中国科学: 数学　2025 年　第 55 卷　第 ? 期: 1 ∼ 22
SCIENTIA SINICA Mathematica
论　文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

具记忆时滞扩散模型在对流环境中的分支问题

马丽[1], 卫丹[2*]

1. 广东财经大学统计与数学学院, 广州 510320;
2. 河南工业大学数学与统计学院, 郑州 450001
E-mail: mali1983@hnu.edu.cn, wdan@haut.edu.cn

收稿日期: 2024-04-06; 接受日期: 2024-11-30; 网络出版日期: 2025-01-24; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12161003 和 12301196)、广东省教育厅创新团队项目 (批准号: 2023KCXTD063)、江西省自然科学基金 (批准号: 20212BAB201006) 和河南工业大学博士基金 (批准号: 2022BS060) 资助项目

摘要　本文提出并研究了一类具有双时滞的基于记忆扩散的生物种群模型. 利用 Lyapunov-Schmidt 约化方法, 本文得到了该模型空间非齐次正稳态解的存在性、唯一性和多重性. 接着, 通过分析在该非齐次稳态解 u_λ^* 处所对应的特征方程, 本文得到了该稳态解的局部稳定性和发生 Hopf 分支的条件. 在一些特殊条件下, Hopf 分支发生的首个临界值 r_0^λ 会随着对流参数 α 的增加而增大, 即分支更难出现.

关键词　反应扩散对流模型　分支　Lyapunov-Schmidt 约化　双时滞

MSC (2020) 主题分类　92B05, 35B40, 35K57

1　引言

众所周知, 许多事物的变化规律不仅依赖于当前状态, 还与过去的状态息息相关. 因此, 近几十年来, 时滞的引入所带来的有趣生物现象 (如不稳定和混沌等) 引起了学者们的广泛关注. 最初较为经典且具有开创性之一的工作是 Nicholson [12] 通过记录澳大利亚羊蝇数量变化所提出的下面时滞模型:

$$\frac{du(t)}{dt} = lu(t)\left(1 - \frac{u(t-r)}{L}\right), \tag{1.1}$$

其中, L 表示可食用的食物总量, 时滞 r 表示幼虫成熟为成虫的生长时间. 然而, 在随后的实验过程中, 他们发现上述模型无法很好地解释实验数据. 为了解决这种差异, Gurney 等 [6] 对模型 (1.1) 进行了下述改进:

$$\frac{du(t)}{dt} = -\gamma u(t) + pu(t-r)\exp\left[-au(t-r)\right], \tag{1.2}$$

英文引用格式: Ma L, Wei D. On the bifurcation for a diffusive model with memory delay in an advective environment (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1–22, doi: 10.1360/SSM-2024-0103

© 2025《中国科学》杂志社

其中, γ 表示成虫的日均死亡率, p 表示最大日均产卵率, r 表示生长周期, $1/a$ 表示蝇类以最大繁殖率繁殖的种群规模. 模型 (1.2) 通常被称为经典的 Nicholson 果蝇模型.

值得注意的是, 我们在研究种群模型时发现不同的种群在其所处环境中的分布是不均匀的, 种群的迁入和迁出以及分配给每一个个体的资源也是不均匀的, 因而产生了更加符合自然现象的反应 (随机) 扩散方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = du_{xx}(x,t) - \gamma u(x,t) + pu(x,t-r)\exp\left[-au(x,t-r)\right]. \tag{1.3}$$

So 和 Yu[16] 及 So 等[15] 证明了模型 (1.3) 中正稳态解的全局吸引性. 研究结果表明, 时滞 r 的出现引入会导致系统产生非齐次正稳态, 并将发生 Hopf 分支. 之后, 许多研究人员对各类种群模型的 Hopf 分支问题进行研究, 相关研究结果详见文献 [4,5,8–10]. 然而, 由于许多生物群体或个体生活在具有单向性漂移运动的环境中, 故仅考虑随机扩散运动并不符合所有实际情形. 基于此, Ma 和 Wei[11] 考虑了对流因素并研究了模型 (1.3) 的更一般形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = du_{xx}(x,t) - \alpha u_x(x,t) - \gamma u(x,t) + g(u(x,t-\tau)), & t>0, \quad x\in(0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t>0. \end{cases} \tag{1.4}$$

另外, 人们已经认识到在现实世界中个体的认知过程会显著影响其行为 (参见文献 [1,2]). 研究人员发现, 动物会基于其记忆信息朝着有利的方向发展, 动物记忆与运动之间的相互作用是复杂的, 如蓝鲸的迁徙[1]. Shi 等[14] 首次将基于记忆的运动考虑到生物种群模型中, 通过添加时滞表达动物的情景式空间记忆, 并考虑如下模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u_{xx}(x,t) + D(uu_x(x,t-r))_x + lg(u(x,t)), & t>0, \quad x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & t>0, \quad x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中, $D\in\mathbb{R}$ 表示基于记忆时滞的扩散率, l 表示标准空间扩散下的伸缩常数, $r\geqslant 0$ 表示平均记忆周期 (即记忆延迟), g 表示生物出生/死亡, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 1)$ 中带有光滑边界 $\partial\Omega$ 的连通有界区域, n 是 $\partial\Omega$ 的向外单位法向量. 从生物意义上说, $D>0$ 意味着动物沿着负梯度方向运动, $D<0$ 意味着反向运动, $D=0$ 意味着不存在基于记忆的扩散. 显然, 空间记忆时滞对于自然界中的许多动物来说是重要的, 尤其是对于高度发达的动物来说, 它解释了动物对历史密度分布或当地环境特征的记忆时间. 然而, 对于这类模型而言, 空间记忆时滞对从数学角度分析种群动态带来了新的挑战. 基于前面分析, 当 $t>0$ 时, 我们将研究下述模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} - \alpha u_x - \gamma u + D(u(u(t-r))_x)_x + g(u(t-\tau)), & x\in(0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中, D 为正实数, 表示基于记忆的扩散率, $r,\tau\geqslant 0$ 分别表示基于记忆的延迟时间和物种的成熟时滞, g 表示生物出生/死亡. 有关模型 (1.6) 的非时滞系统, Tang 和 Chen[18–20] 以及 Tang 和 Zhou[21] 作了一系列研究. 正如前文所述, 空间记忆时滞对从数学角度分析种群动态带来了挑战, 其主要原因在于该模型包含了扩散和双时滞, 因而有关模型 (1.6) 的研究在国内外几乎是空白的. 令 $\tilde{u} = \mathrm{e}^{-\alpha x}$, 同时去掉

