



复 Wiener-Itô 混沌分解的一些新进展

献给钱敏平教授 86 寿辰

陈慧萍¹, 陈勇², 刘勇^{3*}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

2. 江西师范大学数学与统计学院, 南昌 330022;

3. 北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: chenhp@amss.ac.cn, zhishi@pku.org.cn, liuyong@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2024-09-29; 接受日期: 2025-02-12; 网络出版日期: 2025-04-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12461029 和 12231002) 资助项目

摘要 本综述总结复 Wiener-Itô 混沌分解近期的进展, 主要包括两方面的内容: 复 Wiener-Itô 重积分与实 Wiener-Itô 重积分之间相互表示的刻画, 复四阶矩定理及相关的收敛速率.

关键词 复 Wiener-Itô 混沌分解 复 Wiener-Itô 重积分 2 维实 Wiener-Itô 重积分 四阶矩定理 Berry-Esséen 界 收敛速率 Malliavin 分析

MSC (2020) 主题分类 60H05, 60H07, 60G15, 60F05

1 引言

随机分析学中的混沌分解 (chaos decomposition) 理论应该是从 1938 年 Wiener^[110] 发表名为 “The Homogeneous Chaos” 的论文开始的. Wiener 的想法是将奇异或受噪声影响的信号分解成某种 “简单随机变量” 单项式级数的形式, 称为多项式混沌 (polynomial chaos). 实际上, Wiener 意识中 “混沌” 的含义应该更广些, 包括随机性 (randomness)、奇异性 (singularity) 甚至无序性 (disorder) 等. Wiener 在这篇原创性论文中主要采用的方法是他自己发展起来的时空调和分析技术与广义时空 Birkhoff 个别遍历定理.

1947 年, Cameron 和 Martin^[9] 构造了经典 Wiener 空间上的平方可积泛函空间 $L^2(C_0[0, 1], P^W)$ 的一组完备正交基:

$$\Phi_{m,p} = H_m \left(\int_0^1 \alpha_p(s) dB(s) \right), \quad m \geq 0, \quad p \geq 1, \quad (1.1)$$

其中, $H_m(x)$ 是 m 阶 Hermite 多项式 (其定义见 (2.1) 和 (2.2)), $\{\alpha_p, p \geq 1\}$ 是 $L^2[0, 1]$ 上的一组完备正交基.

英文引用格式: Chen H P, Chen Y, Liu Y. Some new progress in complex Wiener-Itô chaos decomposition (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1349–1382, doi: 10.1360/SSM-2024-0303

1951 年, Itô^[50] 在其影响深远的论文中引入了关于正态随机测度 (normal random measure) 的 Wiener 重积分 (multiple Wiener integral), 改进并极大地发展了 Wiener, Cameron 和 Martin 的结果. 所谓正态随机测度是 Brown 运动的一种推广.

定义 1.1 (正态随机测度, 参见文献 [50, 第 158 页, 定义] 和 [83, 第 1.1.2 小节]) 设 $(T, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个测度空间, μ 是 σ -有限的测度, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个完备的概率空间, $W = \{W(B), B \in \mathcal{B}, \mu(B) < \infty\}$ 是一个零均值的 Gauss 系 (normal system 或 Gaussian system). 称 W 是 $(T, \mathcal{B}, \mu)$ 上的正态随机测度, 如果对于任意的 $B, C \in \mathcal{B}$, $\mu(B) < \infty$, $\mu(C) < \infty$, 有

$$E[W(B)W(C)] = \mu(B \cap C).$$

记 $\mathcal{F}^W$ 是 W 生成的事件域, $L^2(\Omega, \mathcal{F}^W, P)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}^W, P)$ 上平方可积随机变量全体. Itô 在文献 [50, 第 3 节] 中建立了正态随机测度意义下的 Wiener 重积分¹⁾ 与 Hermite 多项式之间的关系, 证明了不同重数的 Wiener 重积分是正交的. 具体到经典 Wiener 空间, Itô 证明了 Cameron 和 Martin 给出的完备正交基 (1.1) 的 Wiener 重积分形式的表示, 即

$$H_m \left(\int_0^1 \alpha_p(s) dB(s) \right) = \int_{[0,1]^m} \alpha_p(t_1) \cdots \alpha_p(t_m) dB(t_1) \cdots dB(t_m). \quad (1.2)$$

进一步地, Itô 在文献 [50, 第 5 节] 中还得到了上述随机重积分与现在称为 Itô 随机累次积分 (iterated Itô integral) 之间的关系, 即等式 (1.2) 右端等于 $m! \int_0^1 \int_0^{t_m} \cdots \int_0^{t_2} \alpha_p(t_1) \cdots \alpha_p(t_m) dB(t_1) \cdots dB(t_m)$. 因此, Itô 给出了 $L^2(\Omega, \mathcal{F}^W, P)$ 的正交直和分解, 即现在教科书和文献中称为 Wiener-Itô 混沌分解 (chaos decomposition) 的标准形式, 而 Wiener 重积分现在也通常被称为 Wiener-Itô 重积分, 混沌分解有时也称为混沌展开 (chaos expansion). 关于正态随机测度的 Wiener-Itô 重积分和 Brown 运动的 Itô 累次积分的具体定义, 可参见文献 [50, 58, 80, 83, 84], 特别是文献 [58, 第 9 节] 关于 Wiener-Itô 重积分和累次积分的叙述与解释对初学者更为友好.

从现在的观点看, 与 Wiener 给出的“简单随机变量”单项式相关的重积分应该对应 Stratonovich 重积分, 而且 Wiener 想法中的“简单随机变量”不仅仅是 Gauss 随机变量. 在正态随机测度情形时, Itô 利用等式 (1.2) 正交化了 Wiener 的多项式混沌. 1988 年, Hu^[42] 及 Hu 和 Meyer^[45, 46] 建立了 Stratonovich 重积分与 Wiener-Itô 重积分之间相互表示的公式, 即 Hu-Meyer 公式.

受量子场论发展的影响, 1956 年, Segal^[98] 力图发展 Hilbert 空间上的积分与调和理论. 虽然 Segal 的理论仅是基于有限可加的测度, 但他指出实 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 上的平方可积函数类与 $\mathfrak{H}$ 复化空间 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 上的对称张量之间有结构上的等价性. 这是在抽象空间上定义随机重积分的关键想法. 故而, 在有些文献中也将 Wiener-Itô 混沌分解称为 Wiener-Itô-Segal 混沌分解^[48].

1967 年, Gross^[33] 建立的抽象 Wiener 空间理论为无穷维 Gauss 空间提供了正确的测度理论和有效的分析框架. 1987 年, Stroock^[104] 利用 Malliavin 导数 (也称为 Gross-Sobolev 导数) 和散度算子给出了计算 Wiener-Itô 重积分的积分核函数的方法, 即 Stroock 公式 (参见定理 2.2). 这个公式不仅提供了具体的计算方法, 也建立了混沌分解与 Malliavin 分析之间深刻的联系.

Wiener-Itô 重积分和混沌分解是随机分析学中优美而深刻的理论, 已经有了非常深入的研究和丰富的结果. 它作为强有力的分析方法, 在理论和应用概率、随机过程、统计学、数学物理和金融数学等

1) 事实上, 文献 [50] 中的 Wiener 重积分是在 μ 为连续测度下定义的. 所谓 μ 为连续测度是指对于任意满足 $\mu(B) < \infty$ 的 $B \in \mathcal{B}$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在 B 的一个分解, 即两两不交的 $B_i \in \mathcal{B}$, $k = 1, \dots, n$ 使得 $B = \bigcup_{k=1}^n B_k$, 而且 $\mu(B_k) < \varepsilon$, $k = 1, \dots, n$.

领域发挥着重要的作用 (参见文献 [30, 41, 42, 52, 63–65, 80, 83] 及其中的参考文献). 例如, 混沌分解建立了 Gauss 等距过程的平方可积泛函与 Fock 空间 $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \{I_1(f), f \in \mathfrak{H}\}^{\otimes n}$ 之间的等距同构, 使得可以利用 Wiener-Itô 重积分进行数学物理的研究, 可参见文献 [42, 第 5 章] 了解更多的细节. 这种等距同构关系对建立量子概率理论^[70] 和白噪声分析理论起到了重要的作用, 可参见文献 [38]. 进一步地, Itô 建立的 Wiener-Itô 重积分与 Hermite 多项式之间的联系 (参见文献 [50, 第 3 节]) 与 Wick 积有着密切的关系, 而后者在随机量子化方程重整化理论中有着广泛的应用 (参见文献 [27, 34, 35, 71, 72, 96, 109]). 另外, 混沌分解是在具有 Gauss 测度的无穷维空间中构造不同形式的广义 Wiener 泛函时的重要工具 (参见文献 [38, 57, 91, 104]). 混沌分解或者混沌展开的思想与方法在随机分析中有着广泛的应用, Skorohod^[101] 使用混沌分解的想法建立了非适应随机过程的随机积分, Nualart 和 Pardoux^[86] 作了进一步的研究. 1992 年, Nualart 和 Vives^[89, 90] 开始使用混沌展开研究局部时理论. Ocone^[92] 也开始研究非线性滤波理论中某些泛函的混沌展开. Carmona 和 Nualart^[12] 利用混沌分解得到的估计证明了扩散过程 Onsager-Machlup 泛函的存在性. Hu 和 Meyer^[44] 以及 Johnson 和 Kallianpur^[53] 使用混沌展开来讨论 Feynman 积分. 定义在无穷维空间上的无穷维 Ornstein-Uhlenbeck 算子和半群也可以通过混沌分解来研究 (参见文献 [42, 80, 83]). 混沌分解在随机分析当前的前沿方向中也扮演着重要的角色, 文献 [35, 第 10 章] 将 Wiener-Itô 混沌分解作为正则结构理论中的一种特例. Wiener-Itô 混沌分解也是平稳 (stationary) 临界和上临界随机偏微分方程研究中的一种主要工具, 而这类方程并不能纳入到正则结构的理论框架中 (参见文献 Cannizzaro 和 Toninelli 的随机偏微分方程讲义 [11] 及其中相关的参考文献).

在 Gauss 过程非线性泛函的中心极限定理和非中心极限定理的研究中, 混沌分解同样扮演着重要的角色 (参见文献 [63, 66, 68, 105] 及其中的参考文献). 称随机变量 F 为混沌随机变量, 如果存在 $m \geq 1$, 使得 $F = I_m(f_m)$, 其中 $I_m(f_m)$ 定义参见定义 2.3; 称随机过程 $\{F_t : t \in T\}$ 为混沌过程, 如果存在 $m \geq 1$, 使得对于任意的 $t \in T$, 有 $F_t = I_m(f_{t,m})$, 其中 T 是指标集. 混沌随机变量和混沌随机过程在概率论、随机过程理论与应用、统计学、动力系统、数学物理和统计信号过程等领域有着多方面的应用 (参见文献 [11, 35, 41, 59, 63, 64, 66, 102, 106]). 因此, 对 Wiener-Itô 重积分或与混沌展开相关的渐近性质的探讨是既经典又现代的研究方向. 近二十年来, Wiener-Itô 重积分的中心极限定理, 即所谓的四阶矩定理 (fourth moment theorem) 取得了重要的进展. 四阶矩定理及其应用的研究成为重要且活跃的课题. 对四阶矩定理的关注可以追溯到 20 世纪 80–90 年代 de Jong^[28, 29] 关于广义随机二次型和多重线性形式中心极限定理的研究. 2005 年, Nualart 和 Peccati^[87] 利用 Brown 运动的内蕴时间变换 (即 Dambis-Dubins-Schwarz 定理) 证明了对于任意固定的 $q \geq 2$ 和 q 阶 Wiener-Itô 混沌序列 $\{F_n = I_q(f_n), n \geq 1\}$, 如果 $E[F_n^2] = 1$, 则 F_n 依分布收敛到标准正态分布 $N(0, 1)$ 当且仅当, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $E[F_n^4] \rightarrow 3$. 之后, 与这一定理相关的研究得到迅速发展, 读者可以通过 Nourdin 等建立的网站 <https://sites.google.com/site/malliavinstein/home> 来了解这一方向几乎所有的文献和最新进展. 第 3.1 小节将继续讨论这个问题.

在实 Wiener-Itô 重积分和混沌分解论文 [50] 发表后不久, 1952 年, Itô^[51] 又建立了关于复正态随机测度 (complex normal random measure) 的复 Wiener-Itô 重积分理论. 复正态随机测度也可以认为是复 Brown 运动的推广.

定义 1.2 (复正态随机测度, 参见文献 [51, 第 I 章] 和 [24, 第 3.2 小节]) 设 $Z = X + iY$ 是复随机变量. 称 Z 是复正态随机变量, 如果 X 和 Y 是独立的实随机变量, 而且服从相同的零均值正态分布 (包括退化正态分布). 称复随机变量族 $\mathcal{Z} = \{Z_\theta, \theta \in \Theta\}$ 是复 Gauss 系 (complex normal system 或 complex Gaussian system), 如果对于指标集 Θ 中任意有限个指标 $\theta_1, \dots, \theta_n$ 和任意的复数 $c_1, \dots, c_n$,

$\sum_{k=1}^n c_k Z_{\theta_k}$ 是复正态随机变量.

设 $(T, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个测度空间, μ 是 σ -有限的测度, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个完备的概率空间, $M = \{M(B), B \in \mathcal{B}, \mu(B) < \infty\}$ 是一个复 Gauss 系. 称 M 是 $(T, \mathcal{B}, \mu)$ 上的复正态随机测度, 如果对于任意的 $B, C \in \mathcal{B}, \mu(B) < \infty, \mu(C) < \infty$, 有

$$E[M(B)\overline{M(C)}] = \mu(B \cap C).$$

在文献 [51, 第 II 和 III 章] 中, Itô 定义了 μ 连续的复正态随机测度意义下的复 Wiener-Itô 重积分, 并给出其若干性质. 例 2.1 将给出关于复 Brown 运动的复 Wiener-Itô 重积分的具体形式, 以便读者阅读.

Itô 在文献 [51, 公式 (12.1)] 中定义了复 Hermite 多项式, 被 Chen 和 Liu^[23] 称为 Hermite-Laguerre-Itô 多项式. 接着, Itô 在文献 [51, 公式 (13.1)] 中给出了复 Hermite 多项式与复 Wiener-Itô 重积分之间的联系, 并利用这些结论研究了正态螺旋线 (normal screw lines) (如复 Wiener 过程和复平稳正态过程), 得到了正态螺旋线的推移变换 (shift transformation) 的谱结构和遍历性. 之后, 学者们对复 Gauss 系, 特别是复 Wiener-Itô 重积分、Hermite-Laguerre-Itô 多项式的研究兴趣持续增长. 在文献 [37, 第 6 章] 中, Hida 从分析的观点出发, 在复白噪声的框架下研究了复 Wiener-Itô 重积分. Chen 和 Liu^[24], Chen 等^[21] 以及 Campese^[10] 得到了复 Wiener-Itô 重积分对应的四阶矩定理, 可称之为复四阶矩定理 (参见定理 4.2). Chen^[19] 证明了复 Wiener-Itô 重积分的乘积公式和 Üstünel-Zakai 独立性判据. 文献 [18, 23, 25] 研究了复 Ornstein-Uhlenbeck 过程、Ornstein-Uhlenbeck 算子和半群, 以及复 Wiener-Itô 重积分的一系列性质, 定义了复 Malliavin 分析中的基本概念, 并且得到了相关的基本性质. 关于 Hermite-Laguerre-Itô 多项式精细的分析性质及其与 Hermite 多项式之间的关系等更多的讨论也可参见文献 [2, 26, 49].

对复 Gauss 随机场的研究具有强烈的应用背景. 例如, 在宇宙微波背景辐射的概率模型中, 探究和理解高频行为是至关重要的课题, 其中关键步骤是考虑某些复 Gauss 从属场 (complex Gaussian subordinated field) Fourier 系数的中心极限定理, 而其中的 Fourier 系数与某个复 Wiener-Itô 重积分同分布 (参见文献 [54, 66, 67]). 复时空白噪声驱动的复 Ginzburg-Landau 方程是复 Φ_d^4 场 (其中 $d = 2, 3$) 对应的随机量子化方程. 这是一个高度奇异的随机偏微分方程, 复 Wiener-Itô 重积分自然地出现在该方程解的重整化过程中 (参见文献 [17, 39, 40]).

Arató 等^[4] 最先引入复 Ornstein-Uhlenbeck 过程对 Chandler 摆动 (Chandler wobble) 或与地球自转有关的纬度变化进行建模, 而这个模型在金融、经济物理学 (Econophysics) 和数学物理中也有着广泛的应用. Chen 等^[20] 将一维复 Ornstein-Uhlenbeck 过程作为随机粒子在定常磁场中运动的数学模型, 研究了该过程熵产生率的涨落定理; Budhiraja 等^[8] 将复 Ornstein-Uhlenbeck 算子看作正常算子, 将上述涨落定理推广到了多维情形. 在复 Ornstein-Uhlenbeck 过程和复 Vasicek 模型参数估计的统计推断讨论中, 如考虑相合性和渐近正态性, 也使用了复 Wiener-Itô 重积分的技术 (参见文献 [21, 99]). 复 Ornstein-Uhlenbeck 算子的特征函数可以应用到稀有事件的模拟和 Fokker-Planck 方程解的逼近理论中 (参见文献 [107, 112, 113]), 这些特征函数与 Hermite-Laguerre-Itô 多项式有着紧密联系 (参见文献 [23]). 需要特别指出的是, 在通信和信号过程的理论与应用中, 通常会将噪声影响假设为复 Gauss 噪声, 读者可以通过文献 [1, 7, 69, 94] 了解这方面更多的信息.

从研究与复 Gauss 过程相关的实际模型出发, 有必要系统发展复 Wiener 空间上的分析理论. 我们不仅需要对复 Wiener-Itô 重积分的性质有更多理解, 而且需要建立实 Wiener-Itô 重积分与复 Wiener-Itô 重积分之间的联系, 以便更好地应用实 Wiener-Itô 重积分已有的丰富理论来高效地处理与

复 Wiener-Itô 重积分相关的问题. 读者可以通过文献 [65, 76, 80, 83, 88] 等相关文献了解实 Wiener-Itô 重积分理论.

本文总结复 Wiener-Itô 重积分理论两方面的进展: (1) 复 Wiener-Itô 重积分与实 Wiener-Itô 重积分之间相互表示的具体刻画及其应用; (2) 复四阶矩定理及其收敛速率.

