



L^p 空间上 ε -范数可加映射的稳定性

孙龙发

河北省物理学与能源技术重点实验室, 华北电力大学数理学院, 保定 071003

E-mail: sun.longfa@163.com

收稿日期: 2023-03-27; 接受日期: 2024-05-30; 网络出版日期: 2024-11-25

国家自然科学基金 (批准号: 12101234)、河北省自然科学基金 (批准号: A2022502010) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2023MS164) 资助项目

摘要 令 $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ 为两个测度空间, $1 < p < \infty$, $X = L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $Y = L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为标准的 ε -范数可加映射, 即 $f(0) = 0$ 且

$$\|f(x) + f(y) - (x + y)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in X.$$

本文证明对任意非满的标准 ε -范数可加映射 $f: X \rightarrow Y$, 都存在有界线性满算子 $T: Y \rightarrow X$ 满足 $\|T\| = 1$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

进一步地, 若 f 为几乎满射, 则存在一个线性满等距 $U: X \rightarrow Y$, 使得

$$\|f(x) - U(x)\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

上述结果中的误差 “ $\frac{3}{2}\varepsilon$ ” 都是最优的.

关键词 ε -范数可加映射 线性等距 稳定性 L^p 空间

MSC (2020) 主题分类 46B04, 46B20

1 引言

设 X 和 Y 是实 Banach 空间, 称映射 $f: X \rightarrow Y$ 为等距映射 (保度量映射), 如果对所有的 $x, y \in X$, 都有

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

如果 f 将 X 中的原点映成 Y 中的原点, 即 $f(0) = 0$, 则称 f 是标准的.

英文引用格式: Sun L F. On stability of ε -norm-additive mappings between L^p spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1843–1854, doi: 10.1360/SSM-2023-0061

自 1932 年 Mazur 和 Ulam^[13] 开始, 人们对 Banach 空间上等距映射性质的研究已经持续了 90 多年. Mazur-Ulam 定理^[13] 断言: 每个标准的满等距映射 $f: X \rightarrow Y$ 都是线性的. 这个定理揭示了一个深刻的事实: Banach 空间之间的映射保持度量不变的前提是保持线性结构不变. 给定 X 中两个线性无关的向量 x 和 y , 其所生成的平行四边形的两条对角线分别为 $x - y$ 和 $x + y$. 向量 x 和 y 在映射 f 下的像为 $f(x)$ 和 $f(y)$ (不妨假定 $f(x)$ 与 $f(y)$ 也是线性无关的), 由其生成的平行四边形的两条对角线分别为 $f(x) - f(y)$ 和 $f(x) + f(y)$. 从几何上粗略来看, 等距映射 f 保持了平行四边形一条对角线 $x - y$ 长度不变. 一个自然的问题是, 如果映射 f 保持了另一条对角线 $x + y$ 长度不变, 即

$$\|f(x) + f(y)\| = \|x + y\|, \quad \forall x, y \in X, \quad (1.1)$$

则 f 是否仍是线性的? 称该映射 f 为保持向量和的范数不变的映射 (本文中也称之为范数可加映射). 在 (1.1) 中, 分别取 $y = 0, \pm x$, 容易验证 f 为标准的等距映射并满足 $f(-x) = -f(x)$. 进而由 Mazur-Ulam 定理知 f 仍是线性的. 对 $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c_0$, 定义 $f(x) = (\|x\|, x_1, x_2, \dots)$, 则 $f: c_0 \rightarrow c_0$ 是一个标准的等距映射, 但不是范数可加映射. 这意味着对称定义域上的范数可加映射是一类比等距映射性质更强的映射. 然而当定义域不对称时, 等距映射与范数可加映射是互不相容的. 例如, 对 $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c_0^+$, 令 $f(x) = (\|x\|, x_1, x_2, \dots)$, 则 $f: c_0^+ \rightarrow c_0^+$ 是标准的等距映射但并不是范数可加映射; 当 $x_0 = (1, 0, 0, \dots) \in c_0^+$ 时, 令 $f(x_0) = (1, 1, 0, \dots)$, 当 $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c_0^+ \setminus \{x_0\}$ 时, 令 $f(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$, 则 $f: c_0^+ \rightarrow c_0^+$ 是一个范数可加映射但不是等距映射, 其中 c_0^+ 为 c_0 的正锥. 更多关于范数可加映射的研究进展, 可参见文献 [1, 8, 14, 15, 22, 24, 25].

值得注意的是, Mazur-Ulam 定理中的满性假设条件是不可或缺的. 例如, 对 $x \in \mathbb{R}$, 令 $f(x) = (x, \sin x)$, 则 $f: \mathbb{R} \rightarrow \ell_\infty^2$ 为标准的范数可加映射 (也是等距映射), 但 f 不是线性的. 对非满的等距映射, Figiel^[9] 将 Mazur-Ulam 定理推广为: 对每个等距映射 $f: X \rightarrow Y$, 都存在范数为 1 的线性左逆, 即存在有界线性算子 $T: L(f) \equiv \text{span} f(X) \rightarrow X$ 满足 $\|T\| = 1$ 使得 $Tf = \text{Id}_X$.