波浪号, 则模型 (1.6) 可化为下述模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{e}^{-\alpha x}(\mathrm{e}^{\alpha x}u_x)_x - \gamma u + D\mathrm{e}^{-\alpha x}(\mathrm{e}^{\alpha x}u(\mathrm{e}^{\alpha x}u(t-r))_x)_x \\ \qquad\qquad + \mathrm{e}^{-\alpha x}g(\mathrm{e}^{\alpha x}u(t-\tau)), \quad x \in (0,L), \quad t>0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t>0. \end{cases} \tag{1.7}$$

值得注意的是, 椭圆算子 $(\cdot)_{xx} - \alpha(\cdot)_x$ 在模型 (1.6) 中是非自伴随的, 在模型 (1.6) 中通过变换 $\tilde{u} = \mathrm{e}^{-\alpha x}$ 可将其处理为 $\mathrm{e}^{-\alpha x}(\mathrm{e}^{\alpha x}(\cdot)_x)_x$ 的自伴随算子, 从而简化了研究问题. 否则, 我们需要研究该模型在正稳态解下的线性化方程对应的椭圆算子及其伴随算子. 基于记忆的扩散种群模型在具有 Neumann 边界条件下存在一些研究结果 (参见文献 [13,17]). 尽管 Dirichlet 边界条件在种群生态学方面的研究起着重要作用, 但关于 Dirichlet 边界条件的研究鲜有出现, 其重要原因之一可能是空间不均匀性导致研究非零稳态解的存在性与稳定性是不容易的. 本文首先使用 Lyapunov-Schmidt 约化理论证明参数 λ 在 λ_* 处非零稳态解 u_λ^* 的存在性. 进而, 通过研究线性化系统在 u_λ^* 处的特征方程 (该特征方程包含两个时滞的椭圆算子的特征值问题) 进一步研究了 u_λ^* 的局部稳定性. 首先通过特征值分析, 我们证明了当 $r=0, \tau \geqslant 0$ 时, u_λ^* 是局部线性稳定的. 当 $r, \tau > 0$ 时, 系统此时具有较为丰富的动力学行为, 本文给出了 u_λ^* 的局部稳定的充分条件. 当不满足这些条件时, 存在 (r,τ) 一些临界值, 使得特征方程具有纯虚特征值. 由所有这些临界值形成的 (r,τ) 平面中的曲线在本文中被称为交叉曲线, 我们提供了判断纯虚特征值横穿虚轴的一个显式公式, 当 (r,τ) 通过交叉曲线时, 这些纯虚特征值的移动方向也同时被确定. 此外, 我们还研究了一些特殊情形, 即模型中仅含有单个时滞的相关动力学行为. 特别地, 当模型中 $\tau=0$, $r>0$, 即模型仅具有基于记忆时滞, 我们严格证明了系统在某些特殊情形下会产生 Hopf 分支. 最后, 得到了对流参数 α 对 Hopf 分支产生的影响: 在一些特殊条件下, Hopf 分支发生的首个临界值 r_0^λ 会随着对流参数 α 的增加而增大, 即分支更难出现. 有趣的是, 这种现象恰好与 Ma 和 Wei [11] 早期工作中无记忆扩散的结论相反.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节采用 Lyapunov-Schmidt 约化方法, 建立模型 (1.7) 正稳态的存在性、唯一性和多重性. 第 3 节通过分析在非齐次稳态解处特征值的分布 (尤其是纯虚特征值的存在性等性质), 得到空间非齐次稳态解的局部稳定性以及 Hopf 分支的存在性、稳定性和方向的一些结果. 特别地, 本文分别分析 $r=0, \tau>0$ 以及 $r>0, \tau>0$ 等不同时滞条件下其特征值的分布, 进而得到稳定性和相关分支结果. 此外, 我们重点讨论 $r \geqslant 0, \tau = 0$ 时 Hopf 分支的相关问题 (其中在 $r=0, \tau \geqslant 0$ 的情形下, Ma 和 Wei [11] 对相关的 Hopf 分支作了较为详尽的分析, 这里不再赘述). 研究发现, 在某些特殊情形下, 对流项 α 的加入在一定程度上不利于 Hopf 分支的发生.

本文记 $X = H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$, $Y = L^2(0,L)$, $C := C([-\max\{r,\tau\}, 0], Y)$. 对于任意空间 Z, 定义其对应的复值空间为

$$Z_{\mathbb{C}} := Z \oplus \mathrm{i}Z = \{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in Z\}.$$

记 $\mathrm{Dom}(L)$ 和 $\mathrm{Ker}(L)$ 分别为线性算子 $L: Z_1 \to Z_2$ 对应的值域空间和核空间. 在 Hilbert 空间 $Y_{\mathbb{C}}$ 中, 定义内积

$$\langle u, v \rangle = \int_0^L \bar{u}(x)v(x)dx.$$

此外, 本文假设:

(H) $g(0)=0$, $g'(0)>0$, $g(\cdot) \in C^k(\mathbb{R})$ $(k \geqslant 3)$.

2 正稳态解的存在性

记 λ_* 为下述特征值问题的主特征值, 其对应的特征函数记为 $\phi_*>0$:

$$\begin{cases} -(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_x)_x=\lambda \mathrm{e}^{\alpha x}\phi(x), & x\in(0,L),\\ \phi(0)=\phi(L)=0. \end{cases} \tag{2.1}$$

由文献 [7, 定理 1] 可知, 特征值问题 (2.1) 存在唯一的主特征值 $\lambda_*>0$, 且由变分公式可得

$$\lambda_*(\alpha)=\inf_{\phi\in W_0^{1,2}(0,L)}\frac{\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_x^2dx}{\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi^2dx}\triangleq\lambda_*>0.$$

为了方便起见, 记

$$\rho_0=\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*^2(x)dx,\quad \rho_1=D\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x(\phi_*)_xdx,\quad \rho_2=\frac{g''(0)}{2}\int_0^L \mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^3dx. \tag{2.2}$$

易知, 模型 (1.7) 的稳态解由下面对应的稳态系统求得:

$$\begin{cases} (\mathrm{e}^{\alpha x}u_x)_x-\gamma \mathrm{e}^{\alpha x}u+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u(\mathrm{e}^{\alpha x}u)_x)_x+l\mathrm{e}^{\alpha x}ug(\mathrm{e}^{\alpha x}u)=0, & x\in(0,L),\\ u(0)=u(L)=0. \end{cases} \tag{2.3}$$

定义非线性算子 $G: X\times\mathbb{R}\to Y$ 如下:

$$G(u,\lambda)=(\mathrm{e}^{\alpha x}u_x)_x+(\lambda-lg(0))\mathrm{e}^{\alpha x}u+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u(\mathrm{e}^{\alpha x}u)_x)_x+g(\mathrm{e}^{\alpha x}u), \tag{2.4}$$