以下将用 Gauss-Hilbert 空间和 Gauss 等距过程的理论框架来叙述相关定义、性质和结论. 第 2 节首先回顾实 Gauss 等距过程、Wiener-Itô 混沌分解和 Malliavin 分析的基本内容, 接着简要介绍 Hermite-Laguerre-Itô 多项式、复 Wiener-Itô 混沌分解和复 Malliavin 分析, 这些是之后综述内容所必需的. 第 3 节讨论复 Wiener-Itô 混沌与实 Wiener-Itô 混沌之间关系相互表示的具体公式, 特别是给出得到这些公式背后的动机、直观想法和深刻的观察, 以便更清晰地理解它们之间的内在联系和结构. 另外, 还给出核表示公式的一个新的应用实例—例 3.1. 第 4 节总结复四阶矩定理的 6 个等价条件, 并进一步讨论其收敛速率的相关问题. 第 5 节列出围绕这一课题还可以进一步讨论的一些有意义的问题.

2 复 Wiener 空间上的随机分析

2.1 实 Gauss 等距过程、实 Wiener-Itô 混沌分解和 Malliavin 分析

设 n 为非负整数, n 次 Hermite 多项式 $H_n(x)$ 可以由下面的等式确定:

$$\exp\left\{tx - \frac{1}{2}t^2\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

$H_n(x)$ 是变量 x 的 n 次多项式, 它是 $\exp\{tx - \frac{1}{2}t^2\}$ 关于变量 t Taylor 展开时 $\frac{t^n}{n!}$ 的系数. $\exp\{tx - \frac{1}{2}t^2\}$ 也被称为 Hermite 多项式的生成函数 (generating function). Hermite 多项式也可以采用下面的方式得到:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

性质 2.1 (参见文献 [103, 第 310 页]、[65, 定理 2.5.5] 和 [42, 命题 3.11]) Hermite 多项式满足下面的等式:

$$H_n(x \cos \theta + y \sin \theta) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\cos \theta)^j (\sin \theta)^{n-j} H_j(x) H_{n-j}(y), \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (2.3)$$

关于 Hermite 多项式的具体表达式和更多性质可参见文献 [36, 42, 48, 83, 84].

设 $\mathfrak{H}$ 是实可分 Hilbert 空间, 其上内积记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}}$. $\|h\|_{\mathfrak{H}}$ 表示 $h \in \mathfrak{H}$ 的模. 以下的定义和性质可参见文献 [48, 52, 80, 83, 84].

定义 2.1 给定实可分 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$, 称 $X = \{X(h) : h \in \mathfrak{H}\}$ 是 $\mathfrak{H}$ 上的 Gauss 等距过程 (isonormal Gaussian process), 如果 $X = \{X(h) : h \in \mathfrak{H}\}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上零均值的 Gauss 系, 并且对于任意的 $h, g \in \mathfrak{H}$, 有 $E[X(h)X(g)] = \langle h, g \rangle_{\mathfrak{H}}$.

定义 2.2 记 $\mathcal{H}_n(X)$ 为随机变量族 $\{H_n(X(h)) : h \in \mathfrak{H}, \|h\|_{\mathfrak{H}} = 1\}$ 在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中的线性闭包, 称闭的线性子空间 $\mathcal{H}_n(X)$ 是 X 的 n 阶 Wiener-Itô 混沌.

设 $\{e_i, i \geq 1\}$ 是 $\mathfrak{H}$ 的一组完备标准正交基, $\{\xi_i, i \geq 1\}$ 是一列相互独立同分布的标准 Gauss 随机变量, 则在分布意义下, X 可以被

$$X(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i \rangle_{\mathfrak{H}} \xi_i$$

唯一决定.

设 Λ 是由仅有有限个元素不为 0 的非负整数序列构成的集合. 设 $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Lambda$. 记 $\mathbf{a}! = \prod_{k=1}^{\infty} a_k!$, $|\mathbf{a}| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. 对于 $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Lambda$, 定义 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_k + b_k\}_{k=1}^{\infty}$. 称 $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, 如果对于任意的 $k \geq 1$, 有 $a_k \leq b_k$. 设 $\mathfrak{H}^{\otimes n}$ 和 $\mathfrak{H}^{\odot n}$ 分别为 $\mathfrak{H}$ 的第 n 次张量积和第 n 次对称张量积. 对于 $\mathbf{n} = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Lambda$, 定义 Fourier-Hermite 多项式

$$\mathbf{H}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{n}!}} \prod_{k=1}^{\infty} H_{n_k}(X(e_k)). \quad (2.4)$$

令 $\xi_k = X(e_k)$, 定义 $\xi^{\mathbf{n}} := \prod_{k=1}^{\infty} \xi_k^{n_k}$, 则等式 (2.4) 右端是 Wick 积: $\xi^{\mathbf{n}}$: (参见文献 [52, 定理 3.15]).

性质 2.2 对于任意的 $n \geq 1$, 随机变量族 $\{\mathbf{H}_{\mathbf{n}} : |\mathbf{n}| = n\}$ 构成 $\mathcal{H}_n(X)$ 的一组标准正交基.

对 $\mathfrak{H}$ 的 n 次对称张量积空间 $\mathfrak{H}^{\odot n}$ 赋予模 $\sqrt{n!} \|\cdot\|_{\mathfrak{H}^{\otimes n}}$. 设 $f, g \in \mathfrak{H}$, 记 $\text{symm}(f \otimes g)$ 为 $f \otimes g$ 的对称化张量. 由性质 2.2 可知, 映射

$$I_n \left(\text{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} e_k^{\otimes n_k} \right) \right) := \sqrt{\mathbf{n}!} \mathbf{H}_{\mathbf{n}}$$

是一个从对称张量空间 $\mathfrak{H}^{\odot n}$ 到 n 阶 Wiener-Itô 混沌 $\mathcal{H}_n(X)$ 的线性等距同构, 其中当 $n = 0$ 时, I_0 是从实数空间 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的恒同映射.

定义 2.3 对于任意的 $f \in \mathfrak{H}^{\odot n}$, 称随机变量 $I_n(f)$ 是 f 关于 X 的实 n 重 Wiener-Itô 积分, 简称 n 重 Wiener-Itô 积分. 有时也可以称 $I_n(f)$ 为 f 关于 X 的实 n 阶 Wiener-Itô 混沌.

设 $\sigma(X) = \sigma(\{X(h) : h \in \mathfrak{H}\})$, 即 $\sigma(X)$ 是 Gauss 等距过程 X 生成的事件域.

定理 2.1 (Wiener-Itô 混沌分解) 设 $X = \{X(h) : h \in \mathfrak{H}\}$ 是 $\mathfrak{H}$ 上的 Gauss 等距过程.

(i) 对于任意的 $q \geq 1$, $\mathcal{H}_n(X)$ 在 $L^q(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$ 中稠密.

(ii) $L^2(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$ 可以分解为线性子空间 $\mathcal{H}_n(X)$ 的正交无穷直和,

$$L^2(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n(X),$$

即对于任意的 $F \in L^2(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$, F 可以唯一地展开成

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

上面的级数在 $L^2(\Omega)$ 意义下收敛, 其中, $f_0 = \mathbb{E}[F]$, $I_0(f_0) = \mathbb{E}[F]$, 对于 $n \geq 1$, $f_n \in \mathfrak{H}^{\odot n}$ 而且被 F 唯一决定.

定义 2.4 对于任意给定的 $p, q \geq 0, r = 0, \dots, p \wedge q$, $f \in \mathfrak{H}^{\odot p}$ 和 $g \in \mathfrak{H}^{\odot q}$, 称

$$f \otimes_r g = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{\infty} \langle f, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}} \otimes \langle g, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \rangle_{\mathfrak{H}^{\otimes r}}$$

为 f 和 g 的 r 次压缩 (the r -th contraction). $f \otimes_r g$ 是 $\mathfrak{H}^{\otimes(p+q-2r)}$ 中的元素, 不一定是对称张量, 记其对称化张量为 $f \tilde{\otimes}_r g$.

性质 2.3 设 $f \in \mathfrak{H}^{\odot p}$ 和 $g \in \mathfrak{H}^{\odot q}$, 其中 $p, q \geq 0$, 则 $I_p(f)$ 和 $I_q(g)$ 的乘积公式为

$$I_p(f)I_q(g) = \sum_{r=0}^{p \wedge q} r! \binom{p}{r} \binom{q}{r} I_{p+q-2r}(f \tilde{\otimes}_r g).$$

下面简要叙述一些关于实 Gauss 等距过程的 Malliavin 分析的内容, 特别是 Stroock 公式.

设 $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 上无穷次可微并且其各阶偏导数满足多项式增长的实值函数组成的集合, $\mathcal{S}$ 是光滑随机变量 (smooth random variable) $F = f(X(h_1), \dots, X(h_n))$ 组成的集合, 其中 $h_1, \dots, h_n \in \mathfrak{H}$, $n \geq 1$ 和 $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. 设 $F \in \mathcal{S}$, 定义 F 的 Malliavin 导数如下:

$$DF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(h_1), \dots, X(h_n)) h_i.$$

DF 是取值于 $\mathfrak{H}$ 的随机元. 对于任意的 $p \geq 1$, 导数算子 D 是从 $L^p(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$ 到 $L^p(\Omega; \mathfrak{H})$ 可闭的无界线性算子. 当 $k \geq 2$ 时, 可以归纳地定义 k 阶 Malliavin 导数 $D^k F \in L^p(\Omega; \mathfrak{H}^{\otimes k})$. 对于任意的 $p \geq 1$, $k \geq 0$ 和 $F \in \mathcal{S}$, F 的 $\|\cdot\|_{k,p}$ 模由下式给出:

$$\|F\|_{k,p}^p = \sum_{i=0}^k \mathbb{E}(\|D^i F\|_{\mathfrak{H}^{\otimes i}}^p).$$

定义 $\mathbb{D}^{k,p}$ 为 $\mathcal{S}$ 在 $\|\cdot\|_{k,p}$ 模下的闭包. 设 $\mathbb{D}^{\infty,p} = \bigcap_{k \geq 0} \mathbb{D}^{k,p}$, $\mathbb{D}^{k,\infty} = \bigcap_{p \geq 1} \mathbb{D}^{k,p}$, $\mathbb{D}^\infty = \bigcap_{k \geq 0} \mathbb{D}^{k,\infty}$. 对于 $f \in \mathfrak{H}^{\odot p}$, 有 $I_p(f) \in \mathbb{D}^\infty$, 且对于任意的 $k \geq 0$, 有

$$D^k I_p(f) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-k)!} I_{p-k}(f), & k \leq p, \\ 0, & k > p. \end{cases}$$

由此可以得到如下定理:

定理 2.2 (Stroock 公式^[104]) 设 $F \in L^2(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$, 则 $F = \sum_{p=0}^\infty I_p(f_p)$. 进一步地, 如果 $F \in \mathbb{D}^{n,2}$, 其中 $0 \leq n \leq \infty$, 则当 $n < \infty$ 时对于任意的 $0 \leq p \leq n$, 或者当 $n = \infty$ 时对于任意的 $p \geq 0$, 都有

$$f_p = \frac{1}{p!} \mathbb{E}[D^p F]. \quad (2.5)$$

Stroock 公式是 Wiener-Itô 混沌分解的深化, 给出了重积分 $I_p(f_p)$ 核函数 f_p 的具体计算方法. 该公式的表述和证明也可参见文献 [80, 推论 2.7.8] 和 [83, 练习 1.2.6].

2.2 Hermite-Laguerre-Itô 多项式

设 m 和 n 为非负整数, (m, n) 次复 Hermite 多项式 $J_{m,n}(z, \rho)$ 可以由下面的等式确定:

$$\exp\{\lambda \bar{z} + \bar{\lambda} z - \rho |\lambda|^2\} = \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{\bar{\lambda}^m \lambda^n}{m!n!} J_{m,n}(z, \rho), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.6)$$

其中 $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$. 例如,

$$J_{0,0}(z, \rho) = 1, \quad J_{m,0}(z, \rho) = z^m, \quad J_{0,n}(z, \rho) = \bar{z}^n,$$

$$J_{1,1}(z, \rho) = |z|^2 - \rho, \quad J_{1,2}(z, \rho) = \bar{z}(|z|^2 - 2\rho), \quad J_{2,1}(z, \rho) = z(|z|^2 - 2\rho), \\ J_{3,1}(z, \rho) = z^2(|z|^2 - 3\rho), \quad J_{2,2}(z, \rho) = |z|^4 - 4\rho|z|^2 + 3\rho^2, \quad J_{3,2}(z, \rho) = z(|z|^4 - 6\rho|z|^2 + 6\rho^2), \quad \dots$$

$J_{m,n}(z, \rho)$ 是 $\exp\{\lambda\bar{z} + \bar{\lambda}z - \rho|\lambda|^2\}$ 关于变量 λ 和 $\bar{\lambda}$ Taylor 展开时 $\frac{\bar{\lambda}^m \lambda^n}{m!n!}$ 的系数. 它是关于 $(z, \bar{z})$ 的 $m+n$ 次多项式, 其最高次项为 $z^m \bar{z}^n$. 称 $\exp\{\lambda\bar{z} + \bar{\lambda}z - \rho|\lambda|^2\}$ 为复 Hermite 多项式的生成函数 (参见文献 [51]).

性质 2.4 (参见文献 [51, 公式 (12.1), 定理 15]) $J_{m,n}(z, \rho)$ 有如下的表达式:

$$J_{m,n}(z, \rho) = \sum_{r=0}^{m \wedge n} (-1)^r r! \binom{m}{r} \binom{n}{r} z^{m-r} \bar{z}^{n-r} \rho^r,$$

而且 $\overline{J_{m,n}(z, \rho)} = J_{n,m}(z, \rho)$. 设 $d\mu = \frac{1}{\rho\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{\rho}} dx dy$, 则 $\{J_{m,n}(z) : m, n \geq 0\}$ 是 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mu)$ 的一组完备标准正交基. 当 $m \neq n$ 时,

$$E_{\mu}[J_{m,n}(z, \rho)^2] = E_{\mu}[J_{m,n}(z, \rho) \overline{J_{n,m}(z, \rho)}] = 0.$$

进一步地, 设 $J_{m,n}(z, \rho) = f + ig$, 如果 $m \neq n$, 则

$$\|f\|_{L^2_{\mathbb{C}}(\mu)} = \|g\|_{L^2_{\mathbb{C}}(\mu)}, \quad E_{\mu}[fg] = 0.$$

注 2.1 根据本文作者掌握的文献, 复 Hermite 多项式和公式 (2.6) 最早由 Itô^[51] 提出, 并用于复 Wiener-Itô 重积分的研究. 文献 [23, 定理 2.2] 给出了复 Hermite 多项式与 Laguerre 多项式之间的联系. 因此, 建议可以将复 Hermite 多项式也称为 Hermite-Laguerre-Itô 多项式.

当 $\rho = 2$ 时, 通常将 $J_{m,n}(z, 2)$ 记为 $J_{m,n}(z)$, 并记 $d\nu = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$. 在等式 (2.6) 中令 $\rho = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}(t_1 + it_2)$ 和 $z = x + iy$, 则

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}^m \lambda^n}{m!n!} J_{m,n}(z) = \exp\{\lambda\bar{z} + \bar{\lambda}z - 2|\lambda|^2\} = \exp\left\{t_1x - \frac{1}{2}t_1^2\right\} \exp\left\{t_2y - \frac{1}{2}t_2^2\right\} \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_1^m t_2^n}{m!n!} H_m(x) H_n(y).$$

展开 $\bar{\lambda}^m \lambda^n = \frac{1}{2^{m+n}} (t_1 - it_2)^m (t_1 + it_2)^n$ (或者 $t_1^m t_2^n = i^n (\lambda + \bar{\lambda})^m (\bar{\lambda} - \lambda)^n$) 并比较系数可以得到如下的关系式 (参见文献 [23, 推论 2.8]):

性质 2.5 设 $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, 则实 Hermite 多项式与复 Hermite 多项式满足如下关系:

$$J_{m,l-m}(z) = \sum_{k=0}^l i^{l-k} \sum_{r+s=k} \binom{m}{r} \binom{l-m}{s} (-1)^{l-m-s} H_k(x) H_{l-k}(y), \quad (2.7) \\ H_k(x) H_{l-k}(y) = \frac{i^{l-k}}{2^l} \sum_{m=0}^l \sum_{r+s=m} \binom{k}{r} \binom{l-k}{s} (-1)^s J_{m,l-m}(z).$$

因此, $\{J_{k,l}(z) : k+l=n\}$ 和 $\{H_k(x)H_l(y) : k+l=n\}$ 可以张成 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \nu)$ 的同一线性子空间.

关于 Hermite-Laguerre-Itô 多项式更多的性质可以参见文献 [23-25, 51].

2.3 复 Gauss 等距过程、复 Wiener-Itô 混沌分解

首先, 分别记按照通常的方法复化 $\mathfrak{H}$ 和 $L^2(\Omega)$ 得到的空间为 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 和 $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$. 设 $\{e_k, k \geq 1\}$ 是 $\mathfrak{H}$ 的一组完备标准正交基. 对于 $\mathfrak{h} = f + ig \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$, 其中 $f, g \in \mathfrak{H}$, 定义

$$X_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) := X(f) + iX(g) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathfrak{h}, e_k \rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}} \xi_k. \quad (2.8)$$

设 $\mathfrak{h} = f + ig, \mathfrak{h}' = f' + ig' \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$, 其中 $f, g, f', g' \in \mathfrak{H}$, 则

$$\langle \mathfrak{h}, \mathfrak{h}' \rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}} = \langle f + ig, f' + ig' \rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}} = (\langle f, f' \rangle_{\mathfrak{H}} + \langle g, g' \rangle_{\mathfrak{H}}) + i(-\langle f, g' \rangle_{\mathfrak{H}} + \langle g, f' \rangle_{\mathfrak{H}}).$$

计算可以得到

$$E[X_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) \overline{X_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}')}] = \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{h}' \rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}}.$$

设 $Y = \{Y(h) : h \in \mathfrak{H}\}$ 是 $\mathfrak{H}$ 上与 X 独立同分布的 Gauss 系. 对于 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$, 按照与等式 (2.8) 相同的方式定义 $Y_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})$. 设 $\eta_k = Y(e_k)$, 则 $\{\eta_k = Y(e_k), k \geq 1\}$ 与 $\{\xi_k, k \geq 1\}$ 相互独立同分布. 定义 $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $\{\zeta_k = \xi_k + i\eta_k, k \geq 1\}$ 是相互独立同分布、方差为 2 的复 Gauss 随机变量序列. 本小节中的定义和性质可参见文献 [24].