等距映射和范数可加映射最直观的研究背景就是测量, 然而受测量工具的精度限制, 由实际测量所获得的数据与原始数据相比总是存在误差, 这使得人们难以验证一个给定的映射是否为严格的等距映射或范数可加映射. 因此, 对扰动等距映射或扰动范数可加映射的研究就变得更加自然.

定义 1.1 设 X 和 Y 是实 Banach 空间, $f: X \rightarrow Y$ 为一个映射, $\varepsilon \geq 0$. 称 f 是一个 ε -等距映射, 如果它满足

$$|||f(x) - f(y)|| - \|x - y|| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in X;$$

称 f 是一个 ε -范数可加映射, 如果它满足

$$|||f(x) + f(y)|| - \|x + y|| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in X.$$

Hyers 和 Ulam^[11] 率先研究了 ε -等距映射, 并证明了当 X 和 Y 是 Hilbert 空间时, 存在一个常数 $\gamma = 10$, 使得对任意标准的满 ε -等距映射 $f: X \rightarrow Y$, 都存在一个线性等距 $U: X \rightarrow Y$ 满足 $\|f(x) - U(x)\| \leq \gamma\varepsilon, \forall x \in X$. 随后, Gevirtz^[10] 将上述结果推广到所有的 Banach 空间并且得到了 $\gamma = 5$. Omladić 和 Šemrl^[16] 最终得到了最优常数 $\gamma = 2$. ε -等距映射的这种稳定性性质被称为 Hyers-Ulam 稳定性.

受 Figiel 定理启发, 非满 ε -等距映射的性质也引起了众多数学家的关注 (参见文献 [2-7, 17, 21, 23, 26]). Qian^[17] 首次研究了非满的 ε -等距映射的稳定性, 并提出了, 对于任意的 Banach 空间 X

和 Y 以及任意的标准的 ε -等距映射 $f: X \rightarrow Y$, 是否存在一个常数 $\gamma \geq 0$ 和一个有界线性算子 $T: L(f) \equiv \overline{\text{span}}f(X) \rightarrow X$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leq \gamma\varepsilon, \quad \forall x \in X?$$

当 X 和 Y 为 L^p ($1 < p < \infty$) 空间, 他对上述问题给出了肯定的回答, 且 $\gamma = 6$. Šemrl 和 Väisälä^[21] 进一步得到了最佳常数 $\gamma = 2$.

定理 1.1^[21] 设 X 和 Y 都是 L^p ($1 < p < \infty$) 空间, $f: X \rightarrow Y$ 为标准的 ε -等距映射, 则存在范数为 1 的有界线性满算子 $T: Y \rightarrow X$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leq 2\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

此外, Qian 举例说明了对于每个具有不可补子空间 X 的可分的 Banach 空间 Y , 都存在一个不稳定的标准的 ε -等距 $f: X \rightarrow Y$. 这不仅对于非满 ε -等距的稳定性问题给出了一般的否定的回答, 也说明 ε -等距的稳定性与空间的不可补性是密切相关的. 受 Qian 的反例的启发, Cheng 和 Dong^[3] 及 Cheng 等^[4] 提出了 ε -等距的一种具有普遍适用性的弱稳定性概念, 以万有弱稳定性公式为工具, 人们进一步得到了非满的 ε -等距的一系列新的稳定性结果, 并且将 ε -等距逼近问题中的满性假设条件弱化为了几乎满假设 (参见文献 [5, 18, 19, 23, 26]).

目前, Banach 空间之间的等距及 ε -等距映射已经被充分研究, 并得到了一大批深刻的结果. 但是对与等距映射密切相关的 ε -范数可加映射的研究才刚刚起步. 尽管 Banach 空间之间的每个范数可加映射都是等距映射, 但我们却难以验证 Banach 空间之间的 ε -范数可加映射是否为 ε -等距映射. 受 ε -等距映射 Hyers-Ulam 稳定性和 Qian 稳定性问题的启发, 我们自然地提出下述问题.

问题 1.1 对于任意的 Banach 空间 X 和 Y , 是否存在一个常数 $\gamma \geq 0$, 使得对任意标准的满 ε -范数可加映射 $f: X \rightarrow Y$, 都存在一个线性等距 $U: X \rightarrow Y$, 使得

$$\|f(x) - U(x)\| \leq \gamma\varepsilon, \quad \forall x \in X?$$

若常数 γ 存在, 则 γ 的最优值是多少?

问题 1.2 对于任意的 Banach 空间 X 和 Y , 是否存在一个常数 $\gamma \geq 0$, 使得对任意标准的 ε -范数可加映射 $f: X \rightarrow Y$, 都存在一个有界线性算子 $T: L(f) \equiv \overline{\text{span}}f(X) \rightarrow X$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leq \gamma\varepsilon, \quad \forall x \in X?$$

若常数 γ 存在, 则 γ 的最优值是多少?

最近, 本文作者^[20] 研究了定义在 c_0 上的 ε -范数可加映射的 Hyers-Ulam 稳定性, 并证明了每个标准的满 ε -范数可加映射 $f: c_0 \rightarrow Y$ 都可以被一个线性满等距作一致地逼近, 其误差不超过 $\frac{3}{2}\varepsilon$.