其中, $\lambda=g'(0)-\gamma$. 显然, 对于每一个固定的 $\lambda\in\mathbb{R}$, $u=0$ 是方程 $G(u,\lambda)=0$ 的解. 接下来, 讨论在 $u=0$ 附近, 方程 $G(u,\lambda)=0$ 的非常数解. 首先, 计算 G 关于 u 在 $(0,\lambda)$ 处的 Frechét 导数:

$$\mathfrak{L}_\lambda u=(\mathrm{e}^{\alpha x}u_x)_x+\lambda\mathrm{e}^{\alpha x}u,\quad u\in X.$$

显然, 算子 $\mathfrak{L}_\lambda$ 有界, 且由闭图像定理可知存在有界逆 $\mathfrak{L}_\lambda^{-1}$. 此外, $\mathfrak{L}_\lambda$ 是自共轭算子, 即 $\langle u,\mathfrak{L}_\lambda v\rangle=\langle\mathfrak{L}_\lambda u,v\rangle$. 记 $\mathbb{K}=\mathrm{span}\{\phi_*\}$, 则 X 和 Y 可分解如下:

$$X=\mathbb{K}\oplus X_1,\quad Y=\mathbb{K}\oplus Y_1,$$

其中,

$$X_1=\{y\in X\mid\langle v,y\rangle=0,\forall\, v\in\mathbb{K}\},$$
$$Y_1=\{y\in Y\mid\langle v,y\rangle=0,\forall\, v\in\mathbb{K}\}.$$

因此, 任意的 u 可唯一分解为 $u=u_1+u_2$, 其中 $u_1\in\mathbb{K}$, $u_2\in X_1$.

定理 2.1 假设 $\rho_1-\rho_2\neq0$, 则存在正数 $\bar\lambda^*$, $\underline\lambda^*$ ($\underline\lambda^*<\lambda_*<\bar\lambda^*$) 和一个连续可微映射 $[\underline\lambda^*,\bar\lambda^*]\ni\lambda\to(z_\lambda,\xi_\lambda)\in\mathbb{R}\times X_1$, 使得系统 (1.7) 存在唯一稳态解 $u_\lambda^*=z_\lambda\phi_*+\xi_\lambda$, 其中,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{u_\lambda^*}{\lambda-\lambda_*}=\frac{D\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x(\phi_*)_xdx-\frac{g''(0)}{2}\int_0^L \mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^3(x)dx}{\int_0^L \mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^3(x)dx}\phi_*=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_0}\phi_*,$$

这里

$$\rho_0=\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*^2(x)dx,\quad \rho_1=D\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x(\phi_*)_xdx,\quad \rho_2=\frac{g''(0)}{2}\int_0^L \mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^3(x)dx.$$

证明 首先, 定义投影算子 P 和 $I-P$:

$$P: Y \to Y_1,$$
$$I-P: Y \to \mathbb{K}.$$

那么, $G(u,\lambda)=0$ 可化为下面等价系统:

$$PG(u_1+u_2,\lambda)=0, \quad (I-P)G(u_1+u_2,\lambda)=0, \tag{2.5}$$

其中, $u_1\in\mathbb{K}$, $u_2\in X_1$, $u_1+u_2=u\in X$. 显然, $G(0,\lambda_*)=0$, $PG_{u_2}(0,\lambda_*)=\mathfrak{L}_{\lambda_*}$. 由隐函数存在定理可知, 存在定义在 Υ 上的连续可微映射 $h:\Xi\to X_1$ 使得

$$h(0,\lambda)=0, \quad PG(u_1+h(u_1,\lambda),\lambda)\equiv 0, \tag{2.6}$$

其中, Υ 是定义在 $\mathbb{K}\times\mathbb{R}$ 上关于 $(0,\lambda_1)$ 的开邻域.

将 $u_2=h(u_1,\lambda)$ 代入 (2.6) 的第二个方程可得

$$\mathbb{G}(u_1,\lambda)\equiv (I-P)G(u_1+h(u_1,\lambda),\lambda)=0. \tag{2.7}$$

由于 $u_1\in\mathbb{K}=\mathrm{span}\{\phi_*\}$, 故存在常数 $z_\lambda\in\mathbb{R}$ 满足 $u_1=z_\lambda\phi_*$. 将 $u_1=z_\lambda\phi_*$ 代入 (2.7) 同时与 φ_* 在 $[0,L]$ 作内积, 有

$$\mathfrak{g}(z_\lambda,\lambda)=\int_0^L \phi_*(x)G(z_\lambda\phi_*(x)+h(z_\lambda\phi_*(x),\lambda),\lambda)dx=0. \tag{2.8}$$

由于 $\mathfrak{g}(0,\lambda)=0$, 故可合理假设 $\mathfrak{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 表达式如下:

$$\frac{\mathfrak{g}(z_\lambda,\lambda)}{z_\lambda}=(\lambda-\lambda_*)+\mathcal{A}(\lambda)z_\lambda+\mathcal{B}(\lambda)z_\lambda^2+o(z_\lambda^2),$$

其中,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\lambda_*)&=\frac{-D\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x(\phi_*)_x dx+\frac{g''(0)}{2}\int_0^L \mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^3(x)dx}{\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*^2(x)dx}=\frac{-\rho_1+\rho_2}{\rho_0}\triangleq\mathcal{A},\\
\mathcal{B}(\lambda_*)&=\frac{1}{\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*^2(x)dx}\left[\frac{g''(0)}{2}\int_0^L \mathrm{e}^{2\alpha x}h_{u_1u_1}\phi_*^4(x)dx+\frac{g'''(0)}{6}\int_0^L \mathrm{e}^{3\alpha x}\phi_*^4(x)dx\right]\\
&\quad-\frac{\mathcal{A}\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}h_{u_1u_1}\phi_*^3dx+D\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}h_{u_1u_1}\phi_*^2)_x(\phi_*)_x dx}{2\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*^2(x)dx}\\
&\quad-\frac{D\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x\mathrm{e}^{\alpha x}h_{u_1u_1}\phi_*^2(\phi_*)_x dx}{2\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*^2(x)dx}\\
&\triangleq\mathcal{B}.
\end{aligned}$$

由 (2.6) 知 $\mathfrak{L}_{\lambda_*}h_{u_1u_1}(\phi_*,\lambda_*)+PG_{uu}(\phi_*,\lambda_*)=0$, 故 $h_{u_1u_1}(\phi_*,\lambda_*)=-g''(0)\mathfrak{L}_{\lambda_*}^{-1}[\mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^2]$. 由假设 $\rho_1-\rho_2\neq 0$ (即 $\mathcal{A}\neq 0$) 和隐函数存在定理可知, 存在正数 $\bar{\lambda}^*$, $\underline{\lambda}^*$ ($\underline{\lambda}^*<\lambda_*<\bar{\lambda}^*$) 和一个连续可微映射 $[\underline{\lambda}^*,\bar{\lambda}^*]\ni\lambda\to(z_\lambda,h_\lambda)\in\mathbb{R}\times X_1$, 使得系统 (1.7) 存在唯一稳态解 $u_\lambda^*=z_\lambda\phi_*+h_\lambda$, 并满足

$$\begin{aligned}
&z_\lambda=\frac{\lambda_*-\lambda}{\mathcal{A}}+o(|\lambda-\lambda_1|),\\
&\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{u_\lambda^*}{\lambda-\lambda_*}=\frac{D\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x(\phi_*)_x dx-\frac{g''(0)}{2}\int_0^L \mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^3(x)dx}{\int_0^L \mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^3(x)dx}\phi_*=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_0}\phi_*.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

证毕. □

注 2.1 由定理 2.1 中所得到的空间非齐次稳态解 u_λ^* 的表达式可知, 当 $(\lambda_*-\lambda)(\rho_1-\rho_2)>0$ (<0) 时, u_λ^* 为正 (负). 在生物学中, 我们只对正稳态解感兴趣.