定义 2.5 设

$$Z(\mathfrak{h}) := \frac{X_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) + iY_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathfrak{h}, e_k \rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}} \zeta_k, \quad \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}. \quad (2.9)$$

称 $Z = \{Z(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}\}$ 为 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 上的复 Gauss 等距过程 (complex isonormal Gaussian process).

性质 2.6 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 上的复 Gauss 等距过程 $Z = \{Z(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}\}$ 满足以下性质:

- (i) Z 是零均值的, 即对于任意的 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$, 有 $E[Z(\mathfrak{h})] = 0$;
- (ii) Z 是圆对称的 (circularly-symmetric), 即对于任意的 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}' \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$, 有

$$E[Z(\mathfrak{h})^2] = 0, \quad E[Z(\mathfrak{h}) \overline{Z(\mathfrak{h}')}] = \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{h}' \rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}}.$$

利用等式 (2.9) 定义复 Gauss 等距过程是 Janson 在文献 [52, 第 1.4 小节] 中定义复 Gauss-Hilbert 空间 (isometric complex Gaussian Hilbert space) 的方法. 基于此并结合实 Gauss 等距过程的概念, 文献 [24, 第 2.2 小节] 定义了复 Gauss 等距过程. 关于圆对称的复 Gauss 随机变量的更多性质和应用, 可参见文献 [32, 第 3.7 小节].

定义 2.6 设 m 和 n 为非负整数, 记 $\mathcal{H}_{m,n}$ 为复随机变量族 $\{J_{m,n}(Z(\mathfrak{h})), \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}, \|\mathfrak{h}\|_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}} = \sqrt{2}\}$ 在 $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ 中的线性闭包. 称闭的线性子空间 $\mathcal{H}_{m,n}$ 是 Z 的 (m, n) 阶复 Wiener-Itô 混沌.

定义 2.7 设 $\{\mathfrak{e}_k\}$ 是 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 的一组完备正交基, $\mathbf{m} = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}, \mathbf{n} = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Lambda$, 定义复 Fourier-Hermite 多项式如下:

$$J_{m,n} := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{m_k+n_k} m_k! n_k!}} J_{m_k, n_k}(\sqrt{2}Z(\mathfrak{e}_k)), \quad (2.10)$$

也称等式 (2.10) 为 Fourier-Hermite-Laguerre-Itô 多项式.

类似于文献 [51, 定理 10, 13.1, 13.2 和公式 (11.6)] 的证明, 可以得到如下性质:

性质 2.7 (参见文献 [24, 命题 2.9]) 设 $\{\mathbf{e}_k\}$, $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{n}$ 如定义 2.7 所给出, 则对于任意的非负整数 m 和 n , 随机变量族

$$\{\mathbf{J}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} : |\mathbf{m}| = m, |\mathbf{n}| = n\}$$

构成 $\mathcal{H}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(Z)$ 的一组完备标准正交基.

对张量空间 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes m} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ 赋予模 $\sqrt{m!n!} \cdot \|\cdot\|_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes(m+n)}}$. 由性质 2.7 可知, 映射

$$\mathcal{I}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left(\text{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathbf{e}_k^{\otimes m_k} \right) \otimes \text{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathbf{e}_k^{\otimes n_k} \right) \right) := \sqrt{m!n!} \mathbf{J}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}},$$

是从 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes m} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ 到 (m, n) 阶复 Wiener-Itô 混沌 $\mathcal{H}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(Z)$ 的线性等距同构. 当 $m = 0, n = 0$ 时, $\mathcal{I}_{0,0}$ 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的恒同映射.

定义 2.8 对于任意的 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes m} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$, 称复随机变量 $\mathcal{I}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(f)$ 是 f 关于 Z 的 (m, n) 重的复 Wiener-Itô 积分, 简称复 (m, n) 重 Wiener-Itô 积分. 有时也称 $\mathcal{I}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(f)$ 是 f 关于 Z 的 (m, n) 阶复 Wiener-Itô 混沌.

注 2.2 设 $\varsigma_k = Z(\mathbf{e}_k)$, $\varsigma^{\mathbf{m}} \bar{\varsigma}^{\mathbf{n}} = \prod_k \varsigma_k^{m_k} \bar{\varsigma}_k^{n_k}$, 则等式 (2.10) 的右端恰好是 Wick 积: $\varsigma^{\mathbf{m}} \bar{\varsigma}^{\mathbf{n}}$: (参见文献 [52, 第 31 页, 例 3.31 和 3.32]).

注 2.3 如果 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes(m+n)}$, 设 $\text{symm}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(f)$ 是在文献 [51, 公式 (5.1)] 意义下的对称化张量, 则 $\text{symm}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(f) \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes m} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$. 定义 $\mathcal{I}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(f) = \mathcal{I}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(\text{symm}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(f))$ (参见文献 [25, 定义 2.4]).

例 2.1 设 $(B_1(t))_{t \geq 0}$ 和 $(B_2(t))_{t \geq 0}$ 是独立的 Brown 运动, $(\zeta_t = \frac{B_1(t) + iB_2(t)}{\sqrt{2}})_{t \geq 0}$ 是复 Brown 运动. 取 $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}} = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+)$, 则 $(\zeta_t)_{t \geq 0}$ 关于 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+)$ 的复 Gauss 等距过程 Z 可以具体表示如下: 对于任意的 $\mathbf{h}_{\mathbb{C}} = u + iv \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+)$, 有

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{h}_{\mathbb{C}}) &:= \int_0^\infty \mathbf{h}_{\mathbb{C}}(t) d\zeta(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty (u(t) + iv(t)) d(B_1(t) + iB_2(t)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty u(t) dB_1(t) - \int_0^\infty v(t) dB_2(t) \right) \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty v(t) dB_1(t) + \int_0^\infty u(t) dB_2(t) \right) \\ &\in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \sigma(B_1, B_2), \mathbb{P}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

这实质上就是经典的复 Wiener 积分, 也可以称为复 Itô 积分或复 Wiener-Itô 积分.

对于 $\mathbb{R}_+^{p+q}$ 上的阶梯函数 (step function)

$$f = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq k < \infty} c_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} I_{(t_{i_1-1}, t_{i_1}] \times \dots \times (t_{i_p-1}, t_{i_p}] \times (t_{j_1-1}, t_{j_1}] \times \dots \times (t_{j_q-1}, t_{j_q}]},$$

其中 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$, 系数 $c_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} \in \mathbb{C}$, 称 f 为去对角线阶梯函数 (off-diagonal step function), 如果系数满足

$$c_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} = 0, \quad \text{若 } (i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q) \text{ 中存在两个元素相等.}$$

则定义 f 关于复 Gauss 等距过程 Z (参见 (2.11)) 的复 (p, q) 重 Wiener-Itô 积分为

$$\mathcal{I}_{p, q}(f) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq k < \infty} c_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} \prod_{k=1}^p (\zeta_{t_{i_k}} - \zeta_{t_{i_k-1}}) \prod_{l=1}^q (\bar{\zeta}_{t_{j_l}} - \bar{\zeta}_{t_{j_l-1}}).$$

对于 $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p+q}_+)$, 通过文献 [51, 定理 5], 可以得到存在去对角线函数列 f_n 在 $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p+q}_+)$ 意义下逼近 f , 则定义 f 的复 (p, q) 重 Wiener-Itô 积分为 $\mathcal{I}_{p,q}(f_n)$ 的 $L^2(\Omega)$ 极限, 记为

$$\mathcal{I}_{p,q}(f) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}_+} f(t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_q) d\zeta_{t_1} \cdots d\zeta_{t_p} \overline{d\zeta_{s_1}} \cdots \overline{d\zeta_{s_q}}. \quad (2.12)$$

这里需要特别强调如下两点.

(1) 文献 [58, 第 9.6 小节] 的方法可以证明 (2.12) 中定义的重积分与定义 2.8 中定义的关于 $\text{symm}_{p,q}(f)$ 的复 (p, q) 重 Wiener-Itô 积分相等. 事实上, 从文献 [50, 51] 出发, 关于实或复正态随机测度的重积分定义都不需要要求积分核函数对称. 但考虑这些重积分与实或复 Hermite 多项式的关系时, 即等式 (1.2) 或文献 [51, 公式 (13.1)], 积分核自然地就是对称张量的形式或者属于 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot m} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot n}$. 因此, 当利用实或复 Hermite 多项式定义 Gauss 等距过程的重积分时, 就要求在对称张量空间上定义或者在 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot m} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot n}$ 上定义 (参见定义 2.3 和 2.8).

(2) Itô^[51] 并没有涉及复 Wiener-Itô 累次积分与重积分之间关系的讨论. Chen 和 Liu 在文献 [25, 例 2.5] 中讨论了随机线性方程

$$dy_t = y_t(\bar{\lambda}dx_t + \lambda\overline{x_t}), \quad y_0 = 1, \quad (2.13)$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是常数, $(x_t)_{t \geq 0}$ 是连续共形局部鞅 (参见文献 [95, 定义 2.2]). 方程 (2.13) 的解是指数鞅

$$y_t(\lambda) = \exp\{\bar{\lambda}x_t + \lambda\overline{x_t} - |\lambda|^2\langle x, \overline{x} \rangle_t\}. \quad (2.14)$$

利用 Hermite-Laguerre-Itô 多项式 (2.6) 展开指数鞅 (2.14), 得到

$$y_t(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}^m \lambda^n}{m!n!} J_{m,n}(x_t, \langle x, \overline{x} \rangle_t). \quad (2.15)$$

利用 Picard 迭代求解方程 (2.13), 得到

$$y_t(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}^m \lambda^n \sum \int_0^t \int_0^{t_{m+n}} \cdots \int_0^{t_2} dC_{t_1} dC_{t_2} \cdots dC_{t_{m+n}}, \quad (2.16)$$

其中 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m+n} < t$, $C_t = x_t$ 或者 $C_t = \overline{x_t}$, $\sum$ 取遍 $\{1, 2, \dots, m+n\}$ 中所有使得 $C_{t_{i_1}} = \overline{x_{t_{i_1}}}, \dots, C_{t_{i_n}} = \overline{x_{t_{i_n}}}$ 且 $j \notin \{i_1, \dots, i_n\}$ 时 $C_{t_j} = x_{t_j}$ 的 n 元组合 $(i_1, \dots, i_n)$. 比较等式 (2.15) 和 (2.16) 右端 $\bar{\lambda}^m \lambda^n$ 项的系数, 可以发现

$$J_{m,n}(x_t, \langle x, \overline{x} \rangle_t) = m!n! \sum \int_0^t \int_0^{t_{m+n}} \cdots \int_0^{t_2} dC_{t_1} dC_{t_2} \cdots dC_{t_{m+n}}. \quad (2.17)$$

取 $x_t = \int_0^t f(s) d\zeta_s$, $f = u + iv \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_+)$, 则 $(x_t)_{t \geq 0}$ 是连续共形 Gauss 鞅. 因此, 依据定义 2.8, 等式 (2.17) 左端就是复 (m, n) 重 Wiener-Itô 积分

$$\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_m) \overline{f(t_{m+1})} \cdots \overline{f(t_{m+n})} d\zeta_{t_1} d\zeta_{t_2} \cdots d\zeta_{t_m} \overline{d\zeta_{t_{m+1}}} \cdots \overline{d\zeta_{t_{m+n}}}.$$

而等式 (2.17) 右端可以表示为

$$m!n! \sum \int_0^t \int_0^{t_{m+n}} \cdots \int_0^{t_2} \widehat{f(t_1)} \widehat{f(t_2)} \cdots \widehat{f(t_{m+n})} dc_{t_1} dc_{t_2} \cdots dc_{t_{m+n}}, \quad (2.18)$$

其中 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m+n} < t$, $\sum$ 取遍 $\{1, 2, \dots, m+n\}$ 中所有使得 $c_{t_{i_1}} = \overline{\zeta_{t_{i_1}}}$ 和 $\widehat{f(t_{i_1})} = \overline{f(t_{i_1})}$, $\dots, c_{t_{i_n}} = \overline{\zeta_{t_{i_n}}}$ 和 $\widehat{f(t_{i_n})} = \overline{f(t_{i_n})}$ 且 $j \notin (i_1, \dots, i_n)$ 时 $c_{t_j} = \zeta_{t_j}$ 和 $\widehat{f(t_j)} = f(t_j)$ 的 n 元组合 $(i_1, \dots, i_n)$. (2.18) 中求和的每一项就是复 Wiener-Itô 累次积分. 因此, 等式 (2.17) 建立了复 Brown 运动的 Wiener-Itô 重积分与累次积分之间的关系, 进一步完善了复 Wiener-Itô 重积分理论.

性质 2.8 复 Wiener-Itô 重积分有以下性质.

(i) 对于任意的 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot m} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot n}$, 有

$$\overline{\mathcal{I}_{m,n}(f)} = \mathcal{I}_{n,m}(h),$$

其中, $h \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot n} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot m}$ 是 f 的反的复共轭 (reverse complex conjugate), 即如果

$$f = \sum_{m,n, |m|=m, |n|=n} a_{m,n} \left(\text{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathfrak{e}_k^{\otimes m_k} \right) \otimes \text{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{e}_k}^{\otimes n_k} \right) \right),$$

则

$$h = \sum_{m,n, |m|=m, |n|=n} \overline{a_{m,n}} \left(\text{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathfrak{e}_k^{\otimes n_k} \right) \otimes \text{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{e}_k}^{\otimes m_k} \right) \right).$$

(ii) 对于任意的 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot m} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot n}$ 和 $g \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$, 有

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}_{m,n}(f) \overline{\mathcal{I}_{p,q}(g)}] = \begin{cases} m!n! \langle f, g \rangle_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes(m+n)}}, & m=p, n=q, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

定理 2.3 (复 Wiener-Itô 混沌分解, 参见文献 [24, 定理 3.2]) (i) 对任意的 $q \geq 1$, $\mathcal{H}_{m,n}$ 在 $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \sigma(X, Y), \mathbb{P})$ 中稠密, 其中 $\sigma(X, Y) = \sigma(\{X(h), Y(g) : h, g \in \mathfrak{H}\})$, 即 $\sigma(X, Y)$ 是 Gauss 等距过程 X 和 Y 生成的事件域.

(ii) $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \sigma(X, Y), \mathbb{P})$ 可以分解成线性子空间 $\mathcal{H}_{m,n}$ 的正交无穷直和, 具体而言,

$$L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \sigma(X, Y), \mathbb{P}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{m,n},$$

即对任意的 $F \in L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \sigma(X, Y), \mathbb{P})$, F 可以唯一地展开成

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_{m,n}(f_{m,n}).$$

该级数在 $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega)$ 意义下收敛, 其中 $f_{0,0} = \mathbb{E}[F]$, $I_{0,0}(f_{0,0}) = \mathbb{E}[F]$, $f_{m,n} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot n} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot m}$ 而且被 F 唯一确定.

定义 2.9 对于任意给定的 $m, n, p, q \geq 0$, 对于 $i = 0, \dots, m \wedge q$, $j = 0, \dots, n \wedge p$, $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot m} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot n}$ 和 $g \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$, 称

$$f \otimes_{i,j} g = \sum_{l_1, \dots, l_{i+j}=1}^{\infty} \langle f, \mathfrak{e}_{l_1} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{e}_{l_i} \otimes \overline{\mathfrak{e}_{l_{i+1}}} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathfrak{e}_{l_{i+j}}} \rangle \otimes \langle g, \mathfrak{e}_{l_{i+1}} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{e}_{l_{i+j}} \otimes \overline{\mathfrak{e}_{l_1}} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathfrak{e}_{l_i}} \rangle$$

为 f 和 g 的 (i, j) -次压缩 ((i, j) -th contraction). $f \otimes_{i,j} g$ 是 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes(m+p-i-j)} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes(n+q-i-j)}$ 中的元素. 约定 $f \otimes_{0,0} g = f \otimes g$, 即 f 和 g 的张量积.

性质 2.9 (参见文献 [19, 定理 2.1] 和 [40, 定理 A.1]) 对于任意给定的 $m, n, p, q \geq 0$, $f \in \mathfrak{H}^{\odot m} \otimes \mathfrak{H}^{\odot n}$ 和 $g \in \mathfrak{H}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}^{\odot q}$, $\mathcal{I}_{m,n}(f)$ 和 $\mathcal{I}_{p,q}(g)$ 的乘积公式为

$$\mathcal{I}_{m,n}(f)\mathcal{I}_{p,q}(g) = \sum_{i=0}^{m \wedge q} \sum_{j=0}^{n \wedge p} \binom{m}{i} \binom{q}{i} \binom{n}{j} \binom{p}{j} i!j! \mathcal{I}_{m+p-i-j, n+q-i-j}(f \otimes_{i,j} g).$$

2.4 复 Malliavin 分析

设 $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m \in \mathbb{R}$ 是 $2m$ 个变量, 定义复变量 $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, m$, 则通过

$$g(z_1, \dots, z_m) = g(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m) = \tilde{g}(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m),$$

可知存在复值函数 $g: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ 与 $\tilde{g}: \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{C}$ 之间的一一对应关系. 称 $g \in C_p^\infty(\mathbb{C}^m)$, 如果其对应的函数 $\tilde{g} \in C_p^\infty(\mathbb{R}^{2m})$. 也就是说, $C_p^\infty(\mathbb{C}^m)$ 是由所有自变量为 $2m$ 维实数的无穷光滑而且其各阶 Wirtinger 偏导数 (其定义见等式 (2.19) 和 (2.20)) 都满足线性增长的复值函数组成的集合. 设 $\mathcal{S}_Z$ 是光滑随机变量 $G = g(Z(\mathfrak{h}_1), \dots, Z(\mathfrak{h}_m))$ 组成的集合, 其中 $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_m \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$, $m \geq 1$, $g \in C_p^\infty(\mathbb{C}^m)$. 设 $G \in \mathcal{S}_Z$, Chen 和 Liu^[25] 分别定义了复 Malliavin 导数算子 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$ 如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}G &= \sum_{j=1}^m \partial_j g(Z(\mathfrak{h}_1), \dots, Z(\mathfrak{h}_m)) \mathfrak{h}_j, \\ \overline{\mathcal{D}}G &= \sum_{j=1}^m \overline{\partial_j} g(Z(\mathfrak{h}_1), \dots, Z(\mathfrak{h}_m)) \overline{\mathfrak{h}_j}, \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{D}G$ 和 $\overline{\mathcal{D}}G$ 是 $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega; \mathfrak{H}_{\mathbb{C}})$ 中的元素. 对于复变量 $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$,

$$\partial_j g = \frac{\partial}{\partial z_j} g(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \tilde{g}(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m), \quad (2.19)$$

$$\overline{\partial_j} g = \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} g(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \tilde{g}(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) \quad (2.20)$$

是 Wirtinger 导数.