本文研究两个 L^p 空间之间的 ε -范数可加映射的稳定性问题. 令 $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ 为两个测度空间, $1 < p < \infty$, $X = L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $Y = L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$, $f: X \rightarrow Y$ 为标准的 ε -范数可加映射. 首先建立映射 f 的弱稳定性公式: 对于任意的 $x^* \in X^*$, 都存在唯一的满足 $\|x^*\| = \|\phi\| \equiv r$ 的 $\phi \in Y^*$, 使得

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle \phi, f(x) \rangle| \leq \frac{3}{2}r\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

利用该弱稳定性公式, 我们证明对任意非满的 $f : X \rightarrow Y$, 都存在有界线性满算子 $T : Y \rightarrow X$ 满足 $\|T\| = 1$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

进一步地, 若 f 为几乎满射, 则存在一个线性满等距 $U : X \rightarrow Y$, 使得

$$\|f(x) - U(x)\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

上述结果中的误差 “ $\frac{3}{2}\varepsilon$ ” 都是最优的. 本文对问题 1.1 和 1.2 在 L^p 空间上作了肯定的回答.

本文中, X 表示实 Banach 空间, X^* 为 X 的共轭空间, B_X 和 S_X 分别表示 X 的闭单位球和单位球面. 对于给定的有界线性算子 $T : X \rightarrow Y$, $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ 表示 T 的共轭算子.

2 ε - 范数可加映射的弱稳定性

令 $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ 为两个测度空间, $1 < p < \infty$, $X = L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $Y = L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$. 本节研究 L^p 空间之间 ε - 范数可加映射 $f : X \rightarrow Y$ 的弱稳定性.

下述关于 Banach 空间之间 ε - 等距和 ε - 范数可加映射关系的事实来自于文献 [20]. 为阅读方便起见, 我们给出其证明.

命题 2.1 设 X 和 Y 为 Banach 空间, $f : X \rightarrow Y$ 为标准的 ε - 范数可加映射, 则 f 是一个 2ε - 等距映射.

证明 任取 $x \in X$, 由 f 的定义知

$$\|f(x) + f(-x)\| - \|x - x\| \leq \varepsilon,$$

即

$$\|f(x) + f(-x)\| \leq \varepsilon.$$

任取 $x, y \in X$, 有

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|(f(x) + f(-x)) - (f(-x) + f(y))\| \\ &\leq \|f(-x) + f(y)\| + \|f(x) + f(-x)\| \\ &\leq \|x - y\| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|(f(x) + f(-x)) - (f(-x) + f(y))\| \\ &\geq \|f(-x) + f(y)\| - \|f(x) + f(-x)\| \\ &\geq \|x - y\| - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

这说明 f 是一个标准的 2ε - 等距映射. 证毕. $\square$

由命题 2.1 知 Banach 空间上每个标准的 ε - 范数可加映射都是标准的 2ε - 等距映射. 下述例子说明命题 2.1 中的常数 “2” 是最优的.

例 2.1 任取 $\varepsilon > 0$, 定义 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -\frac{\varepsilon}{2}, & x = \varepsilon, \\ x + \frac{\varepsilon}{2}, & x \neq 0, \varepsilon. \end{cases}$$

容易验证 f 为标准的 ε -范数可加映射. 注意到 $\|f(2\varepsilon) - f(\varepsilon)\| - |2\varepsilon - \varepsilon| = 2\varepsilon$. 结合命题 2.1 知 f 为严格的 2ε -等距映射.

尽管 Banach 空间上的每个扰动范数可加映射都是一个扰动等距映射, 反之却并不成立. 例如, 前文中给出的映射 $f: c_0 \rightarrow c_0$, $f(x) = (\|x\|, x_1, x_2, \dots)$, $\forall x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ 是一个标准的 ($\varepsilon = 0$)-等距映射, 但对任意的 $\theta \geq 0$, 其都不是一个 θ -范数可加映射. 这说明扰动范数可加映射实际上是扰动等距映射的一个真子类. 结合命题 2.1 和 Šemrl-Väisälä 定理 (定理 1.1), 有如下定理:

定理 2.1 设 X 和 Y 都是 L^p ($1 < p < \infty$) 空间, $f: X \rightarrow Y$ 为标准的 ε -范数可加映射, 则存在范数为 1 的有界线性满算子 $T: Y \rightarrow X$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leq 4\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

定理 2.1 在 L^p ($1 < p < \infty$) 空间上对问题 1.2 (Qian 稳定性问题) 给出了肯定地回答, 然而常数“4”并不是最优的. 接下来, 将建立 L^p 空间之间 ε -范数可加映射的弱稳定性公式, 并利用该弱稳定性公式去获得最优的 Hyers-Ulam 稳定性和 Qian 稳定性结果.

设 X 为一个 Banach 空间, 函数 $\tau: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ 称为 X 的凸性模, 其中 $\tau(s) = \inf\{1 - \|\frac{x+y}{2}\| : \|x - y\| \geq s, x, y \in B_X\}$. X 称为是一致凸的, 如果对所有的 $0 < s \leq 2$ 都有 $\tau(s) > 0$.

我们还需要下述引理 (参见文献 [21, 命题 2.3]).