如果 $\rho_1-\rho_2=0$ 且 $\mathcal{B}\neq 0$, 则 $\mathfrak{g}(\cdot,\lambda)$ 在 λ_* 附近可能发生鞍结点分支. 确切地, 如果 $\mathcal{B}<0$ $(\mathcal{B}>0)$, 则当 $\lambda>\lambda_*$ $(\lambda<\lambda_*)$ 时, $\mathfrak{g}(\cdot,\lambda)$ 在零点附近存在两个解 $z=z_\lambda^{\pm}$; 当 $\lambda=\lambda_*$ 时, $\mathfrak{g}(\cdot,\lambda)$ 仅存在一个解 $z_\lambda=0$; 当 $\lambda<\lambda_*$ $(\lambda>\lambda_*)$ 时, $\mathfrak{g}(\cdot,\lambda)$ 无解.

定理 2.2 如果 $\rho_1-\rho_2=0$ 且 $\mathcal{B}<0$ $(\mathcal{B}>0)$, 则存在常数 $\bar{\lambda}_*>\lambda_*$ $(\underline{\lambda}_*<\lambda_*)$ 及从 $(\bar{\lambda}_*,\lambda^*)$ $((\underline{\lambda}_*,\lambda_*))$ 到 $\mathbb{R}$ 的两个连续可微的映射, 使得系统 (2.3) 有两个非齐次稳态解

$$u_\lambda^{\pm}(x)=z_\lambda^{\pm}\phi_*(x)+h(z_\lambda^{\pm}\phi_*(x),\lambda),$$

其中, $h(z_\lambda^{\pm}\phi_*(x),\lambda)\in\mathbb{X}_1$, 且满足

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{u_\lambda^{\pm}}{\sqrt{\frac{\lambda_*-\lambda}{\mathcal{B}}}}=\phi_*.$$

注 2.2 我们看到定理 2.2 得到的两个空间非齐次稳态解 $u_\lambda^{\pm}$ 中的一个是正的, 另一个是负的.

3 特征值和稳定性分析

本节考虑非齐次稳态解 u_λ^* 的局部稳定性. 系统 (1.7) 在 u_λ^* 处的线性化方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=(\mathrm{e}^{\alpha x}v_x)_x-\gamma\mathrm{e}^{\alpha x}v+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}v(t-r))_x)_x\\ \qquad\quad +D(\mathrm{e}^{\alpha x}v(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x+g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\mathrm{e}^{\alpha x}v(t-\tau),\\ v(0,t)=v(L,t)=0.\end{cases}\tag{3.1}$$

当 $(r,\tau)\in\mathbb{R}^2$ 时, 我们希望寻找 $\mu\in C$ 和 $\psi\in X_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$, 使得

$$\begin{aligned}\Lambda(\lambda,\mu,r,\tau)\psi=&(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_x)_x-\gamma\mathrm{e}^{\alpha x}\psi+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi)_x)_x\mathrm{e}^{-\mu r}\\ &+D(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x+g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\mathrm{e}^{\alpha x}\psi\mathrm{e}^{-\mu\tau}-\mu\mathrm{e}^{\alpha x}\psi\\ =&0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

首先, 我们得到如下定理:

定理 3.1 假设 $\rho_1-\rho_2>0$, $g'(0)>\gamma>0$. 当 $\lambda\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$ 时, 如果 $(\lambda,\mu,r,\tau,\psi)$ 是方程 (3.2) 的解 (其中 $\mathcal{R}\mathrm{e}\mu_\lambda$, $\tau_\lambda,r_\lambda\geqslant 0$, $\psi_\lambda\in X_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$), 则存在 $\hat{\lambda}\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$ 使得当 $\lambda\in(\lambda_*,\hat{\lambda})$ 时, ψ_λ 可以表示为

$$\begin{cases}\psi_\lambda=c_\lambda\phi_*+\vartheta_\lambda,\quad c_\lambda\geqslant 0,\quad \vartheta_\lambda\in(\mathbb{X}_1)_{\mathbb{C}},\\ \|\psi_\lambda\|_{Y_{\mathbb{C}}}=\|\phi_*\|_{Y_{\mathbb{C}}},\end{cases}\tag{3.3}$$

且满足 $\lim_{\lambda\to\lambda_*}c_\lambda=1$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\vartheta_\lambda=0$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\psi_\lambda=\phi_*$.

证明 首先, 证明当 $\lambda\in(\lambda_*,\hat{\lambda})$ 时 $|\mu|$ 的有界性. 由定理 2.1 中算子 $\lambda\to(z_\lambda,h_\lambda)$ 的连续性可知, 当 $\lambda\in(\underline{\lambda}_*,\bar{\lambda}_*)$ 时, $\{z_\lambda\}$ 与 $\{h_\lambda\}$ 是有界的. 由于 X 紧嵌入到 $C^{1+\delta}([0,L])$ $(0<\delta<\frac{1}{2})$, 故 $u_\lambda^*\in C^{1+\delta}([0,L])$ 且 u_λ^* 在空间 $C^{1+\delta}([0,L])$ 上是有界的, 即存在常数 C_1, 使得 $|u_\lambda^*|_{1+\delta}<C_1$. 注意到, u_λ^* 满足

$$\mathcal{H}_\lambda(u_\lambda^*)\triangleq(1+Du\mathrm{e}^{\alpha x})(u_\lambda^*)_{xx}+\alpha(1+2D\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)(u_\lambda^*)_x-\gamma u_\lambda^*+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x^2\mathrm{e}^{-\alpha x}+\mathrm{e}^{-\alpha x}g(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)=0.$$

由椭圆方程的正则性理论及嵌入定理可知, 当 $\lambda\in(\underline{\lambda}_*,\bar{\lambda}_*)$ 时, $u_\lambda\in C^{2+\delta}([0,L])$ 且在空间 $C^{2+\delta}([0,L])$ 上是有界的. 因此, 存在正数 M, 使得

$$\mathrm{e}^{-\mu\tau}\int_0^L g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\mathrm{e}^{2\alpha x}|\psi_\lambda|^2dx\leqslant ML\mathrm{e}^{2\alpha L}\|\psi_\lambda\|_\infty^2.$$