设 p 和 q 为非负整数, $G \in \mathcal{S}_Z$, 可以归纳地定义 (p, q) 阶复 Malliavin 导数 $\mathcal{D}^p \overline{\mathcal{D}}^q G$. 它是一个取值于 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$ 的随机变量. 对于任意的 $r \geq 1$, 如果 $p + q \geq 1$, 则算子 $\mathcal{D}^p \overline{\mathcal{D}}^q G$ 从 $L_{\mathbb{C}}^r(\Omega)$ 到 $L_{\mathbb{C}}^r(\Omega, \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q})$ 是可闭的. 定义 $\mathcal{D}^{p,r} \cap \overline{\mathcal{D}}^{q,r}$ 为 $\mathcal{S}_Z$ 在 Sobolev 模

$$\|G\|_{p,q,r}^r = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \mathbb{E}(\|\mathcal{D}^i \overline{\mathcal{D}}^j G\|_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes(i+j)}}^r)$$

下的闭包.

性质 2.10 (参见文献 [25, 命题 2.9]) 设 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$, 则

$$\mathcal{I}_{p,q}(f) \in \bigcap_{p=0}^{\infty} \bigcap_{q=0}^{\infty} \bigcap_{r=1}^{\infty} (\mathcal{D}^{p,r} \cap \overline{\mathcal{D}}^{q,r}),$$

而且对于任意的 $k \geq 0$, 有

$$\mathcal{D}^k \mathcal{I}_{p,q}(f) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-k)!} \mathcal{I}_{p-k,q}(f), & k \leq p, \\ 0, & k > p, \end{cases}$$

$$\overline{\mathcal{D}}^k \mathcal{I}_{p,q}(f) = \begin{cases} \frac{q!}{(q-k)!} \mathcal{I}_{p,q-k}(f), & k \leq q, \\ 0, & k > q. \end{cases}$$

利用上述性质, 文献 [25, 定理 2.8] 得到了复 Stroock 公式.

定理 2.4 (参见文献 [25, 定理 2.8]) 对于任意的 $G \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \sigma(X, Y), \mathbb{P})$, 有

$$G = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \mathcal{I}_{p,q}(g_{p,q}),$$

其中 $g_{p,q} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$. 进一步地, 如果 $G \in \mathcal{D}^{m,2} \cap \overline{\mathcal{D}}^{n,2}$, 其中 $0 \leq m, n \leq \infty$, 则当 $m < \infty$ 时对任意的 $p \leq m$, 当 $m = \infty$ 时对任意的 $p \geq 0$, 以及当 $n < \infty$ 时对任意的 $q \leq m$, 当 $n = \infty$ 时对任意的 $q \geq 0$, 都有

$$g_{p,q} = \frac{1}{p!q!} \mathbb{E}[\mathcal{D}^p \overline{\mathcal{D}}^q G].$$

以上相关的定义和性质也可以参见文献 [15, 第 2.3 小节]. 关于复 Malliavin 分析更多的内容, 如复散度算子和复 Ornstein-Uhlenbeck 半群, 可参见文献 [25]. Chen^[18] 利用文献 [100] 中的方法, 通过其他途径也定义了复 Malliavin 导数.

无穷维空间上复分析的数学理论及其在物理等领域的应用都非常有意义 (参见文献 [31, 73]), 而且与 Gauss 概率测度有着密切的联系 (参见文献 [62, 111]), 值得随机分析工作者关注.

本小节叙述的复 Malliavin 分析内容也可以认为是无穷维空间上复分析的一种, 但其结论的获得本质上还是将复值函数作为实 2 维来看待的. 当需要研究更为复杂和深刻的问题时, 目前这些方法与结论是否还适用? 应该如何去发展复 Malliavin 分析? 这是需要认真思考的问题.

3 复 Wiener-Itô 混沌分解与实 Wiener-Itô 混沌分解之间的关系

3.1 复 Wiener-Itô 重积分与实 Wiener-Itô 重积分之间关系的核表示定理

设 $h, f \in \mathfrak{H}$, 定义 (h, f) 是 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}$ 上的 Descartes 积. 设 $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ 是 $\mathfrak{H}$ 的直和空间, 其上内积自然地定义为, 对于任意的 $h_i, f_i \in \mathfrak{H}$, $i = 1, 2$, 有

$$\langle (h_1, f_1), (h_2, f_2) \rangle_{\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}} = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathfrak{H}} + \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathfrak{H}}.$$

在此内积下, $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ 为一个 Hilbert 空间. 定义 $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ 上的 Gauss 等距过程如下:

$$W = \{W(h, f) = X(h) + Y(f) : h, f \in \mathfrak{H}\}, \quad (3.1)$$

其中, X 和 Y 是 $\mathfrak{H}$ 上两个独立同分布的 Gauss 等距过程. 记 $\mathcal{H}_n(W)$ 为 W 的 n 阶 Wiener-Itô 混沌.

对于任意的 $0 < \theta_n < \dots < \theta_0 < \pi$, 定义 $(n+1) \times (n+1)$ 矩阵

$$M = M(\theta_0, \dots, \theta_n) = \begin{bmatrix} (\sin \theta_0)^n & \binom{n}{1} (\sin \theta_0)^{n-1} \cos \theta_0 & \dots & \binom{n}{n-1} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^{n-1} & (\cos \theta_0)^n \\ (\sin \theta_1)^n & \binom{n}{1} (\sin \theta_1)^{n-1} \cos \theta_1 & \dots & \binom{n}{n-1} \sin \theta_1 (\cos \theta_1)^{n-1} & (\cos \theta_1)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\sin \theta_n)^n & \binom{n}{1} (\sin \theta_n)^{n-1} \cos \theta_n & \dots & \binom{n}{n-1} \sin \theta_n (\cos \theta_n)^{n-1} & (\cos \theta_n)^n \end{bmatrix}.$$

定理 3.1 (参见文献 [24, 定理 3.2]) 设 $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathfrak{H}$ 满足 $\|f\|_{\mathfrak{H}}^2 + \|g\|_{\mathfrak{H}}^2 = 1$, $\|\tilde{f}\|_{\mathfrak{H}}^2 + \|\tilde{g}\|_{\mathfrak{H}}^2 = 1$, 则对于任意的 $\theta \in \mathbb{R}$, 有

$$H_n(X(f) + Y(g)) + \mathrm{i}H_n(X(\tilde{f}) + Y(\tilde{g})) = \sum_{k=0}^n d_k(J_{k,n-k}(Z(\mathfrak{h})) + \mathrm{i}J_{k,n-k}(Z(\tilde{\mathfrak{h}}))),$$

其中 $\mathfrak{h} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(f - \mathrm{i}g)$, $\tilde{\mathfrak{h}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\tilde{f} - \mathrm{i}\tilde{g})$,

$$d_k = \frac{1}{2^n} \sum_{r+s=k} (-1)^s \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \binom{l}{r} \binom{n-l}{s} (\cos \theta)^l (\mathrm{i} \cdot \sin \theta)^{n-l}.$$

设 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 满足 $\|\mathfrak{h}\|_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}} = \sqrt{2}$, 则

$$J_{k,n-k}(Z(\mathfrak{h})) = \sum_{i=0}^n \tilde{c}_i H_n(X(f_i) + Y(g_i)), \quad (3.2)$$

其中 $f_i + \mathrm{i}g_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}\bar{\mathfrak{h}}$,

$$\tilde{c}_i = \sum_{j=0}^n M_{j,i}^{-1} \mathrm{i}^{n-k} \sum_{r+s=j} \binom{k}{r} \binom{n-k}{s} (-1)^{n-k-s}. \quad (3.3)$$

这说明 $\mathcal{H}_n(W)$ 的复化满足

$$\mathcal{H}_n^{\mathbb{C}}(W) := \mathcal{H}_n(W) + \mathrm{i}\mathcal{H}_n(W) = \bigoplus_{k+l=n} \mathcal{H}_{k,l}(Z).$$

定理 3.2 (核函数的存在性, 参见文献 [24, 定理 3.3]) 设 $\varphi \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot m} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot n}$ 和 $F = \mathcal{I}_{m,n}(\varphi) = U + \mathrm{i}V$, 则存在实的 $u, v \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot(m+n)}$ 使得

$$U = I_{m+n}(u), \quad V = I_{m+n}(v),$$

其中 $I_p(g)$ 是 g 关于 W 的 p 重实 Wiener-Itô 积分. 如果 $m \neq n$, 则

$$\mathbb{E}[U^2] = \mathbb{E}[V^2], \quad \mathbb{E}[UV] = (m+n)! \langle u, v \rangle_{(\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\otimes(m+n)}} = 0.$$

虽然定理 3.1 的证明是非平凡的, 但首先可以通过分析 Hermite 多项式的性质 2.3 与 Hermite-Laguerre-Itô 多项式的性质 2.5 得到 (m, n) 阶复混沌与 $m+n$ 阶实混沌之间在代数结构上的内在关系. 具体而言, 一方面, 性质 2.5 的等式 (2.7) 可以简写为

$$J_{m,l-m}(z) = \sum_{k=0}^l a_k H_k(x) H_{l-k}(y) + \mathrm{i} \sum_{k=0}^l b_k H_k(x) H_{l-k}(y).$$

另一方面, 如果 $\sum_{k=0}^l a_k H_k(x) H_{l-k}(y) = H_l(x+y)$, 则利用 W 上 l 阶混沌 $\mathcal{H}_l(W)$ 的定义或 Wiener-Itô 重积分的定义 (参见定义 2.2 和 2.3 及等式 (3.1)), 可得

$$\sum_{k=0}^l a_k H_k(X(f)) H_{l-k}(Y(g)) = H_l(W(f, g)),$$

即 $J_{m,l-m}(Z(\mathbf{h}))$ 的实部可以表示为一个 l 阶实混沌. 然而, 这显然不一定成立. 但由性质 2.3, 并注意到如果 N_1 与 N_2 相互独立且服从标准正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$, 则 $N_1 \cos \theta + N_2 \sin \theta$ 也服从 $\mathcal{N}(0, 1)$. 因此, 设法找到 $\tilde{c}_k = \tilde{a}_k + i\tilde{b}_k$, 使得

$$J_{m,l-m}(z) = \sum_{k=0}^l \tilde{a}_k H_l(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k) + i \sum_{k=0}^l \tilde{b}_k H_l(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k).$$

则由 $\mathcal{H}_l(W)$ 的定义可得定理 3.1 中的等式 (3.2). 因此, 问题的关键是证明 $\tilde{c}_k$ 的存在性. 最终化归为求解一个关于矩阵 $\mathbf{M}(\theta_0, \dots, \theta_n)$ 的线性方程, 即 $\tilde{c}_k$ 可以表示成等式 (3.3) 的形式.

事实上, 定理 3.2 是定理 3.1 的推论. 由以上分析可以看出, 确定 $\tilde{c}_k$ 需要依赖于参数 $(\theta_0, \dots, \theta_n)$ 的选取, 而使得 $\mathbf{M}$ 可逆的这组参数并不唯一. 因此, 定理 3.2 明确指出, 对于复 (m, n) 重 Wiener-Itô 积分 $\mathcal{I}_{m,n}(\varphi)$, 存在实的核函数 u 和 v , 使得 $\mathcal{I}_{m,n}(\varphi)$ 的实部和虚部可以分别表示为 $I_{m+n}(u)$ 和 $I_{m+n}(v)$, 但并没有给出核函数 u 和 v 的唯一性. 同时, $\tilde{c}_k$ 具体表示的非唯一性和计算的复杂性也使得这一定理的应用受到一定的限制.

设 $\{\mathbf{e}_k = e_k^1 + ie_k^2\}_{k \geq 1}$ 是 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 的一组完备正交基, 满足 $\|\mathbf{e}_k\|_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}}^2 = \|e_k^1\|_{\mathfrak{H}}^2 + \|e_k^2\|_{\mathfrak{H}}^2 = 2$. 设 $u_{1,0}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k^1, -e_k^2)$ 和 $v_{1,0}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k^2, e_k^1)$, 文献 [15, 引理 3.1] 证明了 $\{u_{1,0}(k), v_{1,0}(k)\}_{k \geq 1}$ 是 $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ 的完备正交基. 将 $\mathbf{e}_k, e_k^1, e_k^2, u_{1,0}(k)$ 和 $v_{1,0}(k)$ 代入等式 (3.2), 计算得到

$$\begin{aligned} J_{k,n-k}(Z(\mathbf{e}_1)) &= \sum_{j=0}^n c_j H_j(\operatorname{Re} Z(\mathbf{e}_1)) H_{n-j}(\operatorname{Im} Z(\mathbf{e}_1)) \\ &= \sum_{j=0}^n c_j \sum_{l=0}^n (\mathbf{M}^{-1})_{jl} H_n(W(\cos \theta_l u_{1,0}(1) + \sin \theta_l v_{1,0}(1))), \end{aligned}$$

其中 $c_j = \sum_{r+s=j} \binom{k}{r} \binom{n-k}{s} i^{k-r} (-i)^{n-k-s}$.

文献 [15] 进一步细致计算上式, 得到

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^n (\mathbf{M}^{-1})_{jl} H_n(W(\cos \theta_l u_{1,0}(1) + \sin \theta_l v_{1,0}(1))) \\ &= \sum_{l=0}^n (\mathbf{M}^{-1})_{jl} I_n((\cos \theta_l u_{1,0}(1) + \sin \theta_l v_{1,0}(1))^{\otimes n}) \\ &= \sum_{l=0}^n (\mathbf{M}^{-1})_{jl} I_n \left(\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (\cos \theta_l)^r (\sin \theta_l)^{n-r} u_{1,0}(1)^{\otimes r} \otimes v_{1,0}(1)^{\otimes (n-r)} \right) \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{l=0}^n (\mathbf{M}^{-1})_{jl} \mathbf{M}_{lr} I_n(u_{1,0}(1)^{\otimes r} \otimes v_{1,0}(1)^{\otimes (n-r)}) \\ &= \sum_{r=0}^n (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M})_{jr} I_n(u_{1,0}(1)^{\otimes r} \otimes v_{1,0}(1)^{\otimes (n-r)}) \\ &= I_n(u_{1,0}(1)^{\otimes j} \otimes v_{1,0}(1)^{\otimes (n-j)}). \end{aligned}$$

这表明, 对于 $J_{k,n-k}(Z(\mathbf{e}_1))$, 等式 (3.2) 右端的表示式实质上是唯一的, 与参数 $(\theta_0, \dots, \theta_n)$ 的选取无关. 因此利用实和复 Wiener-Itô 重积分的定义, 可以总结出如下引理:

引理 3.1 (参见文献 [15, 引理 3.4]) 设 $\mathbf{e}_1 = e_1^1 + ie_1^2 \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 满足 $\|\mathbf{e}_1\|_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}} = \sqrt{2}$, 则

$$\mathcal{I}_{p,q}(\mathbf{e}_1^{\otimes p} \otimes \overline{\mathbf{e}_1}^{\otimes q}) = \sum_{j=0}^{p+q} \sum_{r+s=j} \binom{p}{r} \binom{q}{s} i^{p-r} (-i)^{q-s} I_{p+q}(u_{1,0}(1)^{\otimes j} \otimes v_{1,0}(1)^{\otimes (p+q-j)}),$$

其中

$$u_{1,0}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1^1, -e_1^2), \quad v_{1,0}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1^2, e_1^1),$$

$I_{p+q}(\cdot)$ 是关于 W 的实 $p+q$ 重 Wiener-Itô 积分.

设整数 p 和 q 满足 $p \geq 0, q \geq 0$ 和 $p+q > 0$. 设 $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ 和 $\mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^\infty \in \Lambda$, 满足 $|\mathbf{p}| = p$ 和 $|\mathbf{q}| = q$. 为了简化表达式, 令

$$a_{k,j} := \sum_{r+s=j} \binom{p_k}{r} \binom{q_k}{s} i^{p_k-r} (-i)^{q_k-s}.$$

对于满足 $j \leq p+q$ 的 $j = \{j_k\}_{k=1}^\infty \in \Lambda$, 乘积 $\prod_{k=1}^\infty a_{k,j_k}$ 是复数. 定义 $u(\mathbf{p}, \mathbf{q}), v(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot(p+q)}$ 如下:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{j \leq p+q} \operatorname{Re} \left(\prod_{l=1}^\infty a_{l,j_l} \right) \operatorname{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^\infty (u_{1,0}(k)^{\otimes j_k} \otimes v_{1,0}(k)^{\otimes (p_k+q_k-j_k)}) \right), \\ v(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{j \leq p+q} \operatorname{Im} \left(\prod_{l=1}^\infty a_{l,j_l} \right) \operatorname{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^\infty (u_{1,0}(k)^{\otimes j_k} \otimes v_{1,0}(k)^{\otimes (p_k+q_k-j_k)}) \right). \end{aligned}$$

利用引理 3.1, 得到如下性质:

性质 3.1 (参见文献 [15, 命题 3.5]) 设 $\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^\infty, \mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^\infty \in \Lambda$, 其中 $|\mathbf{p}| = p, |\mathbf{q}| = q$, 则

$$\mathcal{I}_{p,q} \left(\operatorname{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^\infty \mathfrak{e}_k^{\otimes p_k} \right) \otimes \operatorname{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^\infty \overline{\mathfrak{e}_k}^{\otimes q_k} \right) \right) = I_{p+q}(u(\mathbf{p}, \mathbf{q})) + i I_{p+q}(v(\mathbf{p}, \mathbf{q})),$$

其中 $I_{p+q}(\cdot)$ 是关于 W 的 $p+q$ 重 Wiener-Itô 积分.

对于任意的 $f \in \mathfrak{H}_\mathbb{C}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_\mathbb{C}^{\odot q}$, 存在唯一的序列

$$\{c(\mathbf{p}; \mathbf{q}) : \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Lambda, |\mathbf{p}| = p, |\mathbf{q}| = q\} \subseteq \mathbb{C},$$

使得 $\sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Lambda, |\mathbf{p}|=p, |\mathbf{q}|=q} |c(\mathbf{p}; \mathbf{q})|^2 < \infty$, 并且

$$f = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Lambda, |\mathbf{p}|=p, |\mathbf{q}|=q} c(\mathbf{p}; \mathbf{q}) \operatorname{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^\infty \mathfrak{e}_k^{\otimes p_k} \right) \otimes \operatorname{symm} \left(\bigotimes_{k=1}^\infty \overline{\mathfrak{e}_k}^{\otimes q_k} \right). \quad (3.4)$$

在性质 3.1 基础上, 利用逼近的方法, 得到如下的实部和虚部核函数的表示唯一性定理.