引理 2.1 设 X 为 Banach 空间, Y 为一致凸空间, $f: X \rightarrow Y$ 为标准的 ε -等距映射, 则极限

$$U(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{t}, \quad \forall x \in X$$

存在, 且 $U: X \rightarrow Y$ 为线性等距.

接下来, 建立 L^p 空间之间 ε -范数可加映射的弱稳定性公式.

引理 2.2 设 X, Y 是两个 L^p 空间 ($1 < p < \infty$), $f: X \rightarrow Y$ 为标准的 ε -范数可加映射, 则对任意的 $x^* \in X^*$, 都存在唯一的 $\phi \in Y^*$ 满足 $\|x^*\| = \|\phi\| \equiv r$ 使得

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle \phi, f(x) \rangle| \leq \frac{3}{2}r\varepsilon, \quad \forall x \in X. \quad (2.1)$$

证明 设 $f: X \rightarrow Y$ 为标准的 ε -范数可加映射, 由命题 2.1 知 f 为标准的 2ε -等距. 注意到 X 和 Y 都是一致凸和一致光滑空间. 由引理 2.1 知极限 $U(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{t}$ 对所有的 $x \in X$ 都存在, 并且定义了一个线性等距 $U: X \rightarrow Y$. 任取 $x^* \in X^*$, 不失一般性, 假设 $\|x^*\| = 1$. 注意到 X 是自反的, 因此存在一个 $z \in S_X$ 使得 $\|x^*\| = \langle x^*, z \rangle = 1$. 由 X 的光滑性知, x^* 是范数 $\|\cdot\|$ 在 z 处的 Gateaux 导数, 记为 $x^* = d\|\cdot\|$, 满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\|tz + x\| - t\|z\|) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\|z + tx\| - \|z\|)/t = \langle x^*, x \rangle, \quad \forall x \in X.$$

对任意的 $x \in X$, 由 f 为 ε -范数可加映射知

$$\|f(x) + f(x)\| - \|x + x\| \leq \varepsilon,$$

即

$$\|f(x) - x\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 由 Y 的光滑性, 可以取 $\phi_n \in S_{Y^*}$, $\phi_n = d\|f(nz)\|$. 因此 $\langle \phi_n, f(nz) \rangle = \|f(nz)\|$, 且对任意的 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\|z + \frac{1}{n}x\| - \|z\|}{\frac{1}{n}} &= \|nz + x\| - n \geq \|f(nz) + f(x)\| - \varepsilon - n \\ &\geq \langle \phi_n, f(nz) + f(x) \rangle - \varepsilon - n \\ &= \|f(nz)\| + \langle \phi_n, f(x) \rangle - \varepsilon - n \\ &\geq \langle \phi_n, f(x) \rangle - \frac{3}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

注意到 B_{Y^*} 是弱紧的, 任取 $\{\phi_n\}$ 的弱聚点 $\phi \in B_{Y^*}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由上式可得

$$\langle x^*, x \rangle - \langle \phi, f(x) \rangle \geq -\frac{3}{2}\varepsilon. \quad (2.2)$$

对任意的 $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq t$, 有

$$\begin{aligned} t + \frac{1}{2}\varepsilon &\geq \|f(tz)\| \geq \langle \phi_n, f(tz) \rangle \\ &= \langle \phi_n, f(nz) \rangle - \langle \phi_n, f(nz) - f(tz) \rangle \\ &\geq \|f(nz)\| - \|f(nz) - f(tz)\| \\ &\geq \left(\|nz\| - \frac{1}{2}\varepsilon \right) - (\|(n-t)z\| + 2\varepsilon) \\ &= t - \frac{5}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

因此,

$$t + \frac{1}{2}\varepsilon \geq \langle \phi, f(tz) \rangle \geq t - \frac{5}{2}\varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

上式两端分别除以 t , 令 $t \rightarrow \infty$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi, f(tz)/t \rangle = 1$. 因此, $\langle \phi, U(z) \rangle = 1$. 这意味着 $\|\phi\| = 1$ 且 $\phi = d\|U(z)\|$. 接下来, 证明

$$\langle x^*, x \rangle - \langle \phi, f(x) \rangle \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

给定 $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, 令 $\psi_n \in S_{Y^*}$, $\psi_n = d\|f(x) + f(nz)\|$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\|z + \frac{1}{n}x\| - \|z\|}{\frac{1}{n}} &= \|nz + x\| - n \leq \|f(nz) + f(x)\| + \varepsilon - n \\ &= \langle \psi_n, f(nz) + f(x) \rangle + \varepsilon - n \\ &\leq \|f(nz)\| + \langle \psi_n, f(x) \rangle + \varepsilon - n \\ &\leq \langle \psi_n, f(x) \rangle + \frac{3}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

任取 $\{\psi_n\}$ 的一个弱聚点 $\psi \in B_{Y^*}$, 由上式可得

$$\langle x^*, x \rangle - \langle \psi, f(x) \rangle \leq \frac{3}{2}\varepsilon. \quad (2.3)$$