对 $\Lambda(\lambda,\mu_\lambda,r,\tau)\psi_\lambda$ 与 $\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda$ 作内积运算, 有

$$\begin{aligned}0&=\langle\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda,\Lambda(\lambda,\mu_\lambda,r,\tau)\psi_\lambda\rangle\\&=D\mathrm{e}^{-\mu r}\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi}_\lambda dx+D\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x\mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi}_\lambda dx\\&\quad+\mathrm{e}^{-\mu\tau}\int_0^L g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\mathrm{e}^{2\alpha x}|\psi_\lambda|^2dx-(\mu+g'(0))\int_0^L\mathrm{e}^{2\alpha x}|\psi_\lambda|^2dx+\langle\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda,\mathcal{L}_\lambda\psi_\lambda\rangle.\end{aligned}\tag{3.4}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\langle\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda,\mathcal{L}_\lambda\psi_\lambda\rangle\\&\quad=\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}(\psi_\lambda)_x)_x(\mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi}_\lambda)dx+\lambda\int_0^L\mathrm{e}^{2\alpha x}|\psi_\lambda|^2dx\\&\quad\leqslant\left|\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}(\psi_\lambda)_x(\mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi}_\lambda)_xdx\right|+|\lambda|\left|\int_0^L\mathrm{e}^{2\alpha x}|\psi_\lambda|^2dx\right|\\&\quad\leqslant L\mathrm{e}^{2\alpha L}(\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty(\alpha\|\psi_\lambda\|_\infty+\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty)+|\bar{\lambda}_*|\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty^2),\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x\mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi}_\lambda dx\right|\\&\quad=\left|\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x(\mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi}_\lambda)_xdx\right|\\&\quad\leqslant L\mathrm{e}^{3\alpha L}\|\psi_\lambda\|_\infty(\alpha\|u_\lambda^*\|_\infty+\|(u_\lambda^*)_x\|_\infty)(\alpha\|\psi_\lambda\|_\infty+\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty),\\&\left|\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi}_\lambda dx\right|\\&\quad=\left|\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)(\mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi}_\lambda)_xdx\right|\\&\quad\leqslant L\mathrm{e}^{3\alpha L}\|u_\lambda^*\|_\infty(\alpha\|\psi_\lambda\|_\infty+\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty)(\alpha\|\psi_\lambda\|_\infty+\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty)\end{aligned}$$

以及 $\int_0^L\mathrm{e}^{2\alpha x}|\psi_\lambda|^2dx\leqslant L\mathrm{e}^{2\alpha L}\|\psi_\lambda\|_\infty^2$, 故而,

$$\begin{aligned}\mu\int_0^L\mathrm{e}^{2\alpha x}|\psi_\lambda|^2dx\leqslant{}&L\mathrm{e}^{2\alpha L}(\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty(\alpha\|\psi_\lambda\|_\infty+\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty)+|\bar{\lambda}_*|\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty^2)\\&+DL\mathrm{e}^{3\alpha L}\|\psi_\lambda\|_\infty(\alpha\|u_\lambda^*\|_\infty+\|(u_\lambda^*)_x\|_\infty)(\alpha\|\psi_\lambda\|_\infty+\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty)\\&+DL\mathrm{e}^{3\alpha L}\|u_\lambda^*\|_\infty(\alpha\|\psi_\lambda\|_\infty+\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty)(\alpha\|\psi_\lambda\|_\infty+\|(\psi_\lambda)_x\|_\infty)\\&+(M+g'(0))L\mathrm{e}^{2\alpha L}\|\psi_\lambda\|_\infty^2.\end{aligned}$$

由于 $\|\psi_\lambda\|_{X_\mathbb{C}}=\|\phi_*\|_{X_\mathbb{C}}$, 所以当 $\lambda\in(\lambda_*,\hat{\lambda})$ 时, $\|\psi_\lambda\|_{Y_\mathbb{C}}$ 和 $\|(\psi_\lambda)_x\|_{Y_\mathbb{C}}$ 是有界的. 因此, 当 $\lambda\in(\lambda_*,\hat{\lambda})$ 时, $|\mu|$ 是有界的. 由第 2 节中的空间分解易得 $\psi_\lambda=c_\lambda\phi_*+\vartheta_\lambda$. 接下来验证

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\mu_\lambda=0,\quad\lim_{\lambda\to\lambda_*}\psi_\lambda=\phi_*.$$

如果验证成立, 则 $\lim_{\lambda\to\lambda_*} c_\lambda = 1$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*} \vartheta_\lambda = 0$. 运用反证法, 若存在序列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\lambda_n \geqslant \lambda_*$) 及常数 $\chi \neq 0$ ($\mathcal{R}\mathrm{e}\chi \geqslant 0$), 使得 $\lim_{\lambda\to\lambda_*} \lambda_n = \lambda_*$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*} \mu_{\lambda_n} = \chi$, 则由于 $\{\mathrm{e}^{-\mu_{\lambda_n}\tau_{\lambda_n}}\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\mathrm{e}^{-\mu_{\lambda_n}r_{\lambda_n}}\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 以及 $\|\psi_{\lambda_n}\|_{X_\mathbb{C}} = \|\phi_*\|_{X_\mathbb{C}}$, 故存在 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列 $\{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (为了方便起见仍然记为 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$) 使得 $\lim_{\lambda\to\lambda_*} \mu_{\lambda_n} = \chi$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*} \mathrm{e}^{-\mu_{\lambda_n}\tau_{\lambda_n}} = a_*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*} \mathrm{e}^{-\mu_{\lambda_n}r_{\lambda_n}} = b_*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}$, 其中 $a_*, b_* \in [0,1]$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$, 且在空间 $C^\delta([0,L])$ ($0 < \delta < 1/2$) 中有 $\lim_{\lambda\to\lambda_*} \psi_{\lambda_n} = \lambda_*$.