定理 3.3 (核函数表示唯一性定理 I, 参见文献[15, 定理 3.3]) 设 $f \in \mathfrak{H}_\mathbb{C}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_\mathbb{C}^{\odot q}$ 具有展开式 (3.4), 则 $\mathcal{I}_{p,q}(f)$ 具有如下的唯一表达式:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{p,q}(f) &= \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Lambda, |\mathbf{p}|=p, |\mathbf{q}|=q} I_{p+q}(\operatorname{Re}(c(\mathbf{p}; \mathbf{q}))u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \operatorname{Im}(c(\mathbf{p}; \mathbf{q}))v(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \\ &\quad + i \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Lambda, |\mathbf{p}|=p, |\mathbf{q}|=q} I_{p+q}(\operatorname{Im}(c(\mathbf{p}; \mathbf{q}))u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \operatorname{Re}(c(\mathbf{p}; \mathbf{q}))v(\mathbf{p}, \mathbf{q})), \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $I_{p+q}(\cdot)$ 为关于 W 的 $p+q$ 重 Wiener-Itô 积分.

在实际的模型应用中, 更希望得到可以计算的核表示公式. 在文献 [51, 定理 9] 中, Itô 对于复 Gauss 随机测度的多重随机积分给出了如下的递推关系: 设 $p, q \geq 1$, 则

$$\mathcal{I}_{p,q}(f)\mathcal{I}_{1,0}(g) = \mathcal{I}_{p+1,q}(f \cdot g) + \mathcal{I}_{p,q-1}(f \circ g),$$

$$\mathcal{I}_{p,q}(f)\mathcal{I}_{0,1}(g) = \mathcal{I}_{p,q+1}(f \bar{\cdot} g) + \mathcal{I}_{p-1,q}(f \circ g),$$

其中,

$$\begin{aligned} f \cdot g(t_1, \dots, t_{p+1}; s_1, \dots, s_q) &= f(t_1, \dots, t_p; s_1, \dots, s_q)g(t_{p+1}), \\ f \bar{\cdot} g(t_1, \dots, t_p; s_1, \dots, s_{q+1}) &= f(t_1, \dots, t_p; s_1, \dots, s_q)g(s_{q+1}), \\ f \circ g(t_1, \dots, t_{p-1}; s_1, \dots, s_q) &= \sum_{k=1}^p \int f(t_1, \dots, t_{k-1}, t, t_{k+1}, \dots, t_{p-1}; s_1, \dots, s_q)g(t)dm(t), \\ f \bar{\circ} g(t_1, \dots, t_p; s_1, \dots, s_{q-1}) &= \sum_{k=1}^q \int f(t_1, \dots, t_p; s_1, \dots, s_{k-1}, s, s_k, \dots, s_{q-1})g(s)dm(s). \end{aligned}$$

受此启发, 设 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots)$ 和 $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots)$, 记

$$\mathcal{I}_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) := \mathcal{I}_{p,q}(\text{symm}(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{k_p}) \otimes \text{symm}(\overline{\mathbf{e}_{j_1}} \otimes \dots \otimes \overline{\mathbf{e}_{j_q}})) = \mathcal{I}_{p,q}(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{k_p} \otimes \overline{\mathbf{e}_{j_1}} \otimes \dots \otimes \overline{\mathbf{e}_{j_q}})$$

和

$$u_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) := u_{p,q}(k_1, \dots, k_p; j_1, \dots, j_q), \quad v_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) := v_{p,q}(k_1, \dots, k_p; j_1, \dots, j_q),$$

其中 $u_{p,q}(k_1, \dots, k_p; j_1, \dots, j_q), v_{p,q}(k_1, \dots, k_p; j_1, \dots, j_q) \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot(p+q)}$ 可以通过如下关系递归定义:

$$\begin{aligned} u_{0,1}(j) &= u_{1,0}(j), \quad v_{0,1}(j) = -v_{1,0}(j), \\ u_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) &= u_{p-1,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \tilde{\otimes} u_{1,0}(k_p) - v_{p-1,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \tilde{\otimes} v_{1,0}(k_p) \\ &= u_{p,q-1}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \tilde{\otimes} u_{0,1}(j_q) - v_{p,q-1}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \tilde{\otimes} v_{0,1}(j_q), \\ v_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) &= u_{p-1,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \tilde{\otimes} v_{1,0}(k_p) + v_{p-1,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \tilde{\otimes} u_{1,0}(k_p) \\ &= u_{p,q-1}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \tilde{\otimes} v_{0,1}(j_q) + v_{p,q-1}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) \tilde{\otimes} u_{0,1}(j_q). \end{aligned}$$

也就是说, $u_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j})$ 和 $v_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j})$ 是递归定义的, 可以一步通过计算得到, 而且可以证明它们是良定的. 因此进一步得到如下定理:

定理 3.4 (参见文献 [15, 定理 3.7]) 对于 $p \geq 0, q \geq 0, p+q > 0$, 可以得到

$$\mathcal{I}_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) = I_{p+q}(u_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j})) + iI_{p+q}(v_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j})),$$

其中 $I_{p+q}(\cdot)$ 是关于 W 的 $p+q$ 重 Wiener-Itô 积分.

这表明 $\mathcal{I}_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j})$ 的实部和虚部都可以表示成实的 $p+q$ 重 Wiener-Itô 积分, 而且积分核可以通过递归的方式计算出来.

进一步地, 利用定理 3.4 和逼近的想法, 还可以得到定理 3.3 的另一种表现形式.

设 $\{\mathbf{e}_k\}_{k \geq 1}$ 是 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 的完备正交基, 满足 $\|\mathbf{e}_k\|_{\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}} = \sqrt{2}$, 则对于任意的 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$, 存在唯一的序列

$$\{b_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) := b(k_1, \dots, k_p; j_1, \dots, j_q) : 1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q\} \subseteq \mathbb{C},$$

使得 $\sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q} |b_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j})|^2 < \infty$, 并且

$$f = \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q} b_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) (\text{symm}(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{k_p}) \otimes \text{symm}(\overline{\mathbf{e}_{j_1}} \otimes \dots \otimes \overline{\mathbf{e}_{j_q}})). \quad (3.6)$$

定理 3.5 (核函数表示唯一性定理 II, 参见文献 [15, 定理3.9]) 设 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$ 具有展开式 (3.6), 则 $\mathcal{I}_{p,q}(f)$ 具有如下唯一的表达式:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{p,q}(f) = & \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q} I_{p+q}(\operatorname{Re}(b_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}))u_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) - \operatorname{Im}(b_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}))v_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j})) \\ & + i \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q} I_{p+q}(\operatorname{Im}(b_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}))u_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}) + \operatorname{Re}(b_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}))v_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j})), \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中 $I_{p+q}(\cdot)$ 是关于 W 的 $p+q$ 阶 Wiener-Itô 重积分.

注 3.1 比较 f 的展开式 (3.4) 和 (3.6), 设 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Lambda$ 满足 $|\mathbf{p}| = p, |\mathbf{q}| = q$. $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 不为 0 的分量分别记为 $p_{j_1}, \dots, p_{j_m}$ 和 $q_{l_1}, \dots, q_{l_n}$, 则

$$\sum_{k=1}^m p_{j_k} = p, \quad \sum_{k=1}^n q_{l_k} = q.$$

定义

$$(k_1, \dots, k_p) = (\underbrace{j_1, \dots, j_1}_{p_{j_1}}, \dots, \underbrace{j_m, \dots, j_m}_{p_{j_m}}), \quad (j_1, \dots, j_q) = (\underbrace{l_1, \dots, l_1}_{q_{l_1}}, \dots, \underbrace{l_n, \dots, l_n}_{q_{l_n}}). \quad (3.8)$$

于是,

$$c(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = b(k_1, \dots, k_p; j_1, \dots, j_q) =: b_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{j}),$$

其中 $(k_1, \dots, k_p)$ 和 $(j_1, \dots, j_q)$ 在 (3.8) 中给出. 而且当 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 取遍 $\{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Lambda, |\mathbf{p}| = p, |\mathbf{q}| = q\}$ 时, $k_1, \dots, k_p, j_1, \dots, j_q$ 取遍 $\{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q\}$.

这说明, 在 (3.5) 和 (3.7) 中 $\mathcal{I}_{p,q}(f)$ 的实部和虚部的 $p+q$ 重实 Wiener-Itô 积分的积分核表示是一致的, 只是求和顺序不同.

注 3.2 定理 3.5 是文献 [15, 定理 3.9] 的修订版本. 事实上, 因为 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$, 而 $\operatorname{symm}(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{k_p})$ 和 $\operatorname{symm}(\overline{\mathbf{e}_{j_1}} \otimes \dots \otimes \overline{\mathbf{e}_{j_q}})$ 都是对称张量, 所以 f 的展开式应该表示成等式 (3.6) 右端求和的形式, 而不是文献 [15, 公式 (3.11)] 展开式右端的求和形式; 同样在 $\mathcal{I}_{p,q}(f)$ 的实部和虚部的表示式中, 求和应该是等式 (3.7) 右端的形式, 而不是文献 [15, 定理 3.9] 中的求和形式.

但文献 [15, 定理 3.9] 的证明方法仍然适用, 基于定理 3.4 (或文献 [15, 定理 3.9]), 利用逼近, 可以证明定理 3.5.

定理 3.4 和 3.5 中的表示式依赖于 f 关于 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 的某组标准正交基的具体展开形式. 利用复 Stroock 公式和复 Malliavin 导数与实 Malliavin 导数之间的关系, 还可以给出另一种计算 $\mathcal{I}_{p,q}$ 实部和虚部重积分表示式中核函数的方法.

在第 2.4 小节中, 对于 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 上的复 Gauss 等距过程 Z , 引入了复 Malliavin 微分算子 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$. 对于 $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ 上的 Gauss 等距过程 W , 考虑实 Malliavin 微分算子 D . 设 $F \in \mathbb{D}^{1,p}$, $DF \in L^p(\Omega; \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})$, 则可以记 $DF = (D_1F, D_2F)$. 特别地, 对于

$$F = f(W(h_1, f_1), \dots, W(h_n, f_n)),$$

其中 $(h_1, f_1), \dots, (h_n, f_n) \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$, $n \geq 1$ 且 $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, D_1F 和 D_2F 是具有如下形式的 $\mathfrak{H}$ -值随机元:

$$D_1F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1, f_1), \dots, W(h_n, f_n))h_i, \quad D_2F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1, f_1), \dots, W(h_n, f_n))f_i.$$

进而若 $F \in \mathbb{D}^{k,p}$, $k \geq 2$, 则 $D^k F = (D_1, D_2)^{\otimes k} F \in L^p(\Omega; (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\otimes k})$.

与经典的 Wirtinger 导数类似, 文献 [15, 定理 3.11] 证明了

$$\mathcal{D} = \frac{D_1 - iD_2}{\sqrt{2}}, \quad \overline{\mathcal{D}} = \frac{D_1 + iD_2}{\sqrt{2}}. \quad (3.9)$$

对于 $F \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \sigma(Z), \mathbb{P})$, 利用复混沌分解定理 2.3, 3.3 或 3.5, 得到

$$F = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \mathcal{I}_{p,q}(f_{p,q}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} I_{p+q}(u_{p,q}) + i \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} I_{p+q}(v_{p,q}),$$

其中 $I_{p+q}(\cdot)$ 是关于 W 的 $p+q$ 重 Wiener-Itô 积分, $u_{p,q}, v_{p,q} \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot(p+q)}$ 分别是 $\mathcal{I}_{p,q}(f_{p,q})$ 实部和虚部的积分核, 则 $\operatorname{Re} F$ 和 $\operatorname{Im} F$ 可以唯一地展开为如下的级数形式:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \quad f_n = \sum_{p=0}^n u_{p,n-p}, \\ \operatorname{Im} F &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(g_n), \quad g_n = \sum_{p=0}^n v_{p,n-p}. \end{aligned}$$

利用 (3.9) 和实 Wiener-Itô 重积分的 Stroock 公式 (2.5), 得到如下的广义 Stroock 公式. 通过该公式可以计算出 f_n 和 g_n 的表达式.

性质 3.2 (广义 Stroock 公式, 参见文献 [15, 命题 3.13]) 对于 $m \geq 0$, 设 $F \in \mathscr{D}^{m,2} \cap \overline{\mathscr{D}}^{m,2}$, 其实部 $\operatorname{Re} F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, 虚部 $\operatorname{Im} F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(g_n)$, 其中 $f_n, g_n \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot n}$, $I_n(\cdot)$ 是关于 W 的 n 阶 Wiener-Itô 重积分, 则对于任意的 $n \leq m$, f_n 和 g_n 可以唯一地通过如下广义 Stroock 公式确定:

$$f_n + i g_n = \frac{1}{n!} 2^{-\frac{n}{2}} \mathbb{E}[(\mathcal{D} + \overline{\mathcal{D}}, i(\mathcal{D} - \overline{\mathcal{D}}))^{\otimes n} F].$$

推论 3.1 (参见文献 [15, 推论 3.14]) 设 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$, 则 $F = \mathcal{I}_{p,q}(f)$ 具有如下唯一的表示:

$$\mathcal{I}_{p,q}(f) = I_{p+q}(u) + i I_{p+q}(v),$$

其中 $I_{p+q}(\cdot)$ 是关于 W 的 $p+q$ 阶 Wiener-Itô 重积分, $u, v \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot(p+q)}$ 通过如下广义 Stroock 公式唯一确定:

$$u + i v = \frac{1}{(p+q)!} 2^{-\frac{p+q}{2}} (\mathcal{D} + \overline{\mathcal{D}}, i(\mathcal{D} - \overline{\mathcal{D}}))^{\otimes(p+q)} F.$$

以上结论说明 $\mathcal{I}_{p,q}(f)$ 的实部和虚部分别是实 $p+q$ 重 Wiener-Itô 积分 $I_{p+q}(u)$ 和 $I_{p+q}(v)$, 并且给出积分核 u 和 v 表达式的计算方法. 与以上积分核表示方向相反, 一个自然而有趣的问题是, 形如 $I_p(g_1) + i I_p(g_2)$ 的复随机变量, 其中 $g_1, g_2 \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot p}$, 是否可以表示成复 Wiener-Itô 重积分的形式? 文献 [15, 第 4 节] 给出了详尽的结果, 不但得到

$$I_p(g_1) + i I_p(g_2) = \sum_{l=0}^p \mathcal{I}_{l,p-l}(\tilde{g}_{l,p-l}),$$

其中 $\tilde{g}_{l,p-l} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot l} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot(p-l)}$, $0 \leq l \leq p$ (参见文献 [15, 定理 4.1]), 而且给出积分核 $\tilde{g}_{l,p-l}$ 表示式的计算方法 (参见文献 [15, 定理 4.3 和 4.4]).

综合以上结论, 可以给出如下的复 Wiener-Itô 混沌分解:

定理 3.6 (复 Wiener-Itô 混沌分解, 参见文献 [51, 定理 11]、[37, 定理 6.3] 和 [24, 定理 3.3]) $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \sigma(Z), P)$ 有如下的直和分解:

$$L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \sigma(Z), P) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathcal{H}_{p,q}(Z) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigoplus_{k+l=p} \mathcal{H}_{k,l}(Z) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} (\mathcal{H}_p(W) + i\mathcal{H}_p(W)). \quad (3.10)$$

文献 [15, 注 4.5] 给出了复 Wiener-Itô 混沌分解 (3.10) 中每一个等式的出处和简要的发展过程. 以上抽象结论在复 Gauss 随机测度和复 (分数) Brown 运动下的具体表述形式可参见文献 [15, 18, 21, 24, 25, 51].

事实上, 无论实 Wiener-Itô 混沌分解还是复 Wiener-Itô 混沌分解都与 Ornstein-Uhlenbeck 算子的特征值和特征子空间有着密切的关系, 可参见文献 [15, 18, 23–25, 36, 42, 48, 50, 51, 80, 83, 84, 100] 相关章节获得更多这方面的结论.

3.2 相关应用的一些讨论

第 3.1 小节对复 Wiener-Itô 混沌与实 Wiener-Itô 混沌之间的关系进行了刻画, 建立了复随机重积分与实随机重积分之间的桥梁. 这为研究复 Wiener-Itô 混沌及其应用提供了一个新的视角, 即可以将复 Wiener-Itô 混沌或复 Wiener-Itô 重积分看作实 2 维 Wiener-Itô 混沌或实 Wiener-Itô 重积分, 从而可以利用实随机重积分已有的丰富成果来处理复随机积分的问题. 一个典型的例子是复四阶矩定理的证明, 第 4 节将详尽地分析这一问题.

文献 [15, 命题 3.5 和推论 3.14] 提供的两种计算复 Wiener-Itô 重积分的实部和虚部重积分核函数的路径, 拓展了上述想法应用的广度. 例如, 文献 [15, 推论 3.10] 考虑了复随机变量 $\mathcal{I}_{p,q}(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_p} \otimes \overline{\mathbf{e}_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}_{j_q}})$ ($=: F_1 + iF_2$) 密度函数的存在性. 其基本的想法是, 将上述复 Wiener-Itô 重积分作为 2 维实 Wiener-Itô 重积分 (F_1, F_2) , 利用 Nualart 等关于 2 维实随机重积分密度函数存在的充要条件 (参见文献 [76, 定理 3.1] 和 [88, 定理 3]), 通过文献 [15, 命题 3.5] (即性质 3.1), 计算出 DF_1 和 DF_2 几乎必然线性独立的充要条件, 从而给出 $F_1 + iF_2$ 密度存在的一个简洁充要条件.