我们断言 (2.3) 中的泛函 ψ 与 x 的选取无关. 对任意的 $t > 0, n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq t$, 有

$$\begin{aligned} t + \frac{1}{2}\varepsilon &\geq \|f(tz)\| \geq \langle \psi_n, f(tz) \rangle \\ &= \langle \psi_n, f(x) + f(nz) \rangle - \langle \psi_n, f(x) \rangle - \langle \psi_n, f(nz) - f(tz) \rangle \\ &\geq \|f(x) + f(nz)\| - \|f(x)\| - \|f(nz) - f(tz)\| \\ &\geq (\|x + nz\| - \varepsilon) - \left(\|x\| + \frac{1}{2}\varepsilon\right) - (\|(n-t)z\| + 2\varepsilon) \\ &\geq t - 2\|x\| - \frac{7}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

因此,

$$t + \frac{1}{2}\varepsilon \geq \langle \psi, f(tz) \rangle \geq t - 2\|x\| - \frac{7}{2}\varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

上式两端分别除以 t , 令 $t \rightarrow \infty$, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi, f(tz)/t \rangle = 1$, 即 $\langle \psi, U(z) \rangle = 1$. 因此 $\|\psi\| = 1$, $\psi = d\|U(z)\|$, 这说明 ψ 与 x 的选取无关且 $\phi = \psi$. 联立 (2.2) 和 (2.3) 便得

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle \phi, f(x) \rangle| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X. \quad (2.4)$$

若存在两个泛函 ϕ_1 和 ϕ_2 满足 (2.4), 则有

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle \phi_1, f(x) \rangle| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X \quad (2.5)$$

和

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle \phi_2, f(x) \rangle| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X. \quad (2.6)$$

在 (2.5) 和 (2.6) 中, 用 nz 替换 x 并且两端同时除以 n , 令 $n \rightarrow \infty$, 则有 $\phi_1 = \phi_2 = d\|U(z)\|$. (2.4) 的齐次性蕴涵着 (2.1). 证毕. $\square$

3 ε - 范数可加映射的稳定性

令 $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ 为两个测度空间, $1 < p < \infty$, $X = L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $Y = L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$. 本节研究 L^p 空间之间 ε - 范数可加映射 $f: X \rightarrow Y$ 的 Qian 稳定性和 Hyers-Ulam 稳定性.

由定理 2.1 知两个 L^p ($1 < p < \infty$) 空间之间的 ε - 范数可加映射都是 Qian 稳定性的, 下述例子说明存在 Banach 空间 X 和 Y 及不具有 Qian 稳定性的 ε - 范数可加映射 $f: X \rightarrow Y$, 在一般情形下对问题 1.2 给出了否定的回答.

例 3.1 注意到

$$\text{card}(B_{\ell_\infty}) = \text{card}(\ell_\infty) = \text{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \aleph^{\aleph} = \aleph \leq \text{card}(c_0) \leq \text{card}(\ell_\infty) = \text{card}(B_{\ell_\infty}),$$

因此, $\text{card}(c_0) = \text{card}(B_{\ell_\infty})$. 令 $g: c_0 \rightarrow B_{\ell_\infty}$ 为一个双射且 $g(0) = 0$. 给定 $\varepsilon > 0$, 定义 $f: c_0 \rightarrow \ell_\infty$:

$$f(x) = x + (\varepsilon/2)g(x), \quad \forall x \in c_0.$$

容易验证 f 为标准的 ε -范数可加映射并满足 $L(f) = \ell_\infty$. 由 c_0 是 ℓ_∞ 的不可补子空间知问题 1.2 中的算子 T 不存在.

Banach 空间 X 中的闭子空间 M 称为 α -可补的, 如果存在 X 中的闭子空间 $N \subset X$ 满足 $M \cap N = \{0\}$ 和 $M + N = X$, 且投影算子 $P: X \rightarrow M$ 满足 $\|P\| \leq \alpha$.

利用引理 2.2, 我们将定理 2.1 中的常数 “4” 减小到最优常数 “ $\frac{3}{2}$ ”.

定理 3.1 设 X 和 Y 都是 L^p ($1 < p < \infty$) 空间, $f: X \rightarrow Y$ 为标准的 ε -范数可加映射, 则存在范数为 1 的有界线性满算子 $T: Y \rightarrow X$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

证明 由引理 2.2 知, 对任意的 $x^* \in X^*$, 都存在唯一的满足 $\|x^*\| = \|\phi\| \equiv r$ 的 $\phi \in Y^*$, 使得

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle \phi, f(x) \rangle| \leq \frac{3}{2}r\varepsilon, \quad \forall x \in X. \quad (3.1)$$

令

$$Q(x^*) = \phi,$$

则 $Q: X^* \rightarrow Y^*$ 是良定义的并且是保范的. 我们断言 Q 为一个线性等距.

由 (3.1) 知, 对任意的 $x_1^*, x_2^* \in X^*$, 有

$$|\langle x_1^* + x_2^*, x \rangle - \langle Q(x_1^*) + Q(x_2^*), f(x) \rangle| \leq \frac{3}{2}(\|x_1^*\| + \|x_2^*\|)\varepsilon, \quad \forall x \in X$$

和

$$|\langle x_1^* + x_2^*, x \rangle - \langle Q(x_1^* + x_2^*), f(x) \rangle| \leq \frac{3}{2}\|x_1^* + x_2^*\|\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

因此,

$$|\langle Q(x_1^*) + Q(x_2^*) - Q(x_1^* + x_2^*), f(x) \rangle| \leq 3(\|x_1^*\| + \|x_2^*\|)\varepsilon, \quad \forall x \in X. \quad (3.2)$$

注意到 f 为标准的 2ε -等距, 由引理 2.1 知极限

$$U(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{t}, \quad \forall x \in X$$

存在, 且 $U: X \rightarrow Y$ 为一个线性等距. 令 $M = U(X)$.