将 $(\lambda_n, \mu_{\lambda_n}, r_{\lambda_n}, \tau_{\lambda_n}, \psi_{\lambda_n})$ 代入 (3.2) 可得

$$(\mathcal{L}_{\lambda_n} - I)\psi_{\lambda_n} + \mathcal{M}_{\psi_{\lambda_n}}\psi_{\lambda_n} = 0, \tag{3.6}$$

其中,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\psi_{\lambda_n}}\psi_{\lambda_n} =& \psi_{\lambda_n} + D(\mathrm{e}^{\alpha x}u^*_{\lambda_n}(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_{\lambda_n})_x)_x\mathrm{e}^{-\mu_{\lambda_n}r_{\lambda_n}} + D(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_{\lambda_n}(\mathrm{e}^{\alpha x}u^*_{\lambda_n})_x)_x - \mu_{\lambda_n}\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_{\lambda_n}\\ &+ g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u^*_{\lambda_n})\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_{\lambda_n}\mathrm{e}^{-\mu_{\lambda_n}\tau_{\lambda_n}} - g'(0)\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_{\lambda_n}.\end{aligned}$$

结合 $\|\psi_{\lambda_n}\|_{X_\mathbb{C}} = \|\phi_*\|_{X_\mathbb{C}}$ 和 $u^*_{\lambda_n} = z_{\lambda_n}\phi_* + h_{\lambda_n}$ 可知 $\{\psi_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(\psi_{\lambda_n})_x\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{(\psi_{\lambda_n})_{xx}\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界序列, 且满足

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}_{\lambda_n}\psi_{\lambda_n} = [g'(0)(a_*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} - 1) + 1]\psi_* - \chi\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_*.$$

$\mathcal{L}_{\lambda_*} - I$ 的逆算子 $(\mathcal{L}_{\lambda_*} - I)^{-1} : Y_\mathbb{C} \to X_\mathbb{C}$ 存在且连续, 并有

$$-\lim_{n\to\infty}(\mathcal{L}_{\lambda_n} - I)^{-1}\mathcal{M}_{\lambda_n}\psi_{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty}\psi_{\lambda_n} = -(\mathcal{L}_{\lambda_*} - I)^{-1}([g'(0)(a_*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} - 1) + 1] - \chi\mathrm{e}^{\alpha x})\psi_*.$$

由 $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\psi_\lambda = \psi_*$ 及 $\|\psi_\lambda\|_{X_\mathbb{C}} = \|\phi_*\|_{X_\mathbb{C}}$ 可知 $\mathcal{L}_{\lambda_*}\psi_* = [\chi - g'(0)(a_*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} - 1)]\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_*$. 这意味着 $\chi - g'(0)(a_*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} - 1)$ 和 ψ_* 分别是算子 $\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathcal{L}_{\lambda_*}$ 的特征值与特征向量. 易知, $\mathcal{L}_{\lambda_*}$ 具有最大的主特征值为 0, 其余特征值为负值. 因此, $\mathrm{e}^{\alpha x}\mathcal{L}_{\lambda_*}$ 具有最大的主特征值为 0, 其余特征值也为负值. 又注意到 $g'(0) > 0$, $a_* \in (0,1)$, $\theta_1 \in [0, 2\pi)$ 以及 $\chi > 0$, 那么 $\mathcal{R}\mathrm{e}[\chi - g'(0)(a_*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1} - 1)] = \mathcal{R}\mathrm{e}[\chi + g'(0)(1 - a_*\cos\theta_1)] > 0$, 构成矛盾. 因此, $a_* = 1$, $\theta_1 = 0$, $\chi = 0$, 即 $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\mu_\lambda = 0$, 且 $\psi_* = k\phi_*$ ($|k| = 1$). 由 (3.3) 知 $k = 1$, 即 $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\psi_\lambda = \phi_*$. □

定理 3.2 假设 $\rho_1 - \rho_2 > 0$, $g'(0) > \gamma > 0$, 当 $\lambda \in (\lambda_*, \bar{\lambda}_*)$ 时, 对所有的 $\tau, r \geqslant 0$, 0 不是特征方程 (3.2) 的解.

证明 下面证明对所有的 $\tau, r \geqslant 0$, 0 不是特征方程 (3.2) 的根. 运用反证法: 假设 0 是特征方程 (3.2) 的解, 即存在函数 $\psi \in X_\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 使得下式成立:

$$\begin{aligned}\Lambda(\lambda, 0, r, \tau)\psi =& (\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_x)_x - \gamma\mathrm{e}^{\alpha x}\psi + D(\mathrm{e}^{\alpha x}u^*_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi)_x)_x\\ &+ D(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi(\mathrm{e}^{\alpha x}u^*_\lambda)_x)_x + g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u^*_\lambda)\mathrm{e}^{\alpha x}\psi\\ =& 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

由定理 3.1, 假设 $\psi = \beta_\lambda\phi_* + \varpi_\lambda z_\lambda$, 其中 $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\beta_\lambda = 1$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\vartheta_\lambda = 0$, $\langle\phi_*, \vartheta_\lambda\rangle = 0$. 由 (3.7) 可知

$$\beta_\lambda\mathrm{e}^{\alpha x}\Lambda(\lambda, 0, r, \tau)\phi_* + z_\lambda\mathrm{e}^{\alpha x}\Lambda(\lambda, 0, r, \tau)\vartheta_\lambda(x) = 0, \tag{3.8}$$

其中, $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$. 将系数 β_λ 和 $\vartheta_\lambda(x)$ 在 $\lambda = \lambda_*$ 附近展开, 可得

$$\beta_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j(\lambda - \lambda_*)^j, \quad \vartheta_\lambda(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\vartheta_j(x)(\lambda - \lambda_*)^j.$$

令

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &\triangleq \lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\Lambda(\lambda,0,r,\tau)\phi_*}{z_\lambda}\\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\lambda-\lambda_*}{z_\lambda}+2D(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x)_x+g''(0)\mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^2\\ &= \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_0}\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*+2D(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x)_x+g''(0)\mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^2.\end{aligned}$$

显然, $\tilde{\phi}\neq 0$. 如果 $\rho_1-\rho_2\neq 0$, 则 $\langle\phi_*,\tilde{\phi}\rangle=\rho_2-\rho_1$. 对比 (3.8) 两边的系数, 可以得到

$$\beta_0\tilde{\phi}+((\mathrm{e}^{\alpha x}(\cdot)_x)_x+\lambda_*\mathrm{e}^{\alpha x})\vartheta_0=0. \tag{3.9}$$

当 $\rho_1-\rho_2\neq 0$ 时, $\tilde{\phi}\notin Y_1$, 那么 $\beta_0=0$. 注意到 $\vartheta_0\in X_1$, 且算子 $(\mathrm{e}^{\alpha x}(\cdot)_x)_x+\lambda_*\mathrm{e}^{\alpha x}$ 在空间 X_1 上是可逆的, 于是有 $\vartheta_0(x)\equiv 0$. 类比方程 (3.8) 两边的其他高次项系数可知, 对任意的 $x,j\in\mathbb{N}$ 有 $\beta_j=\vartheta_j(x)\equiv 0$. 这意味着特征方程 $\Lambda(\lambda,\mu,r,\tau)\psi=0$ 只存在零解 $\psi=0$, 与假设 $\psi\in X_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ 矛盾. 因此, 定理 3.2 得证. □

