q}$ 并且 $E_{ij}^k = C_{ab}^c = C_{l\gamma}^{\bar{\beta}} = 0$, 则当 t 足够小时, 存在一个收敛的形式幂级数 $\phi(t) = \phi_1 t + \phi_2 t^2 + \cdots + \phi_K t^K + \cdots$, 该幂级数满足:

- (a) $d''\phi(t) = \frac{1}{2}[\phi(t), \phi(t)];$
- (b) 对任意的 $i \geq 2$, 有 $\phi_i \lrcorner \omega_0 = \frac{1}{2}d'\psi_i$.

证明 在幂零 Lie 代数的情形下, 和是有限的, 故是收敛的, 对于一般的情形在 Kodaira 和 Spencer 的经典理论中可知形式幂级数收敛性^[14]. 由归纳法, 假设对于 $2 \leq K \leq N$, 有

$$d''\phi_K = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{K-1} [\phi_{K-i}, \phi_i] \right), \quad \phi_K \lrcorner \omega_0 = d'\psi_K,$$

则有 $d'(\phi_K \lrcorner \omega_0) = 0$. 我们需要找到 ϕ_{N+1} 使得

$$d''\phi_{N+1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N [\phi_{N-i+1}, \phi_i] \right), \quad d'(\phi_{N+1} \lrcorner \omega_0) = 0 \quad \text{且} \quad \phi_{N+1} \lrcorner \omega_0 = d'\psi_{N+1}.$$

由引理 2.7 可以得到

$$\left(\sum_{i=1}^N[\phi_{N-i+1}, \phi_i]\right) \lrcorner \omega_0 = -d' \left(\sum_{i+k=N+1} \varphi_i \lrcorner \varphi_k \lrcorner \omega_0 \right).$$

由引理 2.5 可以得到

$$d'' \left(\sum_{i=1}^N[\phi_{N-i+1}, \phi_i] \right) \lrcorner \omega_0 = -d'' d' \left(\sum_{i+k=N+1} \varphi_i \lrcorner \varphi_k \lrcorner \omega_0 \right) = 0.$$

由引理 2.4 可以得到

$$-d' \left(\sum_{i+k=N+1} \varphi_i \lrcorner \varphi_k \lrcorner \omega_0 \right) = d'' d' (\Psi'_{N+1}). \quad (3.1)$$

由 (2.16) 可以得到

$$\Psi'_{N+1} = \mathcal{H}_{d''}^{p,q} \Psi'_{N+1} + d'' d''^\dagger \Psi'_{N+1} + d''^\dagger d'' \Psi'_{N+1}.$$

则有

$$d' \Psi'_{N+1} = d' \mathcal{H}_{d''}^{p,q} \Psi'_{N+1} + d' d'' d''^\dagger \Psi'_{N+1} + d' d''^\dagger d'' \Psi'_{N+1} = -d'' (d' d''^\dagger \Psi'_{N+1}) + d''^\dagger (d' d'' \Psi'_{N+1}).$$

由引理 2.3 和条件 $\mathcal{H}_{d''}^{p,q} = \mathcal{H}_{d'}^{p,q}$ 可知上式中第二个等号成立. 记

$$\Psi''_{N+1} = -d' d''^\dagger \Psi'_{N+1}, \quad \Psi'''_{N+1} = d' d'' \Psi'_{N+1},$$

则

$$d' \Psi'_{N+1} = d'' \Psi''_{N+1} + d''^\dagger \Psi'''_{N+1}, \quad (3.2)$$

其中 $d''^\dagger \Psi'''_{N+1} = d' \Psi_{N+1}$. 一方面, 将 (3.2) 代入 (3.1) 的右端可以得到 $d'' d' (\Psi'_{N+1}) = d'' d''^\dagger \Psi'''_{N+1} = d'' d' \Psi_{N+1}$. 另一方面, (3.1) 的左端等于 $(\sum_{i=1}^N[\phi_{N-i+1}, \phi_i]) \lrcorner \omega_0$. 因此, 有

$$d'' \left(\frac{1}{2} d' \Psi_{N+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N[\phi_{N-i+1}, \phi_i] \right) \lrcorner \omega_0.$$

因此, 取 $\phi_{N+1} = \frac{1}{2} d' \Psi_{N+1} \lrcorner \omega_0^*$, 其中 ω_0^* 是 ω_0 的对偶, $\omega_0^* = z_1 \wedge \cdots \wedge z_n$. 至此完成了定理 3.1 的证明. $\square$