在 (3.2) 中用 nx 替换 x , 两端分别除以 n , 令 $n \rightarrow \infty$, 则有

$$\langle Q(x_1^*) + Q(x_2^*) - Q(x_1^* + x_2^*), U(x) \rangle = 0.$$

这意味着

$$(Q(x_1^*) + Q(x_2^*))|_M = Q(x_1^* + x_2^*)|_M. \quad (3.3)$$

注意到 $M = U(X)$ 在 Y 中是 1-可补的 (参见文献 [12, 第 162 页]), 所以存在范数为 1 的投影算子 $P: Y \rightarrow M$.

由 (3.1) 可知, 对任意的 $x^* \in X^*$, 有

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle Q(x^*), f(x) \rangle| \leq \frac{3}{2} \|x^*\| \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

由 X 的自反性可知存在 $z \in S_X$ 满足 $\langle x^*, z \rangle = \|x^*\|$. 在上式中用 nz 替换 x , 两端同时除以 n , 令 $n \rightarrow \infty$, 则有

$$\|Q(x^*)\| = \|x^*\| = \langle x^*, z \rangle = \langle Q(x^*), U(z) \rangle = \langle Q(x^*)|_M, U(z) \rangle \leq \|Q(x^*)|_M\| \leq \|Q(x^*)\|.$$

因此, $\|Q(x^*)|_M\| = \|Q(x^*)\|$. 注意到 M 在 Y 中是 1-可补的, 有

$$\|Q(x^*)|_M\| \leq \|Q(x^*)|_M P\| \leq \|Q(x^*)|_M\| \|P\| = \|Q(x^*)|_M\|,$$

即 $\|Q(x^*)|_M\| = \|Q(x^*)|_M P\|$. 注意到 $Q(x^*)$ 和 $Q(x^*)|_M P$ 为 $Q(x^*)|_M$ 从子空间 M 到全空间 Y 上的保范延拓. 由 Y 的光滑性知 $Q(x^*)|_M$ 的保范延拓是唯一的, 因此 $Q(x^*) = Q(x^*)|_M P$. 联合 (3.3) 可得

$$\begin{aligned} Q(x_1^*) + Q(x_2^*) &= Q(x_1^*)|_M P + Q(x_2^*)|_M P \\ &= (Q(x_1^*)|_M + Q(x_2^*)|_M) P \\ &= Q(x_1^* + x_2^*)|_M P \\ &= Q(x_1^* + x_2^*). \end{aligned}$$

这说明 Q 是可加映射, 同时 (3.1) 蕴涵着 Q 是齐次映射, 因此 Q 为线性等距. 令 $T \equiv Q^*: Y \rightarrow X$, 则 T 为线性满算子并且 $\|T\| = 1$. 任取 $x \in X$, 如果 $Tf(x) - x = 0$, 则 $\|Tf(x) - x\| = 0$. 如果 $Tf(x) - x \neq 0$, 令 $x^* = d\|Tf(x) - x\|$, 则

$$\begin{aligned} \|Tf(x) - x\| &= \langle x^*, Tf(x) - x \rangle \\ &= \langle x^*, Tf(x) \rangle - \langle x^*, x \rangle \\ &= \langle T^*(x^*), f(x) \rangle - \langle x^*, x \rangle \\ &= \langle Q(x^*), f(x) \rangle - \langle x^*, x \rangle \\ &\leq \frac{3}{2} \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕. □

注 3.1 对于例 2.1 中标准的 ε -范数可加映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 满足定理 3.1 的唯一的线性满算子是 $T = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. 取 $x = \varepsilon$, 有 $\|Tf(x) - x\| = \frac{3}{2}\varepsilon$. 这说明定理 3.1 的常数 “ $\frac{3}{2}$ ” 是最优的.

接下来, 研究 L^p 空间之间 ε -范数可加映射的 Hyers-Ulam 稳定性. 利用定理 3.1, 我们将证明 L^p ($1 < p < \infty$) 空间之间每个几乎满的 ε -范数可加映射都可以被一个线性满等距作一致地逼近, 其误差不超过 “ $\frac{3}{2}\varepsilon$ ”, 其中常数 “ $\frac{3}{2}$ ” 也是最优的.