3.1 时滞 $r=0$, $\tau\geqslant 0$

当时滞 $r=0$ 时, 若假设 $\rho_1-\rho_2>0$, $g(0)>\frac{\delta}{l}>0$, 则当 $\lambda\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$ 时, 如果 $(\lambda,\mu,0,\tau,\psi)$ 是方程 (3.2) 的解 (其中 $\mathcal{R}\mathrm{e}\mu_\lambda$, $\tau_\lambda\geqslant 0$, $\psi_\lambda\in X_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$), 则存在 $\hat{\lambda}\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$ 使得当 $\lambda\in(\lambda_*,\hat{\lambda})$ 时, ψ_λ 仍然可以表示为

$$\begin{cases}\psi_\lambda=c_\lambda\phi_*+\vartheta_\lambda,\quad c_\lambda\geqslant 0,\quad \vartheta_\lambda\in(\mathbb{X}_1)_{\mathbb{C}},\\ \|\psi_\lambda\|_{Y_{\mathbb{C}}}=\|\phi_*\|_{Y_{\mathbb{C}}},\end{cases}$$

且满足 $\lim_{\lambda\to\lambda_*}c_\lambda=1$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\vartheta_\lambda=0$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\psi_\lambda=\phi_*$. 此外, 还有如下结论:

定理 3.3 假设 $\rho_1-\rho_2>0$, $g'(0)>\gamma>0$. 若 $r=0$, 则存在 $\hat{\lambda}\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$ 使得当 $\lambda\in(\lambda_*,\hat{\lambda})$ 时, 特征方程 (3.2) 的所有特征值均具有负实部, 即非常数稳态解 u_λ 在 $(r,\lambda)=(0,\lambda_*)$ 附近是局部渐近稳定的.

证明 当 $r=0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Lambda(\lambda,\mu,0,\tau)\psi=&(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_x)_x-\gamma\mathrm{e}^{\alpha x}\psi+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi)_x)_x\\ &+D(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x+g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\mathrm{e}^{\alpha x}\psi\mathrm{e}^{-\mu\tau}-\mu\mathrm{e}^{\alpha x}\psi\\ =&0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

由第 2 节的空间分解可知, 对于每一个 $\psi\in X_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$, 有

$$\psi=\beta_\lambda\phi_*+z_\lambda\vartheta_\lambda, \tag{3.11}$$

其中,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\beta_\lambda=1,\quad \lim_{\lambda\to\lambda_*}\vartheta_\lambda=0,\quad \langle\phi_*,\vartheta_\lambda\rangle=0.$$

根据 Taylor 公式有 $g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)=g'(0)+g''(0)\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*+o(z_\lambda)$. 注意到, 当 $\lambda>\lambda_*$ 时, $u_\lambda^*=z_\lambda\phi_*+h(z_\lambda\phi_*,\lambda)$.

假设 $(\lambda,\mu_\lambda,r_\lambda,\tau_\lambda,\psi_\lambda)$ 是特征方程 (3.10) 的解, 由定理 3.2 的结论可知

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\mathrm{e}^{-\mu_\lambda\tau_\lambda}=\lim_{\lambda\to\lambda_*}a_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1^\lambda}=a_*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}=1,$$

其中, $a_*=1$, $\theta_1=0$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\lambda-\lambda_*}{z_\lambda}=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_0}\triangleq-\mathcal{A}$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\psi_\lambda=\phi_*$. 将 $u_\lambda^*=z_\lambda\phi_*+h_\lambda$ 代入 (3.10), 且等式两边同乘以 ϕ_*, 并在 $[0,L]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mu_\lambda}{z_\lambda}\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*\psi_\lambda dx=&\frac{D}{z_\lambda}\left[\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}h_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\phi_*dx+z_\lambda\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\phi_*dx\right]\\&+\frac{D}{z_\lambda}\left[\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}h_\lambda)_x)_x\phi_*dx+z_\lambda\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x)_x\phi_*dx\right]\\&+\frac{a_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1^\lambda}\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\psi_\lambda\phi_*dx-g'(0)\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda\phi_*dx}{z_\lambda}\\&+\frac{\langle\phi_*,\mathcal{L}_\lambda\psi_\lambda\rangle}{z_\lambda}+o(z_\lambda).\end{aligned}$$

由 $\rho_1>\rho_2$, $a_*=1$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\cos\theta_1^\lambda=\cos\theta_1=1$, $z_\lambda>0$ ($\lambda>\lambda_*$), 可得

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\mathcal{R}\mathrm{e}\mu_\lambda}{z_\lambda}=\frac{\rho_2-\rho_1-\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{(\theta_1^\lambda)^2}{2z_\lambda}}{\rho_0}<0,$$

故 $\mathcal{R}\mathrm{e}\mu_\lambda<0$. 这也就是说, 存在 $\hat\lambda\in(\lambda_*,\bar\lambda_*)$ 使得当 $\lambda\in(\lambda_*,\hat\lambda)$ 时, 有 $\mathcal{R}\mathrm{e}\mu_\lambda<0$, 即特征方程 (3.2) 的所有特征值均具有负实部. 证毕. □

推论 3.1 假设 $\rho_1-\rho_2>0$, $g'(0)>\gamma>0$. 若 $r=\tau=0$, 则存在常数 $\lambda^*>\lambda_*$, 使得当 $\lambda\in(\lambda_*,\lambda^*)$ 时, 特征方程 (3.2) 仅存在具有负实部的特征值. 这也就是说, 非常数稳态解 u_λ 在 $(r,\tau,\lambda)=(0,0,\lambda_*)$ 附近是局部渐近稳定的.

3.2 时滞 $r>0$, $\tau>0$

接下来, 我们的任务是讨论在 λ_* 附近, 特征方程 (3.2) 纯虚特征值的情形. 假设 $(\mu,\psi)=(\mathrm{i}\omega,\psi)$ 是特征方程对应的纯虚特征值和特征函数, 根据定理 3.3, 假设其形式如下:

$$\begin{cases}\psi=c\phi_*+z_\lambda\vartheta_\lambda,\quad c_\lambda\geqslant 0,\quad \vartheta\in(\mathbb{X}_1)_{\mathbb{C}},\\ \|\psi\|_{Y_{\mathbb{C}}}=c^2\|\phi_*\|_{Y_{\mathbb{C}}}^2+z_\lambda^2\|h\|_{Y_{\mathbb{C}}}^2=\|\phi_*\|_{Y_{\mathbb{C}}}^2.\end{cases}\tag{3.12}$$

为了进一步研究, 考察方程

$$\mathcal{D}(\xi,\theta_1^\xi,\theta_2^\xi)=\mathcal{D}_0(\xi)+\mathcal{D}_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1^\xi}+\mathcal{D}_2(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\xi}=0,\tag{3.13}$$