例如, 当考虑复时空白噪声驱动的复随机 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{cases} \partial_t u = (i + \mu)\Delta u - \nu|u|^2 u + \tau u + \xi, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^d, \quad d \geq 2, \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

重整化解的适定性时, 首要步骤是得到复随机热方程 (也称为具有色散的随机热方程 (stochastic heat equation with dispersion))

$$\partial_t Z = ((i + \mu)\Delta - 1)Z + \xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^d$$

平稳解 (stationary solution) 的适定性和时空正则性. 在上述两个方程中, $\mu > 0$, $\nu, \tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \nu > 0$, ξ 为复的时空白噪声 (其定义参见文献 [15, 附录]). 设 $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, 定义 $|k| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_d^2}$, $\rho_k = 1 + 4\pi^2\mu|k|^2$, $\theta_k = 4\pi^2|k|^2$. 文献 [15, 第 5 节] 中的计算表明

$$Z_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{I}_{1,0}(f_{t,k}(\cdot)) e^{2\pi i k \cdot x} =: X + iY,$$

其中,

$$f_{t,k}(s) := I_{(-\infty, t]}(s) e^{-(\rho_k + i\theta_k)(t-s)}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

利用文献 [15, 定理 3.7] 和 [15, 推论 3.14], 得到

$$X_t := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} I_1(u_{t,k}(\cdot)) e^{2\pi i k \cdot x}, \quad Y_t := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} I_1(v_{t,k}(\cdot)) e^{2\pi i k \cdot x}$$

以及

$$\begin{aligned} u_{t,k}(s) + i v_{t,k}(s) &= \begin{pmatrix} \mathcal{D} + \overline{\mathcal{D}} \\ i(\mathcal{D} - \overline{\mathcal{D}}) \end{pmatrix} \mathcal{I}_{1,0}(f_{t,k}(s)) = \begin{pmatrix} f_{t,k}(s) \\ i f_{t,k}(s) \end{pmatrix} \\ &= I_{(-\infty, t]}(s) e^{\rho_k(t-s)} \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta_k(t-s)) \\ \sin(\theta_k(t-s)) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sin(\theta_k(t-s)) \\ \cos(\theta_k(t-s)) \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

从而可以借助文献 [72, 命题 5], 得到 $I_1(u_{t,k}(s))$ 和 $I_1(v_{t,k}(s))$ 的时空正则性估计, 进而得到 Z 的适定性和时空正则性估计 (具体计算和估计参见文献 [15, 第 5 节]).

下面给出广义 Stroock 公式应用的一个新例子.

例 3.1 1962 年, Arató 等 [4] 引入复 Ornstein-Uhlenbeck 方程来研究 Chandra 摆动. 在这个例子中, 讨论由复分数 Brown 运动驱动的复 Ornstein-Uhlenbeck 方程的参数估计问题. 设 $\beta_t = (B_t^1 + i B_t^2)/\sqrt{2}$, 其中 $(B_t^1, B_t^2)_{t \geq 0}$ 是 Hurst 指数 $H \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ 的 2 维分数 Brown 运动. 分数 Brown 运动驱动的复 Ornstein-Uhlenbeck 方程定义为

$$dZ_t = -\gamma Z_t dt + d\beta_t, \quad t \geq 0, \quad (3.11)$$

其中 $Z_0 = 0$, $\gamma = \lambda - i\theta \in \mathbb{C}$, $\lambda > 0$.

通过极小化 $\int_0^T |\dot{Z}_t + \gamma Z_t|^2 dt$, 可以得到 γ 的最小二乘估计:

$$\hat{\gamma}_T = -\frac{\int_0^T \bar{Z}_t dZ_t}{\int_0^T |Z_t|^2 dt} = \gamma - \frac{\int_0^T \bar{Z}_t d\beta_t}{\int_0^T |Z_t|^2 dt}.$$

Chen 等 [21] 讨论了统计量 $\hat{\gamma}_T$ 的渐近正态性. 记 $\sqrt{T}(\hat{\gamma}_T - \gamma)$ 的分子为 F_T , 他们首先得到了 F_T 依分布收敛到复 Gauss 随机变量, 注意到 $\sqrt{T}(\hat{\gamma}_T - \gamma)$ 的分母几乎处处收敛到一个常数, 由此完成了证明.

现在, 利用推论 3.1, 可以显式写出 F_T 实部和虚部的积分核函数, 因此可以进一步研究 F_T 更为精细的渐近行为. 在此将讨论 F_T 的 Berry-Esséen 型上界估计. 事实上, 这个上界估计也蕴含了 F_T 的渐近正态性. 注意到 F_T 是复 $(1, 1)$ 重 Wiener-Itô 积分, 则推论 3.1 不但表明其实部和虚部都是实 2 重 Wiener-Itô 积分, 而且可以分别显式计算出实部和虚部的积分核. 进一步地, 利用文献 [80, 引理 5.2.4 和定理 6.2.2], 可以得到 F_T 的 Berry-Esséen 型上界. 下面给出详细的计算过程.

设 $\alpha_H = H(2H - 1)$, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$, 以及 $Z \sim \mathcal{N}(0, C)$ 是复 Gauss 随机变量, 其协方差矩阵为

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^2 + c & b \\ b & \sigma^2 - c \end{pmatrix},$$

其中 σ^2 和 $c + ib$ 分别定义如下:

$$\sigma^2 = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda}, & H = \frac{1}{2}, \\ \alpha_H \frac{\Gamma(2H-1)}{2\lambda} \left(\frac{1}{\gamma^{4H-2}} + \frac{1}{\bar{\gamma}^{4H-2}} \right) \left(\Gamma(2H-1) + \frac{2\Gamma(3-4H)\Gamma(4H-2)}{\Gamma(2-2H)} \right), & H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \end{cases}$$

和

$$c + ib = \begin{cases} 0, & H = \frac{1}{2}, \\ \alpha_H \frac{2\Gamma(2H-1)}{\bar{\gamma}^{4H-1}} \left(\Gamma(2H) + \frac{\Gamma(3-4H)\Gamma(4H-1)}{\Gamma(2-2H)} \right), & H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]. \end{cases}$$

设 C_T 为 $(\operatorname{Re} F_T, \operatorname{Im} F_T)$ 的协方差矩阵. 由文献 [21, 引理 3.5] 得到

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[|F_T|^2] = \sigma^2, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} E[F_T^2] = c + ib.$$

这说明 $\lim_{T \rightarrow \infty} \det(C_T) = \det(C)$, 其中 $\det(\cdot)$ 表示矩阵的行列式. 注意到 C 可逆, 则对于充分大的 T , C_T 也可逆. 设 $\tilde{F}_T$ 是复随机变量, 其实部和虚部为

$$(\operatorname{Re} \tilde{F}_T, \operatorname{Im} \tilde{F}_T)^T = C^{\frac{1}{2}} C_T^{-\frac{1}{2}} (\operatorname{Re} F_T, \operatorname{Im} F_T)^T,$$

其中 $(\cdot)^T$ 表示矩阵的转置. 例 3.1 的主要结论如下:

性质 3.3 存在仅依赖于 γ 和 H 的常数 $c(\gamma, H)$, 使得对于充分大的 T , 复随机变量 $\tilde{F}_T$ 与 Z 之间的 1-Wasserstein 距离满足

$$d_W(\tilde{F}_T, Z) \leq \frac{c(\gamma, H)}{T^\kappa}, \quad \text{其中 } \kappa = \begin{cases} \frac{1}{2}, & H \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8} \right), \\ \frac{1}{2} - \epsilon, & H = \frac{5}{8}, \quad \forall \epsilon > 0, \\ 3 - 4H, & H \in \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4} \right). \end{cases}$$

注 3.3 虽然在性质 3.3 中得到了 F_T 的 Berry-Esséen 型上界, 但统计量 $\sqrt{T}(\hat{\gamma}_T - \gamma)$ 的精细渐近性质才是这一专题中众所关注的问题. 实际上, 即使在实一维情形中, 这个问题也是具有挑战性的, 例如在文献 [43, 第 7.2 小节] 中, Hu 等考虑了一维实 Ornstein-Uhlenbeck 方程相关统计量的渐近性质, 也仅能证明对应的 F_T 的密度收敛性. 对统计量 $\sqrt{T}(\hat{\gamma}_T - \gamma)$ 本身更精确的渐近分析是一个值得探讨的问题.

在该例中, 定义 $\mathfrak{H}$ 如下: 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, 设 $\mathfrak{H} := L^2(\mathbb{R}^+)$; 当 $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 时, 设

$$\mathfrak{H} := \left\{ f \mid f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|_{\mathfrak{H}}^2 := \int_0^\infty \int_0^\infty f(s)f(t)\varphi(s,t)dsdt < \infty \right\},$$

其中 $\varphi(s, t) = \alpha_H |s - t|^{2H-2}$, 内积定义为

$$\langle f, g \rangle_{\mathfrak{H}} = \int_0^\infty \int_0^\infty f(s)g(t)\varphi(s,t)dsdt.$$

按照通常方式复化 $\mathfrak{H}$, 并记为 $\mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$.

由 (3.11) 可知, F_T 是关于 $(\beta_t)_{t \geq 0}$ 的复 (1, 1) 重 Wiener-Itô 积分, 其具体形式为

$$F_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \bar{Z}_t d\beta_t = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^T e^{-\bar{\gamma}(t-s)} I_{\{0 \leq s \leq t \leq T\}} d\beta_t d\bar{\beta}_s = \mathcal{I}_{1,1}(\psi_T(t, s)),$$

其中

$$\psi_T(t, s) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-\bar{\gamma}(t-s)} I_{\{0 \leq s \leq t \leq T\}} \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}.$$

在证明性质 3.3 之前, 先给出如下的性质:

性质 3.4 对于任意的 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{I}_{1,1}(f)$ 具有如下唯一的表示式:

$$\mathcal{I}_{1,1}(f) = I_2(u) + iI_2(v),$$

其中 $I_2(\cdot)$ 是关于 $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ 上的实等距 Gauss 过程的 2 重 Wiener-Itô 积分, $u, v \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot 2}$ 满足

$$u(t, s) + iv(t, s) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} f(t, s) + f(s, t) \\ i(f(t, s) - f(s, t)) \\ -i(f(t, s) - f(s, t)) \\ f(t, s) + f(s, t) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

这一性质不仅仅局限于当下的例子, 对一般的 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 以及 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$, 该性质对 $\mathcal{I}_{1,1}(f)$ 都成立.

证明 直接计算得

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}}, i(\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}))^{\otimes 2} &= \begin{pmatrix} \mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}} \\ i(\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}} \\ i(\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}})(\mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}}) \\ i(\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}})(\mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}}) \\ i(\mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}})(\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}) \\ -(\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}})(\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^2 + \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}}^2 \\ i(\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} - \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}^2) \\ i(\mathcal{D}^2 - \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}^2) \\ -\mathcal{D}^2 + \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由推论 3.1 和等式 $\mathcal{D}^2\mathcal{I}_{1,1}(f) = \bar{\mathcal{D}}^2\mathcal{I}_{1,1}(f) = 0$ 得到

$$\begin{aligned} u(t, s) + iv(t, s) &= \frac{1}{4}(\mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}}, i(\mathcal{D} - \bar{\mathcal{D}}))^{\otimes 2}\mathcal{I}_{1,1}(f) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} \\ i(\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} - \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}) \\ i(-\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}) \\ \mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{D}}\mathcal{D} \end{pmatrix} \mathcal{I}_{1,1}(f) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} f(t, s) + f(s, t) \\ i(f(t, s) - f(s, t)) \\ -i(f(t, s) - f(s, t)) \\ f(t, s) + f(s, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

证毕. □

注 3.4 对于 $d \geq 1, n \geq 1$, 基于文献 [83, 第 23 页] 中关于 $f \in (L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d))^{\otimes n}$ 对称化的定义, 自然地推导出 $g(t, s) \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\otimes 2}$ 的对称化 $\tilde{g}(t, s) \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot 2}$, 即

$$g(t, s) = \begin{pmatrix} g_1(t, s) \\ g_2(t, s) \\ g_3(t, s) \\ g_4(t, s) \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}(t, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_1(t, s) + g_1(s, t) \\ g_2(t, s) + g_3(s, t) \\ g_3(t, s) + g_2(s, t) \\ g_4(t, s) + g_4(s, t) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

由此可得 (3.12) 中定义的 u 和 v 属于 $(\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot 2}$.

由性质 3.4 和文献 [80, 引理 5.2.4 和定理 6.2.2] 可以给出性质 3.3 的证明.

性质 3.3 的证明 由性质 3.4, 可以推导出

$$F_T = \mathcal{I}_{1,1}(\psi_T(t, s)) = I_2(u_T) + iI_2(v_T),$$

其中

$$u_T(t, s) + iv_T(t, s) = \frac{e^{-\gamma|t-s|}}{4\sqrt{T}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i(I_{\{0 \leq t \leq s \leq T\}} - I_{\{0 \leq s \leq t \leq T\}}) \\ i(I_{\{0 \leq t \leq s \leq T\}} - I_{\{0 \leq s \leq t \leq T\}}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

利用文献 [80, 引理 5.2.4 和定理 6.2.2] 中的结论, 只需要证明存在一个仅依赖于 γ 和 H 的正常数 $c(\gamma, H)$, 使得对于充分大的 T , 有

$$\|u_T \otimes_1 u_T\|_{(\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\otimes 2}} \leq \frac{c(\gamma, H)}{T^\kappa}, \quad \|v_T \otimes_1 v_T\|_{(\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\otimes 2}} \leq \frac{c(\gamma, H)}{T^\kappa}. \quad (3.14)$$

事实上, 注意到

$$|u_T(t, s) + iv_T(t, s)| \leq \frac{e^{-\lambda|t-s|}}{4\sqrt{T}} I_{\{0 \leq s, t \leq T\}} \mathbf{1},$$

其中向量 $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1)^T$. 设 $h_T(t, s) = \frac{e^{-\lambda|t-s|}}{4\sqrt{T}} I_{\{0 \leq s, t \leq T\}}$, 则存在一个仅依赖于 γ 和 H 的正常数 $c(\gamma, H)$, 使得对于充分大的 T , 有

$$\|u_T \otimes_1 u_T\|_{(\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\otimes 2}} \leq \|h_T \otimes_1 h_T\|_{\mathfrak{H}^{\otimes 2}} \leq \frac{c(\gamma, H)}{T^\kappa},$$

其中最后一个不等式取自文献 [22, 引理 3.1]. 同理, 可以得到 (3.14) 的第二个不等式也成立. $\square$

然而, 也需要注意到, 对于复 Wiener-Itô 重积分, 利用递归的方法或广义 Stroock 公式时, 随着积分重数的增加, 计算的复杂性和困难也急剧增加. 事实上, 对于实 Wiener-Itô 重积分, 也只对 2 重随机积分有完整的刻画, 这是通过与 Hilbert-Schmidt 算子建立对应关系实现的. 因此, 在处理高阶 Wiener-Itô 重积分时, 无论实的情形还是复的情形, 都需要具体问题具体分析. 但对于某些复 Wiener-Itô 重积分, 将其看作 2 维实 Wiener-Itô 重积分的观点依然非常有用. 例如, 文献 [17] 研究了如下具有一般非线性形式的复随机 Ginzburg-Landau 方程:

$$\begin{cases} \partial_t u = (i + \mu)\Delta u - \nu|u|^{2m}u + \tau u + \xi, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^2, \\ u(0, \cdot) = u_0, \end{cases} \quad (3.15)$$

其中 $\mu > 0$, $\nu, \tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \nu > 0$, $m \geq 1$ 为整数, ξ 是复时空白噪声. 为了得到方程 (3.15) 重整化解的适定性, 需要得到复 (k, l) 重 Wiener-Itô 积分 $Z_{-\infty, t}^{k, l}(\phi)$, $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ 的时空正则性估计, $Z_{-\infty, t}^{k, l}(\phi)$ 具体形式参见文献 [17, 公式 (3.3)]. 直接计算其积分核函数进行估计会非常复杂, 但可以将对 $Z_{-\infty, t}^{k, l}(\phi)$ 正则性的估计转化为对其 Fourier 系数二阶矩的估计. 实际上, 将复 Wiener-Itô 重积分看作 2 维实 Wiener-Itô 重积分, 对其 Fourier 系数二阶矩的估计可以利用相应的实值函数的估计 (参见文献 [72, 命题 5]) 得到, 从而得到 $Z_{-\infty, t}^{k, l}(\phi)$ 的时空正则性 (参见文献 [17, 命题 3.1]). Trenberth^[108] 从复 Besov 空间出发, 利用广义 Laguerre 多项式作方程 (3.15) 的重整化, 但文献 [17] 中的证明方法和验证流程更为简洁与方便, 也较大程度上减少了论证的篇幅.

4 复四阶矩定理与收敛速率

4.1 复四阶矩定理

首先回顾实的四阶矩定理.

定理 4.1 (四阶矩定理, 参见文献 [80, 定理 5.2.7]) 设 $q \geq 2$ 是整数, 随机变量序列 $F_n = I_q(f_n)$ 是关于 Gauss 等距过程 X 的 q 阶混沌, 其中 $f \in \mathfrak{H}^{\odot q}$. 进一步地, 假设当 $n \rightarrow \infty$ 时, $E[F_n^2] \rightarrow \sigma^2 > 0$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 下述条件等价:

- (i) F_n 依分布收敛到正态随机变量 $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$;
- (ii) $E[F_n^4] \rightarrow 3\sigma^4 = E[N^4]$;
- (iii) $\text{Var}(\|DF_n\|_{\mathfrak{H}}^2) \rightarrow 0$;
- (iv) 对于任意的 $r = 1, \dots, q-1$, 有 $\|f_n \tilde{\otimes}_r f_r\|_{\mathfrak{H}^{\otimes}(2q-2r)} \rightarrow 0$;
- (v) 对于任意的 $r = 1, \dots, q-1$, 有 $\|f_n \otimes_r f_r\|_{\mathfrak{H}^{\otimes}(2q-2r)} \rightarrow 0$.

2005 年, Nualart 和 Peccati^[87] 首次给出了四阶矩定理 (定理 4.1) 的完整形式及证明. 之后, 研究者们从不同的角度给出了四阶矩定理不同的证明, 不但加深了对 Wiener-Itô 混沌的认识理解, 而且还提出了新的方法和技术, 得到了更为深入的结果并拓展了定理的应用范围. 在文献 [87] 发表不久后, Peccati 和 Tudor^[93] 得到了多维版本的四阶矩定理. 2008 年, Nualart 和 Ortiz-Latorre^[85] 使用 Malliavin 分析的技术, 提出了四阶矩定理的一个新证明. 紧接着, 2009 年, Nourdin 和 Peccati^[77] 将 Malliavin 分析与 Stein 方法结合在一起, 推导出 $\{F_n\}_{n \geq 1}$ 正态逼近时定量和显式的上界. 进一步发展这套方法, 多位研究者得到了 Gauss 场泛函的多维正态逼近的显式上界, 如文献 [74, 78, 81]. 2010 年, Nourdin 和 Peccati^[79] 利用 Malliavin 分析中的无穷维分部积分公式, 给出 Gauss 场泛函累量 (cumulant) 的新的递推计算方法, 并基于累量给出了四阶矩定理新的证明. 从信息论的角度, 将相对熵和 Fisher 信息熵与 Malliavin 分析方法结合, Nourdin 等^[82] 以及 Nourdin 和 Nualart^[75] 分别基于相对熵和 Fisher 信息熵给出了四阶矩定理新的证明. 而 Ledoux^[61] 引入 Markov 算子迭代梯度和纯点谱混沌的概念, 在抽象的 Markov 算子理论框架下, 得到了混沌特征函数收敛到正态分布的条件, 不但这一结果涵盖了 Wiener-Itô 混沌的四阶矩定理, 而且这个方法还可以应用于其他的极限分布, 如 Gamma 分布. Azmoodeh 等^[5] 将文献 [61] 中的证明方法进行了很大简化, 而且其方法和结果还可以包含具有 Laguerre 和 Jacobi 结构的 Markov 扩散算子, 极限分布除了正态分布、Gamma 分布外还包括 Beta 分布. 最近, Hairer 在其随机分析讲义 [36, 第 8 节] 中给出了基于正则结构观念和用图表示的四阶矩定理的证明方法. 四阶矩定理得到大量关注, 在理论和应用方面取得很多有意义的结果. 这里不一一叙述, 感兴趣的读者可以通过前述网站进行更多的了解.