首先, 回顾几种非满映射的定义 (参见文献 [5, 18, 19, 23, 26]). 令 X 和 Y 为两个 Banach 空间, $f: X \rightarrow Y$ 为一个映射. 对 $y \in S_Y$, 令

$$\varrho(y, f(X)) = \liminf_{|t| \rightarrow +\infty} d(ty, f(X))/|t|,$$

$$\tau(f(X)) = \sup_{y \in S_Y} \varrho(y, f(X)).$$

令 (M_1, d_1) 和 (M_2, d_2) 为两个度量空间, $\delta > 0$, 映射 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 称为是 δ -满的, 若满足对任意的 $y \in M_2$ 都存在 $x \in M_1$ 使得 $d_2(y, f(x)) \leq \delta$. 度量空间 (M, d) 中的子集 N 称为是相对于度量 d 的一个次线性增长的网, 若满足对任意固定的 $w_0 \in M$, 都有

$$\lim_{d(w, w_0) \rightarrow \infty} \frac{d(w, N)}{d(w, w_0)} = 0.$$

定理 3.2 设 X 和 Y 都是 L^p ($1 < p < \infty$) 空间, $f: X \rightarrow Y$ 为标准的 ε -范数可加映射, 则下列陈述都是等价的:

- (1) 存在一个线性满等距 $U: X \rightarrow Y$, 使得 $\|f(x) - U(x)\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \forall x \in X$;
- (2) 存在 $\delta \geq 0$ 使得 f 是 δ -满的;
- (3) $f(X)$ 包含了 Y 中的一个次线性增长的网;
- (4) $\varrho(y, f(X)) = \liminf_{|t| \rightarrow +\infty} d(ty, f(X))/|t| = 0, \forall y \in S_Y$;
- (5) $\varrho(y, f(X)) = \liminf_{|t| \rightarrow +\infty} d(ty, f(X))/|t| < 1/2, \forall y \in S_Y$;
- (6) $\tau(f(X)) < 1/2$;
- (7) $\tau(f(X)) = 0$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (5) 是显然的.

只需要证明 (5) $\Rightarrow$ (1). 设 $f: X \rightarrow Y$ 为标准的 ε -范数可加映射, 由定理 3.1 知, 存在范数为 1 的有界线性满算子 $T: Y \rightarrow X$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X. \quad (3.4)$$

令 $Q = T^*$, 由定理 3.1 的证明知 $Q: X^* \rightarrow Y^*$ 为线性等距. 我们断言当 f 满足假设条件 (5) 时, 算子 $T: Y \rightarrow X$ 为线性满等距. 为此, 只需要证明 $Q: X^* \rightarrow Y^*$ 为线性满等距.

下面采用反证法. 假设 Q 是非满的, 则 $Q(X^*)$ 是 Y^* 的真闭子空间. 由分离定理可知, 存在 $\psi \in S_{Y^*} \setminus Q(X^*)$ 和 $y \in S_Y$, 使得

$$\langle \psi, y \rangle > 0 \quad \text{和} \quad \langle \phi, y \rangle = 0, \quad \forall \phi \in Q(X^*).$$

由假设条件 (5) 可知 $\varrho(y, f(X)) = \liminf_{|t| \rightarrow +\infty} d(ty, f(X))/|t| < 1/2$. 因此存在 $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ 满足 $|t_n| \rightarrow \infty$, 以及序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, 使得

$$\lim_n \frac{\|t_n y - f(x_n)\|}{|t_n|} \equiv \beta < \frac{1}{2}.$$

取 $x_n^* \in S_{X^*}$ 满足 $\langle x_n^*, x_n \rangle = \|x_n\|$. 令 $\phi_n = Q(x_n^*)$. 由 (3.4) 知

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\varepsilon &\geq \|Tf(x_n) - x_n\| \geq \langle x_n^*, x_n - Tf(x_n) \rangle \\ &= \langle x_n^*, x_n \rangle - \langle T^* x_n^*, f(x_n) \rangle = \langle x_n^*, x_n \rangle - \langle \phi_n, f(x_n) \rangle \\ &= \langle x_n^*, x_n \rangle - \langle \phi_n, f(x_n) \rangle + \langle \phi_n, t_n y \rangle \\ &\geq \|x_n\| - \|f(x_n) - t_n y\| \\ &\geq \|f(x_n)\| - \frac{1}{2}\varepsilon - \|f(x_n) - t_n y\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \|t_n y\| - \frac{1}{2}\varepsilon - 2\|f(x_n) - t_n y\| \\
&= |t_n| \left(1 - 2 \frac{\|f(x_n) - t_n y\|}{|t_n|} \right) - \frac{1}{2}\varepsilon \\
&\rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

矛盾. 因此, Q 为满射, 且 $T: Y \rightarrow X$ 是线性满等距.

令 $U = T^{-1}$, 则 $U: X \rightarrow Y$ 为线性满等距且

$$\|f(x) - U(x)\| = \|Tf(x) - x\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

证毕. □

注 3.2 注意到例 2.1 中标准的 ε -范数可加映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是几乎满的, 满足定理 3.2 的唯一的线性满等距是 $U = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. 取 $x = \varepsilon$, 有 $\|f(x) - U(x)\| = \frac{3}{2}\varepsilon$. 这说明定理 3.2 的常数 “ $\frac{3}{2}$ ” 是最优的.

致谢 感谢厦门大学程立新教授以及厦门大学泛函分析讨论班师生对上述研究领域的建议与帮助, 感谢弗朗什 - 孔泰大学许全华教授为作者到弗朗什 - 孔泰大学进行访问提供的热心帮助. 同时, 感谢审稿人对本文提出的宝贵修改意见.