致谢 作者对审稿人指出的初稿中的不足深表感谢. 感谢刘克峰教授、夏炜教授和李明教授给出的宝贵意见和勉励. 感谢饶胜教授、胡正宇教授和万学远教授给出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Akahori T, Miyajima K. An analogy of Tian-Todorov theorem on deformations of CR-structures. *Compos Math*, 1993, 85: 57–85
- 2 Bogomolov F. Hamiltonian Kahlerian manifolds. *Soviet Math Dokl*, 1918, 19: 1462–1465
- 3 Console S, Fino A, Poon Y S. Stability of abelian complex structures. *Internat J Math*, 2006, 17: 401–416
- 4 Fino A, Tomassini A. A survey on strong KT structures. *Bull Math Soc Sci Math Roumanie (NS)*, 2009, 52: 99–116
- 5 Gigante G, Tomassini G. Deformations of complex structures on a real Lie algebra. In: *Complex Analysis and Geometry. The University Series in Mathematics*. Boston: Springer, 1993, 377–385

- 6 Giusti F, Podestà F. Real semisimple Lie groups and balanced metrics. *Rev Mat Iberoam*, 2023, 39: 711–729
- 7 Guo Y, Zheng F. Hermitian geometry of Lie algebras with abelian ideals of codimension 2. *Math Z*, 2023, 304: 51
- 8 Iacono D, Manetti M. An algebraic proof of Bogomolov-Tian-Todorov theorem. In: *Deformation Spaces: Perspectives on Algebraic-Geometric Moduli*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2010, 113–133
- 9 Kawamata Y. Unobstructed deformations, a remark on a paper of Z. Ran. *J Algebraic Geom*, 1992, 1: 183–190
- 10 Liu K, Rao S. Remarks on the Cartan formula and its applications. *Asian J Math*, 2012, 16: 157–170
- 11 Liu K, Rao S, Wan X. Geometry of logarithmic forms and deformations of complex structures. *J Algebraic Geom*, 2019, 28: 773–815
- 12 Liu K, Rao S, Yang X. Quasi-isometry and deformations of Calabi-Yau manifolds. *Invent Math*, 2015, 199: 423–453
- 13 MacLaughlin C, Pedersen H, Poon Y S, et al. Deformation of 2-step nilmanifolds with abelian complex structures. *J Lond Math Soc* (2), 2006, 73: 173–193
- 14 Morrow J A, Kodaira K. *Complex Manifolds*, vol. 355. Providence: Amer Math Soc, 2006
- 15 Nijenhuis A, Richardson R W Jr. Deformations of Lie algebra structures. *Indiana Univ Math J*, 1967, 17: 89–105
- 16 Popovici D. Holomorphic deformations of balanced Calabi-Yau $\partial\bar{\partial}$ -manifolds. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2019, 69: 673–728
- 17 Ran Z. Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundles. *J Algebraic Geom*, 1992, 1: 279–291
- 18 Rao S, Zou Y. On Tian-Todorov lemma and its applications to deformation of CR-structures. *Math Z*, 2021, 297: 943–960
- 19 Rollenske S. Geometry of nilmanifolds with left-invariant complex structure and deformations in the large. *Proc Lond Math Soc* (3), 2009, 99: 425–460
- 20 Salamon S M. Complex structures on nilpotent Lie algebras. *J Pure Appl Algebra*, 2001, 157: 311–333
- 21 Tian G. Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Peterson-Weil metric. In: *Mathematical Aspects of String Theory*. Singapore: World Sci Publ, 1987, 629–646
- 22 Todorov A N. The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds I. *Comm Math Phys*, 1989, 126: 325–346
- 23 Vezzoni L, Yang B, Zheng F. Lie groups with flat Gauduchon connections. *Math Z*, 2019, 293: 597–608
- 24 Wang Q, Yang B, Zheng F. On Bismut flat manifolds. *Trans Amer Math Soc*, 2020, 373: 5747–5772
- 25 Xia W. Deformations of Dolbeault cohomology classes for Lie algebra with complex structures. *Ann Global Anal Geom*, 2021, 60: 709–734
- 26 Zhao Q, Zheng F. Complex nilmanifolds and Kähler-like connections. *J Geom Phys*, 2019, 146: 103512

Tian-Todorov theorem on the deformation of CR-structures on Lie algebras

Jiashuo Song

Abstract In this paper, we introduce the Tian-Todorov theorem concerning deformations of CR (Cauchy-Riemann)-structures on Lie algebras. We obtain some conclusions about the smoothing of Kuranishi spaces on Lie algebras with respect to the deformation of CR-structures, i.e., under the assumptions that the constants of the CR-structures are zero, the cohomology groups of operators d' and d'' are equal and that the differential operator d can be decomposed into the sum of d' and d'' , it can be concluded that the deformation of CR-structures on Lie algebras is unobstructed (see Theorem 3.1).

Keywords deformation of the CR-structure, Tian-Todorov theorem, CR-structure on Lie algebras

MSC(2020) 32V05, 32G07, 57T15

doi: 10.1360/SSM-2024-0059