对于复四阶矩定理, Chen 和 Liu^[24] 首次利用复 Wiener-Itô 混沌与实 Wiener-Itô 混沌之间的关系给出了复四阶矩定理, 之后在文献 [15, 16, 21, 25] 中还是利用这一思想, 借助定理 4.1, 给出了复四阶矩定理不同形式的等价条件, 可以总结成如下的定理:

定理 4.2 (复四阶矩定理) 设非负整数 m 和 n 满足 $m+n \geq 2$, $F_k = \mathcal{I}_{m,n}(f_k)$ 是关于复 Gauss 等距过程 Z 的 $m+n$ 阶混沌, 记 $l = m+n$. 进一步地, 假设当 $k \rightarrow \infty$ 时, $E[|F_k|^2] \rightarrow \sigma^2$ 和 $E[F_k^2] \rightarrow c+ib$, 其中 $|\cdot|$ 表示复数的模长 (或绝对值), $c, b \in \mathbb{R}$, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 下述条件等价:

- (i) 实 2 维随机变量序列 $(\text{Re}F_k, \text{Im}F_k)$ 依分布收敛到协方差矩阵为

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^2 + c & b \\ b & \sigma^2 - c \end{pmatrix}$$

的二元正态分布 $N \sim \mathcal{N}((0, 0), C)$;

(ii) $E[|F_k|^4] \rightarrow c^2 + b^2 + 2\sigma^4$;

(iii) 对于任意的 $0 < i + j \leq l - 1$, 有 $\|f_k \otimes_{i,j} f_k\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2(l-i-j))}} \rightarrow 0$ 和 $\|f_k \otimes_{i,j} h_k\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2(l-i-j))}} \rightarrow 0$, 其中 h_k 是 $\bar{F}_k$ 的积分核, 即 $\bar{F}_k = I_{n,m}(h_k)$, 即性质 2.8(i) 中定义的 f_k 的反的复共轭;

(iv) 对于任意的 $0 < i + j \leq l - 1$, 有 $\|f_k \tilde{\otimes}_{i,j} f_k\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2(l-i-j))}} \rightarrow 0$ 和 $\|f_k \tilde{\otimes}_{i,j} h_k\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2(l-i-j))}} \rightarrow 0$;

(v) 对于任意的 $0 < i + j \leq l - 1$, 有 $\|f_k \otimes_{i,j} h_k\|_{\mathfrak{H}^{\otimes(2(l-i-j))}} \rightarrow 0$;

(vi) $\|DF_k\|_{\mathfrak{H}}^2$, $\|D\bar{F}_k\|_{\mathfrak{H}}^2$ 和 $\langle DF_k, D\bar{F}_k \rangle_{\mathfrak{H}}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到常数, 其中 $\mathcal{D}$ 是复 Malliavin 导数, 即 $\text{Var}(\|DF_k\|_{\mathfrak{H}}^2) \rightarrow 0$, $\text{Var}(\|D\bar{F}_k\|_{\mathfrak{H}}^2) \rightarrow 0$, $\text{Var}(\langle DF_k, D\bar{F}_k \rangle_{\mathfrak{H}}) \rightarrow 0$.

Campese^[10] 利用复 Stein 方法也重新证明了复四阶矩定理, 但其结论要求极限的复 Gauss 随机变量是圆对称的, 而以上的复四阶矩定理 (定理 4.2) 并不需要这一要求. 单从证明复四阶矩定理的角度看, 利用将复混沌看作 2 维实混沌的角度已经足够. 然而, 既然实四阶矩定理从不同的角度可以给出不同的证明方法, 那么是否需要将这些方法一一推广到复的版本? 这是一个值得深思的问题. 一个朴素的想法是, 在尝试作推广时, 需要看能否引入新的概念、技术或发现复混沌新的结构, 甚至得到新的结果.

4.2 收敛速率

2009 年, Nourdin 和 Peccati^[77] 结合 Malliavin 分析和 Stein 方法得到了 F_n 正态逼近时定量和显式的上界估计, 有力地推进了四阶矩定理收敛速率的研究. 在文献 [13, 第一节] 和 [14, 第一和二章] 中, Chen 给出了近十几年收敛速率研究的一个概述.

对于复四阶矩定理收敛速率的研究, 目前可行的思路之一还是利用第 3.1 小节中思想, 将问题转化为 2 维实 Wiener-Itô 混沌的情形, 借助已有的向量值实 Wiener-Itô 混沌收敛速率的结果来研究. 然而, 对于向量值的实 Wiener-Itô 混沌, 收敛速率结果不如一维情形完整系统. 其原因如下. (1) 在使用多维 Stein 方法时, Stein 方程中出现了二阶算子, 因此检验函数要求是二次光滑的, 而在一维 Stein 方程中, 仅仅要求是一次光滑的. 而且, 多维 Stein 方程解的正则性也比一维 Stein 方程的解弱 (参见文献 [80, 第 3 和 4 节]). (2) 希望通过光滑距离下的结果以及逼近方法得到 1-Wasserstein 距离或非光滑距离 (如全变差距离) 下的结论时, 多维情形对逼近的函数类也有较高的要求. (3) 随机向量分量之间复杂的相关性也是不易处理的.

最近, 在这一专题上, 一个突出的结果是 Chen^[13] 得到的, 即对于分量阶数相同的实 Wiener-Itô 重积分, 得到了光滑距离下四阶矩定理的最优收敛速率. 该文献的主要创新点是对多维 Stein 方程进行高阶展开并将累量引入到多维收敛速率的研究中. 文献 [13] 的主要结果表述如下.

首先, 对于 $k = 3, 4$, 定义 d 维随机变量分布之间的光滑距离

$$\rho_k(F, G) = \sup\{|E[g(F)] - E[g(G)]|\}, \quad (4.1)$$

其中 g 取遍 $C^k(\mathbb{R}^d)$ 中满足 $M_j(g) \leq 1$ 和 $0 \leq j \leq k$ 的函数, $M_k(g)$ 是 g 的 $k - 1$ 阶导数的 Lipschitz 常数.

定理 4.3 (参见文献 [13, 定理 3.1]) 设 $q \geq 2$, $\{F_n = (F_{n,1}, \dots, F_{n,d})\}_{n \geq 1}$ 是一列 q 阶 Wiener-Itô 混沌. 假设 F_n 有相同的协方差阵 C . 如果 F_n 依分布收敛到 $Z \sim \mathcal{N}_d(0, C)$, 则存在两个不依赖于 n 的常数 $0 < c_1 < c_2 < \infty$, 使得对于充分大的 n , 有

$$c_1 M(F_n) \leq \rho_4(F_n, Z) \leq c_2 M(F_n).$$

进一步地, 如果 C 是正定矩阵, 则

$$c_1 M(F_n) \leq \rho_3(F_n, Z) \leq c_2 M(F_n),$$

其中 $M(F_n)$ 是由 F_n 累量确定的一个正数 (具体表示式参见文献 [13, 公式 (3.1)]).

文献 [13, 命题 3.6] 将上述最优速率的结论推广到 F_n 的协方差矩阵 C_n 不同, 但满足 $C_n - C$ 的 Hilbert-Schmidt 模收敛到 0 的情形.

将以上结果应用到复 Wiener-Itô 重积分, 得到如下定理:

定理 4.4 (参见文献 [13, 定理 4.1]) 设 $p + q \geq 2$, $\{F_n = \mathcal{I}_{p,q}(f_n)\}_{n \geq 1}$ 是一列复 (p, q) 重的 Wiener-Itô 随机积分, 其中 $f_n \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot p} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}^{\odot q}$. 假设 F_n 有相同的协方差阵 C . 如果 F_n 依分布收敛到协方差矩阵为 C 的复正态随机变量 Z , 则存在两个不依赖于 n 的常数 $0 < c_1 < c_2 < \infty$, 使得对于充分大的 n , 有

$$c_1 M'(F_n) \leq \rho_4(F_n, Z) \leq c_2 M'(F_n).$$

进一步地, 如果 C 是正定矩阵, 则

$$c_1 M'(F_n) \leq \rho_3(F_n, Z) \leq c_2 M'(F_n),$$

其中

$$M'(F_n) = \max\{|E[F_n^3]|, |E[F_n^2 \overline{F_n}]|, E[|F_n|^4] - 2(E[|F_n|^2])^2 - |E[F_n^2]|^2\}.$$

事实上, 定理 4.4 证明中最关键的步骤是将定理 4.3 中 $M(F_n)$ 用 F_n 和 $\overline{F_n}$ 的矩表示出来. 同样, 文献 [13, 命题 4.2] 将定理 4.4 的结果推广到 F_n 的协方差矩阵 C_n 不同, 但满足 $C_n - C$ 的 Hilbert-Schmidt 模收敛到 0 的情形.

目前, 对于复 Wiener-Itô 随机积分四阶矩定理在 1-Wasserstein 距离和非光滑距离 (如全变差距离) 下的收敛速率的研究还不多, 主要有文献 [10, 16]. Campese^[10] 结合复 Stein 方法与文献 [5, 61] 中 Markov 算子四阶矩定理证明的框架, 给出了复四阶矩定理在 1-Wasserstein 距离下定量的上界. Chen 等^[16] 利用将复 Wiener-Itô 重积分看作 2 维实 Wiener-Itô 重积分的观点, 结合向量值实随机重积分相关的结果 (参见文献 [80, 定理 6.2.2]), 得到了一元和多元复四阶矩定理的 Berry-Essén 型上界, 再利用文献 [13] 中的下界得到了相应的 Berry-Essén 型下界. 特别地, 文献 [16] 将上下界用复随机重积分核的压缩形式表示出来, 这在实际应用中更为方便. 文献 [16] 中的结果改进了文献 [10] 中的上界, 而且不要求极限的复 Gauss 随机变量是圆对称的, 甚至在某些情形下, 也改进了实 2 维的结果 (参见文献 [16, 注 5.2]); 同时利用这个核函数压缩形式表示的上界, 还可以得到复四阶矩定理一个更为简洁的等价条件, 即定理 4.2(v); 在一些情形下, 还得到了 1-Wasserstein 距离下复四阶矩定理的最优收敛速率, 例如, 在例 3.1 中, 当 Hurst 指数是 $\frac{1}{2}$ 时, 即复 Brown 运动时, 得到了 $\tilde{F}_T$ 的最优收敛速率是 $T^{-\frac{1}{2}}$. 通过该实例也进一步说明, 我们的上下界估计明确地改进了已有的相关结果, 利用文献 [10, 定理 4.6] 仅可以得到 $\tilde{F}_T$ 上界的阶是 $T^{-\frac{1}{4}}$.

当然, 也应该看到文献 [10, 16] 中的结果远非完善. 文献 [16, 定理 5.1] 得到了多元复 Wiener-Itô 重积分四阶矩定理的上界与积分重数偏序有关, 目前还不清楚上界中这种偏序关系是本质的还是估计的技术限制引发的. 这也说明无论是多元实 Wiener-Itô 重积分还是对复 Wiener-Itô 重积分, 四阶矩定理在 1-Wasserstein 距离和非光滑距离下精确的上界估计或最优收敛速率问题都具有复杂性和难度, 是一个值得研究的课题.

5 进一步需要研究的问题

本节列出一些与复 Wiener-Itô 混沌相关的可以进一步深入研究的问题.

(1) 在处理高阶 Wiener-Itô 积分时, 由于涉及复杂的计算, 因此不同的实际模型应根据具体情形逐一讨论. 即使在实的情形中, 也只对 2 重 Wiener-Itô 积分有完整的刻画. 这是因为 2 重 Wiener-Itô 积分可以与 Hilbert-Schmidt 算子联系起来 (参见文献 [80, 第 2.7.4 小节]). 2 重 Wiener-Itô 积分在应用中也受到了较多关注, 经常出现在统计学、概率论和随机过程等领域 (参见文献 [43, 47, 55, 56]).

对于复 Wiener-Itô 积分, 值得注意的是复 (p, q) 重 Wiener-Itô 积分的实部和虚部的核函数都是 2^{p+q} 维的. 这种维数急剧增长的现象使得将高阶复重积分转化为 2 维实重积分的思路在具体执行时可能会遇到较大的困难. 这也促使我们进一步推进复多重 Wiener-Itô 积分理论自身的发展. 首先聚焦于首个非平凡的复多重 Wiener-Itô 积分, 即满足 $p + q = 2$ 的 $\mathcal{I}_{p,q}$. 此外, 注意到这个重积分也常出现在一些实际模型中 (参见文献 [21, 99]).

与实的情形相比, 研究满足 $p + q = 2$ 的 $\mathcal{I}_{p,q}$ 结构的难点之一在于 $\mathcal{I}_{1,1}(f)$ 中核函数 $f \in \mathfrak{H}_{\mathbb{C}} \otimes \mathfrak{H}_{\mathbb{C}}$ 是不对称的, 这导致无法构造 Hilbert-Schmidt 算子. 但是, 利用广义 Stroock 公式 (推论 3.1), 也可以参考例 3.1 中的计算, 有

$$\mathcal{I}_{1,1}(f) = I_2(u) + iI_2(v),$$

其中, $I_2(\cdot)$ 是关于 $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ 上等距 Gauss 过程的 2 重 Wiener-Itô 积分, $u, v \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot 2}$ 的具体表示由性质 3.4 中的等式 (3.12) 给出. 同样基于文献 [83, 第 23 页] 中关于 $f \in (L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d))^{\otimes n}$, $d, n \geq 1$ 的对称化定义, $g(t, s) \in (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\otimes 2}$ 的对称化可以由等式 (3.13) 给出, 即等式 (3.12) 中定义的 u 和 v 属于 $(\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H})^{\odot 2}$. 我们希望尝试利用 $\mathcal{I}_{1,1}(f)$ 实部和虚部核函数的对称结构, 以及处理实 2 阶 Wiener-Itô 积分时非常有效的两个工具 (Hilbert-Schmidt 算子和辅助核函数序列), 清晰地刻画 $\mathcal{I}_{1,1}(f)$ 的结构. 而对于 $\mathcal{I}_{2,0}(f_1)$ 和 $\mathcal{I}_{0,2}(f_2)$, 虽然其结构也不是平凡的, 但其积分核函数 f_1 和 f_2 是对称的, 因此可以参考实 2 维的情形构造相应的 Hilbert-Schmidt 算子来研究, 其难度应该比 $\mathcal{I}_{1,1}(f)$ 小.

(2) 文献 [13] 推导了所有分量属于同阶 Wiener-Itô 混沌的 Wiener-Itô 重积分向量的最优收敛速率. 我们将继续尝试利用其他技术来解决分量属于不同阶 Wiener-Itô 混沌的 Wiener-Itô 重积分向量的最优收敛速率.

(3) 文献 [16] 得到了复多重 Wiener-Itô 积分序列在 1-Wasserstein 距离下的 Berry-Esséen 界, 但该界仅在某些特殊情形下是最优的. 我们会继续考虑如何处理一般情形下复 Wiener-Itô 重积分序列的最优 Berry-Esséen 界.

(4) 对于 Arató 等^[4]研究 Chandra 摆动的复 Ornstein-Uhlenbeck 过程的参数估计问题, 文献 [3, 21] 将驱动噪声分别推广为 Hurst 指数 $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 和 $H \in (0, \frac{1}{2})$ 的分数 Brown 运动, 得到了形式上的最小二乘估计量具有强相合性及渐近正态性. 本质上, 这些结果是研究两个复 $(1, 1)$ 重 Wiener-Itô 积分比值过程的渐近性质. 尽管 Chen^[13]给出了向量值的 Wiener-Itô 重积分在光滑距离下的最优四阶矩定理, 但是对于这种复数值比值过程的收敛速率, 即所谓的 Berry-Esséen 型上界, 仍没有解决. 作为比较, 一维分数 Ornstein-Uhlenbeck 过程的 Berry-Esséen 型上界则有大量的结果.

(5) Schulte 和 Thäle^[97]给出了当四阶矩定理条件成立时实 Wiener-Itô 重积分的中偏差原理. 由于向量值的 Wiener-Itô 重积分的中偏差原理近十年来一直没有进展, 所以考虑复 Wiener-Itô 重积分的中偏差原理是一个难度适当的问题. 因为后者本质上是一个具有特殊代数结构的 2 维实 Wiener-Itô 重积分. 其要点仍然是对向量值 Wiener-Itô 重积分累量的估计.

(6) 宇宙微波背景辐射极化的数学模型之一是环面上复 Gauss 场的从属过程, 具体而言, 由于数据的群对称性, 人们要求 Gauss 场满足“圆对称性”, 并研究复 Gauss 场的各类从属过程 (即复 (p, q) 重 Wiener-Itô 积分, $p + q = 2, 3$) 的“双谱 (bispectrum)”等统计量 (参见文献 [60] 及其中的参考文献) 的统计渐近性质, 特别是渐近正态性和 Berry-Esséen 型上界 (参见文献 [6, 66, 68]). 这个课题延伸下去是考虑球面上的相关问题, 将面对非交换表示论带来的困难 (参见文献 [67]).

致谢 感谢审稿人有价值的修改建议. 陈勇和刘勇感谢钱敏平老师和冀光鲁老师多年来在学业、科研和生活上的指导、支持与帮助. 刘勇受北京大学统计科学中心支持.