参考文献

- 1 Chen L H, Dong Y B, Zheng B T. On norm-additive maps between the maximal groups of positive continuous functions. *Results Math*, 2019, 74: 152
- 2 Cheng L X, Dai D X, Dong Y B, et al. Universal stability of Banach spaces for ε -isometries. *Studia Math*, 2014, 221: 141–149
- 3 Cheng L X, Dong Y B. A note on the stability of nonsurjective ε -isometries of Banach spaces. *Proc Amer Math Soc*, 2020, 148: 4837–4844
- 4 Cheng L X, Dong Y B, Zhang W. On stability of nonlinear non-surjective ε -isometries of Banach spaces. *J Funct Anal*, 2013, 264: 713–734
- 5 Cheng L X, Shen Q R, Zhang W, et al. More on stability of almost surjective ε -isometries of Banach spaces. *Sci China Math*, 2017, 60: 277–284
- 6 Cheng L X, Sun L F. Stability characterizations of ε -isometries on certain Banach spaces. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2019, 35: 123–134
- 7 Cheng L X, Zhou Y. On perturbed metric-preserved mappings and their stability characterizations. *J Funct Anal*, 2014, 266: 4995–5015
- 8 Dong Y B, Li L, Molnár L, et al. Transformations preserving the norm of means between positive cones of general and commutative C^* -algebras. *J Operator Theory*, 2022, 88: 365–406
- 9 Figiel T. On nonlinear isometric embeddings of normed linear spaces. *Bull Acad Polon Sci Math Astro Phys*, 1968, 16: 185–188
- 10 Gevirtz J. Stability of isometries on Banach spaces. *Proc Amer Math Soc*, 1983, 89: 633–636
- 11 Hyers D H, Ulam S M. On approximate isometries. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1945, 51: 288–292
- 12 Lacey H E. *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*. Berlin-Heidelberg: Springer, 1974
- 13 Mazur S, Ulam S. Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés. *C R Acad Sci Paris*, 1932, 194: 946–948
- 14 Molnár L. *Selected Preserve Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces*. Berlin: Springer-Verlag, 2007
- 15 Molnár L, Szokol P. Transformations preserving norms of means of positive operators and nonnegative functions. *Integral Equations Operator Theory*, 2015, 83: 271–290
- 16 Omladić M, Šemrl P. On non linear perturbations of isometries. *Math Ann*, 1995, 303: 617–628
- 17 Qian S. ε -isometric embeddings. *Proc Amer Math Soc*, 1995, 123: 1797–1803
- 18 Sun L F. Hyers-Ulam stability of ε -isometries between the positive cones of L^p -spaces. *J Math Anal Appl*, 2020, 487: 124014
- 19 Sun L F. A note on stability of non-surjective ε -isometries between the positive cones of L^p -spaces. *Indian J Pure Appl Math*, 2021, 52: 1085–1092

- 20 Sun L F. Hyers-Ulam stability of ε -norm-additive mappings on c_0 (in Chinese). *Acta Math Sin Chin Ser*, 2024, 67: 89–96 [孙龙发. c_0 上 ε -范数可加映射的 Hyers-Ulam 稳定性. *数学学报*, 2024, 67: 89–96]
- 21 Šemrl P, Väisälä J. Nonsurjective nearisometries of Banach spaces. *J Funct Anal*, 2003, 198: 268–278
- 22 Tonev T, Yates R. Norm-linear and norm-additive operators between uniform algebras. *J Math Anal Appl*, 2009, 357: 45–53
- 23 Vestfrid I A. Stability of almost surjective ε -isometries of Banach spaces. *J Funct Anal*, 2015, 269: 2165–2170
- 24 Zhang J, Tsai M-C, Wong N-C. Norm of positive sum preservers of smooth Banach lattices and $L^p(\mu)$ spaces. *J Nonlinear Convex Anal*, 2019, 20: 2613–2621
- 25 Zhang J, Tsai M-C, Wong N-C. Norm of positive sum preservers of noncommutative $L^p(M)$ spaces. *J Nonlinear Convex Anal*, 2021, 22: 251–264
- 26 Zhou Y, Zhang Z H, Liu C Y. On linear isometries and ε -isometries between Banach spaces. *J Math Anal Appl*, 2016, 435: 754–764

On stability of ε -norm-additive mappings between L^p spaces

Longfa Sun

Abstract Let $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ be two measure spaces, $1 < p < \infty$, $X = L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $Y = L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$, and let $f : X \rightarrow Y$ be a standard ε -norm-additive mapping, i.e., $f(0) = 0$ and

$$\|f(x) + f(y)\| - \|x + y\| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in X.$$

In this paper, we show that if $f : X \rightarrow Y$ is a non-surjective standard ε -norm-additive mapping, then there exists a bounded linear surjective operator $T : Y \rightarrow X$ with $\|T\| = 1$ such that

$$\|Tf(x) - x\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Moreover, if f is almost surjective, then there exists a linear surjective isometry $U : X \rightarrow Y$ such that

$$\|f(x) - U(x)\| \leq \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

The estimates “ $\frac{3}{2}\varepsilon$ ” in above results are optimal.

Keywords ε -norm-additive mappings, linear isometries, stability, L^p spaces

MSC(2020) 46B04, 46B20

doi: 10.1360/SSM-2023-0061