参考文献

- 1 Aghaei A S, Plataniotis K N, Pasupathy S. Maximum likelihood binary detection in improper complex Gaussian noise. In: Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Las Vegas: IEEE, 2008, 3209–3212
- 2 Agorram F, Benkhadra A, El Hamyani A, et al. Complex Hermite functions as Fourier-Wigner transform. Integral Transforms Spec Funct, 2016, 27: 94–100
- 3 Alazemi F, Alsenafi A, Chen Y, et al. Parameter estimation for the complex fractional Ornstein-Uhlenbeck processes with Hurst parameter $H \in (0, \frac{1}{2})$. Chaos Solitons Fractals, 2024, 188: 115556
- 4 Arató M, Kolmogorov A N, Sinai Y G. Evaluation of the parameters of a complex stationary Gauss-Markov process. Dokl Akad Nauk SSSR, 1962, 146: 747–750
- 5 Azmoodeh E, Campese S, Poly G. Fourth moment theorems for Markov diffusion generators. J Funct Anal, 2014, 266: 2341–2359
- 6 Baldi P, Marinucci D, Varadarajan V S. On the characterization of isotropic Gaussian fields on homogeneous spaces of compact groups. Electron Commun Probab, 2007, 12: 291–302
- 7 Barone P. On the distribution of poles of Padé approximants to the Z-transform of complex Gaussian white noise. J Approx Theory, 2005, 132: 224–240
- 8 Budhiraja A, Chen Y, Xu L. Large deviations of the entropy production rate for a class of Gaussian processes. J Math Phys, 2021, 62: 052702
- 9 Cameron R H, Martin W T. The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. Ann of Math (2), 1947, 48: 385–392
- 10 Campese S. Fourth moment theorems for complex Gaussian approximation. arXiv:1511.00547, 2015
- 11 Cannizzaro G, Toninelli F. Lecture notes on stationary critical and super-critical SPDEs. arXiv:2403.15006, 2024
- 12 Carmona R A, Nualart D. Traces of random variables on Wiener space and the Onsager-Machlup functional. J Funct Anal, 1992, 107: 402–438
- 13 Chen H. Optimal rate of convergence for vector-valued Wiener-Itô integral. ALEA Lat Am J Probab Math Stat, 2024, 21: 179–214
- 14 Chen H. Optimal rate of convergence and kernel representation formula of Wiener-Itô integral (in Chinese). PhD Thesis. Beijing: Peking University, 2024 [陈慧萍. 维纳 - 伊藤积分的最优收敛速率及核表示公式. 博士学位论文. 北京: 北京大学, 2024]
- 15 Chen H, Chen Y, Liu Y. Kernel representation formula: From complex to real Wiener-Itô integrals and vice versa. Stochastic Process Appl, 2024, 167: 104241
- 16 Chen H, Chen Y, Liu Y. Berry-Esséen bound for complex Wiener-Itô integral. arXiv:2407.05353, 2024
- 17 Chen H, Chen Y, Liu Y. Ergodicity for Ginzburg-Landau equation with a complex-valued space-time white noise on two-dimensional torus. arXiv:2408.11568, 2024
- 18 Chen Y. On a nonsymmetric Ornstein-Uhlenbeck semigroup and its generator. Commun Stoch Anal, 2015, 9: 69–78
- 19 Chen Y. Product formula and independence for complex multiple Wiener-Itô integrals. Adv Math (China), 2017, 46: 819–827
- 20 Chen Y, Ge H, Xiong J, et al. The large deviation principle and steady-state fluctuation theorem for the entropy production rate of a stochastic process in magnetic fields. J Math Phys, 2016, 57: 073302
- 21 Chen Y, Hu Y Z, Wang Z. Parameter estimation of complex fractional Ornstein-Uhlenbeck processes with fractional noise. ALEA Lat Am J Probab Math Stat, 2017, 14: 613–629
- 22 Chen Y, Kuang N H, Li Y. Berry-Esséen bound for the parameter estimation of fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. Stoch Dyn, 2020, 20: 2050023

- 23 Chen Y, Liu Y. On the eigenfunctions of the complex Ornstein-Uhlenbeck operators. *Kyoto J Math*, 2014, 54: 577–596
- 24 Chen Y, Liu Y. On the fourth moment theorem for complex multiple Wiener-Itô integrals. *Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top*, 2017, 20: 1750005
- 25 Chen Y, Liu Y. Complex Wiener-Itô chaos decomposition revisited. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2019, 39: 797–818
- 26 Cotfas N, Gazeau J P, Górska K. Complex and real Hermite polynomials and related quantizations. *J Phys A*, 2010, 43: 305304
- 27 Da Prato G, Debussche A. Strong solutions to the stochastic quantization equations. *Ann Probab*, 2003, 31: 1900–1916
- 28 de Jong P. A central limit theorem for generalized quadratic forms. *Probab Theory Related Fields*, 1987, 75: 261–277
- 29 de Jong P. A central limit theorem for generalized multilinear forms. *J Multivariate Anal*, 1990, 34: 275–289
- 30 Di Nunno G, Øksendal B, Proske F. *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*. Berlin: Springer-Verlag, 2009
- 31 Dineen S. *Complex Analysis on Infinite-Dimensional Spaces*. London: Springer-Verlag, 1999
- 32 Gallager R G. *Stochastic Processes: Theory for Applications*. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2013
- 33 Gross L. Abstract Wiener spaces. In: *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Berkeley, 1965/66)*. Berkeley: University of California Press, 1967, 31–42
- 34 Gubinelli M, Perkowski N. *Lectures on Singular Stochastic PDEs*. *Ensaos Matemáticos [Mathematical Surveys]*, vol. 29. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015
- 35 Hairer M. A theory of regularity structures. *Invent Math*, 2014, 198: 269–504
- 36 Hairer M. Introduction to Malliavin calculus. <https://hairer.org/notes/Malliavin.pdf>, 2021
- 37 Hida T. *Brownian Motion. Applications of Mathematics*, vol. 11. New York-Berlin: Springer-Verlag, 1980
- 38 Hida T, Kuo H H, Potthoff J, et al. *White Noise: An Infinite-Dimensional Calculus. Applications of Mathematics*, vol. 253. Dordrecht: Kluwer Academic Publ, 1993
- 39 Hoshino M. Global well-posedness of complex Ginzburg-Landau equation with a space-time white noise. *Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat*, 2018, 54: 1969–2001
- 40 Hoshino M, Inahama Y, Naganuma N. Stochastic complex Ginzburg-Landau equation with space-time white noise. *Electron J Probab*, 2017, 22: 104
- 41 Houdré C, Pérez-Abreu V. *Chaos Expansions, Multiple Wiener-Itô Integrals and Their Applications*. Boca Raton: CRC Press, 1994
- 42 Hu Y Z. *Analysis on Gaussian Spaces*. Hackensack: World Sci Publ, 2017
- 43 Hu Y Z, Lu F, Nualart D. Convergence of densities of some functionals of Gaussian processes. *J Funct Anal*, 2014, 266: 814–875
- 44 Hu Y Z, Meyer P-A. Chaos de Wiener et intégrale de Feynman. In: *Séminaire de Probabilités, XXII. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1321. Berlin: Springer, 1988, 51–71
- 45 Hu Y Z, Meyer P-A. Sur les intégrales multiples de Stratonovitch. In: *Séminaire de Probabilités, XXII. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1321. Berlin: Springer, 1988, 72–81
- 46 Hu Y Z, Meyer P-A. On the approximation of multiple Stratonovich integrals. In: *Stochastic Processes*. New York: Springer, 1993, 141–147
- 47 Hu Y Z, Nualart D. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Statist Probab Lett*, 2010, 80: 1030–1038
- 48 Huang Z Y, Yan J A. *Introduction to Infinite Dimensional Stochastic Analysis (in Chinese)*. Beijing: Science Press, 1997 [黄志远, 严加安. 无穷维随机分析引论. 北京: 科学出版社, 1997]
- 49 Ismail M E H. Analytic properties of complex Hermite polynomials. *Trans Amer Math Soc*, 2016, 368: 1189–1210
- 50 Itô K. Multiple Wiener integral. *J Math Soc Japan*, 1951, 3: 157–169
- 51 Itô K. Complex multiple Wiener integral. *Jpn J Math*, 1952, 22: 63–86
- 52 Janson S. *Gaussian Hilbert Spaces*. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 129. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1997
- 53 Johnson G W, Kallianpur G. Homogeneous chaos, p -forms, scaling and the Feynman integral. *Trans Amer Math Soc*, 1993, 340: 503–548
- 54 Kamionkowski M, Kosowsky A, Stebbins A. Statistics of cosmic microwave background polarization. *Phys Rev D*, 1997, 55: 7368–7388
- 55 Kim Y T, Park H S. Optimal Berry-Esseen bound for an estimator of parameter in the Ornstein-Uhlenbeck process. *J Korean Statist Soc*, 2017, 46: 413–425

- 56 Kim Y T, Park H S. Optimal Berry-Esseen bound for statistical estimations and its application to SPDE. *J Multivariate Anal*, 2017, 155: 284–304
- 57 Körezlioğlu H, Üstünel A S. Distributions, Girsanov and degree theorems on Wiener spaces. In: *White Noise Analysis* (Bielefeld, 1989). Hackensack: World Sci Publ, 1990: 231–244
- 58 Kuo H-H. *Introduction to Stochastic Integration*. New York: Springer, 2006
- 59 Lacey M T. Weak convergence in dynamical systems to self-similar processes with time average representation. In: *Chaos Expansions, Multiple Wiener-Itô Integrals and Their Applications*. Boca Raton: CRC Press, 1994, 163–178
- 60 Lan X, Marinucci D. The needlets bispectrum. *Electron J Stat*, 2008, 2: 332–367
- 61 Ledoux M. Chaos of a Markov operator and the fourth moment condition. *Ann Probab*, 2012, 40: 2439–2459
- 62 Luo H, Zhang X, Zhao S. Sobolev embeddings in infinite dimensions. *Sci China Math*, 2023, 66: 2157–2178
- 63 Major P. *Multiple Wiener-Itô Integrals: With Applications to Limit Theorems*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 849. Berlin: Springer, 1981
- 64 Major P. On the Estimation of Multiple Random Integrals and U-Statistics. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2079. Heidelberg: Springer, 2013
- 65 Malliavin P. *Stochastic Analysis*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 313. Berlin: Springer-Verlag, 1997
- 66 Marinucci D, Peccati G. High-frequency asymptotics for subordinated stationary fields on an Abelian compact group. *Stochastic Process Appl*, 2008, 118: 585–613
- 67 Marinucci D, Peccati G. *Random Fields on the Sphere: Representation, Limit Theorems and Cosmological Applications*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 389. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2011
- 68 Marinucci D, Rossi M. Stein-Malliavin approximations for nonlinear functionals of random eigenfunctions on S^d . *J Funct Anal*, 2015, 268: 2379–2420
- 69 Matalgah G M, Sabatier J M, Matalgah M M. A generalized likelihood ratio test for detecting targets in multiple-band spectral images with improper complex Gaussian noise. In: *Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Image Processing* (San Diego, 2008). San Diego: IEEE, 2008, 1856–1859
- 70 Meyer P-A. *Quantum Probability for Probabilists*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1538. Berlin: Springer-Verlag, 1993
- 71 Mourrat J-C, Weber H. The dynamic Φ_3^4 model comes down from infinity. *Comm Math Phys*, 2017, 356: 673–753
- 72 Mourrat J-C, Weber H, Xu W. Construction of Φ_3^4 diagrams for pedestrians. In: *From Particle Systems to Partial Differential Equations*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 209. Cham: Springer, 2017, 1–46
- 73 Mujica J. *Complex Analysis in Banach Spaces*. North-Holland Mathematics Studies, vol. 120. Amsterdam: North-Holland, 1986
- 74 Noredine S, Nourdin I. On the Gaussian approximation of vector-valued multiple integrals. *J Multivariate Anal*, 2011, 102: 1008–1017
- 75 Nourdin I, Nualart D. Fisher information and the fourth moment theorem. *Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat*, 2016, 52: 849–867
- 76 Nourdin I, Nualart D, Poly G. Absolute continuity and convergence of densities for random vectors on Wiener chaos. *Electron J Probab*, 2013, 18: 1–19
- 77 Nourdin I, Peccati G. Stein’s method on Wiener chaos. *Probab Theory Related Fields*, 2009, 145: 75–118
- 78 Nourdin I, Peccati G. Stein’s method meets Malliavin calculus: A short survey with new estimates. *Interdiscip Math Sci*, 2010, 8: 207–236
- 79 Nourdin I, Peccati G. Cumulants on the Wiener space. *J Funct Anal*, 2010, 258: 3775–3791
- 80 Nourdin I, Peccati G. *Normal Approximations with Malliavin Calculus: From Stein’s Method to Universality*. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 192. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2012
- 81 Nourdin I, Peccati G, Réveillac A. Multivariate normal approximation using Stein’s method and Malliavin calculus. *Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat*, 2010, 46: 45–58
- 82 Nourdin I, Peccati G, Swan Y. Entropy and the fourth moment phenomenon. *J Funct Anal*, 2014, 266: 3170–3207
- 83 Nualart D. *The Malliavin Calculus and Related Topics*, 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2006
- 84 Nualart D, Nualart E. *Introduction to Malliavin Calculus*. Institute of Mathematical Statistics Textbooks, vol. 9. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2018
- 85 Nualart D, Ortiz-Latorre S. Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus. *Stochastic Process Appl*, 2008, 118: 614–628
- 86 Nualart D, Pardoux E. Stochastic calculus with anticipating integrands. *Probab Theory Related Fields*, 1988, 78: 535–581

- 87 Nualart D, Peccati G. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *Ann Probab*, 2005, 33: 177–193
- 88 Nualart D, Tudor C A. The determinant of the iterated Malliavin matrix and the density of a pair of multiple integrals. *Ann Probab*, 2017, 45: 518–534
- 89 Nualart D, Vives J. Smoothness of Brownian local times and related functionals. *Potential Anal*, 1992, 1: 257–263
- 90 Nualart D, Vives J. Chaos expansions and local times. *Publ Mat*, 1992, 36: 827–836
- 91 Nualart D, Zakai M. Generalized Brownian functionals and the solution to a stochastic partial differential equation. *J Funct Anal*, 1989, 84: 279–296
- 92 Ocone D. Multiple integral expansions for nonlinear filtering. *Stochastics*, 1983, 10: 1–30
- 93 Peccati G, Tudor C A. Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals. In: *Séminaire de Probabilités XXXVIII. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1857. Berlin: Springer, 2005: 247–262
- 94 Reisenfeld S, Aboutanios E. A new algorithm for the estimation of the frequency of a complex exponential in additive Gaussian noise. *IEEE Commun Lett*, 2003, 7: 549–551
- 95 Revuz, D, Yor, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 293. Berlin: Springer-Verlag, 1999
- 96 Röckner M, Zhu R, Zhu X. Ergodicity for the stochastic quantization problems on the 2D-torus. *Comm Math Phys*, 2017, 352: 1061–1090
- 97 Schulte M, Thäle C. Cumulants on Wiener chaos: Moderate deviations and the fourth moment theorem. *J Funct Anal*, 2016, 270: 2223–2248
- 98 Segal I E. Tensor algebras over Hilbert spaces. I. *Trans Amer Math Soc*, 1956, 81: 106–134
- 99 Shen G, Tang Z, Yin X. Least-squares estimation for the Vasicek model driven by the complex fractional Brownian motion. *Stochastics*, 2022, 94: 537–558
- 100 Shigekawa I. *Stochastic Analysis*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 224. Providence: Amer Math Soc, 2004
- 101 Skorohod A V. On a generalization of the stochastic integral. *Teor Veroyatn Primen*, 1975, 20: 223–238
- 102 Slud E V. MWI expansions for functionals related to level-crossing counts. In: *Chaos Expansions, Multiple Wiener-Itô Integrals and Their Applications* (Guanajuato, 1992). Boca Raton: CRC Press, 1994, 125–143
- 103 Stroock D W. Some applications of stochastic calculus to partial differential equations. In: *Eleventh Saint Flour Probability Summer School-1981* (Saint Flour, 1981). *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 976. Berlin: Springer, 1983, 267–382
- 104 Stroock D W. Homogeneous chaos revisited. In: *Séminaire de Probabilités, XXI. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1247. Berlin: Springer, 1987, 1–7
- 105 Sun T C, Ho H C. On central and non-central limit theorems for non-linear functions of a stationary Gaussian process. In: *Dependence in Probability and Statistics: A Survey of Recent Results*. Boston: Birkhäuser, 1986, 3–19
- 106 Surgailis D, Woyczyński W A. Scaling limits of solutions of Burgers' equation with singular Gaussian initial data. In: *Chaos Expansions, Multiple Wiener-Itô Integrals and Their Applications* (Guanajuato, 1992), Boca Raton: CRC Press, 1994, 145–161
- 107 Tantet A, Chekroun M D, Dijkstra H A, et al. Ruelle-Pollicott resonances of stochastic systems in reduced state space. Part II: Stochastic Hopf bifurcation. *J Stat Phys*, 2020, 179: 1403–1448
- 108 Trenberth W J. Global well-posedness for the two-dimensional stochastic complex Ginzburg-Landau equation. *arXiv:1911.09246*, 2019
- 109 Tsatsoulis P, Weber H. Spectral gap for the stochastic quantization equation on the 2-dimensional torus. *Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat*, 2018, 54: 1204–1249
- 110 Wiener N. The homogeneous chaos. *Amer J Math*, 1938, 60: 897–936
- 111 Yu J, Zhang X. Infinite dimensional Cauchy-Kowalevski and Holmgren type theorems. *Sci China Math*, 2019, 62: 1645–1656
- 112 Zhang B J, Sahai T, Marzouk Y M. Computing eigenfunctions of the multidimensional Ornstein-Uhlenbeck operator. *arXiv:2110.09229*, 2021
- 113 Zhang B J, Sahai T, Marzouk Y M. A Koopman framework for rare event simulation in stochastic differential equations. *J Comput Phys*, 2022, 456: 111025

Some new progress in complex Wiener-Itô chaos decomposition

Huiping Chen, Yong Chen & Yong Liu

Abstract In this survey, we summarize the recent progress in complex Wiener-Itô chaos decomposition. It mainly includes two aspects: the characterization of the mutual representation between complex and real multiple Wiener-Itô integrals, and the complex fourth moment theorem and the results of its related convergence rates.

Keywords complex Wiener-Itô chaos decomposition, complex multiple Wiener-Itô integral, 2-dimensional real multiple Wiener-Itô integral, fourth moment theorem, Berry-Esséen bound, convergence rate, Malliavin calculus

MSC(2020) 60H05, 60H07, 60G15, 60F05

doi: 10.1360/SSM-2024-0303