其中,

$$\begin{aligned}&\xi=\frac{\omega+\theta_1^\xi(\gamma+\lambda)}{z_\lambda},\\&\mathcal{D}_0(\xi)=\left[\frac{-\rho_2}{\rho_0}-\mathrm{i}\xi\right]\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*^2dx+\rho_2-\sqrt{\rho_1^2-\rho_0^2\xi^2}=-\sqrt{\rho_1^2-\rho_0^2\xi^2}-\mathrm{i}\xi\rho_0,\\&\mathcal{D}_1(\xi)=\int_0^L\mathrm{e}^{2\alpha x}g''(0)\phi_*^3dx=2\rho_2,\\&\mathcal{D}_2(\xi)=D\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x)_x\phi_*dx=-\rho_1.\end{aligned}$$

引理 3.1 假设 $\rho_1 > \rho_2 > 0$, $g'(0) > \gamma > 0$, 则当 $\lambda \in (\lambda_*, \bar{\lambda}_*)$ 时, $(\xi, \theta_1^{\xi\pm}, \theta_2^{\xi\pm})$ 是方程 (3.13) 的解, 这里,

$$\begin{aligned}
&\xi \in \mathcal{X} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} : 0 \leqslant \xi \leqslant \frac{\rho_1}{\rho_0}\right\},\\
&\theta_1^{\xi\pm} = \arg(\arg(\mathcal{D}_1(\xi)) - \arg(\mathcal{D}_0(\xi)) \pm \sigma_1(\xi) - \pi),\\
&\theta_2^{\xi\pm} = \arg(\arg(\mathcal{D}_2(\xi)) - \arg(\mathcal{D}_0(\xi)) \pm \sigma_2(\xi) - \pi),
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\xi) &= \arccos\left(\frac{|\mathcal{D}_0(\xi)|^2 + |\mathcal{D}_1(\xi)|^2 - |\mathcal{D}_2(\xi)|^2}{2|\mathcal{D}_0(\xi)||\mathcal{D}_1(\xi)|}\right),\\
\sigma_2(\xi) &= \arccos\left(\frac{|\mathcal{D}_0(\xi)|^2 + |\mathcal{D}_2(\xi)|^2 - |\mathcal{D}_1(\xi)|^2}{2|\mathcal{D}_0(\xi)||\mathcal{D}_2(\xi)|}\right).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

证明 方程 (3.13) 可视为包含两个离散时滞的泛函微分方程的特征方程, 因此可以借鉴文献 [3] 中提出的几何方法来确定 (3.13) 的特征值. 首先, 将方程 (3.13) 中的 $\mathcal{D}_0(\xi)$, $\mathcal{D}_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$ 和 $\mathcal{D}_2(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}$ 作为复平面中的三个向量, 其对应的模长分别为 $|\mathcal{D}_0(\xi)|$, $|\mathcal{D}_1(\xi)|$ 和 $|\mathcal{D}_2(\xi)|$. 则 (3.13) 的任何解都必须使这些向量相互连接并形成一个封闭的三角形. 因此, $(\xi, \theta_1, \theta_2)$ 是 $\mathcal{D}(\xi, \theta_1, \theta_2) = 0$ 的解, 当且仅当

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{D}_0(\xi)| + |\mathcal{D}_1(\xi)| \geqslant |\mathcal{D}_2(\xi)|,\\
&|\mathcal{D}_0(\xi)| + |\mathcal{D}_2(\xi)| \geqslant |\mathcal{D}_1(\xi)|,\\
&|\mathcal{D}_1(\xi)| + |\mathcal{D}_2(\xi)| \geqslant |\mathcal{D}_0(\xi)|.
\end{aligned}$$

所以, $\rho_1 > \rho_2 > 0$ 且 $\xi \in \mathcal{X}$. 显然, 若 $\rho_1 > \rho_2 > 0$, 则 $\mathcal{X} \neq \emptyset$.

另外, 对于每一个 $\xi \in \mathcal{X}$, 记 $\sigma_1(\xi)$ 和 $\sigma_2(\xi)$ 分别是向量 $\mathcal{D}_0(\xi)$, $\mathcal{D}_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$ 与 $\mathcal{D}_0(\xi)$, $\mathcal{D}_2(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}$ 的夹角. 由余弦定理可知, $\sigma_1(\xi)$ 和 $\sigma_2(\xi)$ 可以由模长 $|\mathcal{D}_0(\xi)|$, $|\mathcal{D}_1(\xi)|$ 及 $|\mathcal{D}_2(\xi)|$ 表示, 正如 (3.14) 所示. 则对每一个 $\xi \in \mathcal{X}$ 及任意的 $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$, 必须满足

$$\begin{aligned}
&\arg(\mathcal{D}_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}) - \arg(\mathcal{D}_0(\xi)) \pm \sigma_1(\xi) = \pi,\\
&\arg(\mathcal{D}_2(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}) - \arg(\mathcal{D}_0(\xi)) \pm \sigma_2(\xi) = \pi,
\end{aligned}$$

其中, $\arg : \mathbb{C} \to [0, 2\pi)$ 代表辐角主值. 至此, 引理得证. □

由引理 3.1 可得如下引理:

引理 3.2 假设 $\rho_1 - \rho_2 > 0$, $g'(0) > \gamma > 0$, 则当 $\lambda \in (\lambda_*, \bar{\lambda}_*)$ 且 $\xi \in \mathcal{X}$ 时, $\sin(\theta_1^\xi - \theta_2^\xi) = 0$ 当且仅当 $\xi_{\lambda_*} = 0$.

证明 当 $\xi \in \mathcal{X}$ 时, 若 $(\xi, \theta_1^\xi, \theta_2^\xi)$ 是 $\mathcal{D}(\xi, \theta_1^\xi, \theta_2^\xi) = 0$ 的解, 则

$$-\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2\xi^2} - \mathrm{i}\xi\rho_0 + 2\rho_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1^\xi} - \rho_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\xi} = 0. \tag{3.15}$$

对 (3.15) 两边同时乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1^\xi}$ 并分离实部与虚部, 可得

$$-\sqrt{\rho_1^2 - \rho_0^2\xi^2}\sin\theta_1^\xi - \xi\rho_0\cos\theta_1^\xi = \rho_1\sin(\theta_1^\xi - \theta_2^\xi).$$

注意到 $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\theta_1^\xi = 0$ 且 $\sin(\theta_1^\xi - \theta_2^\xi) = 0$, 故 $\xi_{\lambda_*} = 0$. □

引理 3.3 假设 $\rho_1-\rho_2>0$, $g'(0)>\gamma>0$. 当 $\lambda\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$, $r>0$, 且 $\rho_1+\rho_2>0$ 时, 如果 $(\lambda,\mathrm{i}\omega,r,\tau,\psi)$ 是方程 (3.2) 的解 (其中, $\tau,r\geqslant 0$, $\psi\in X_{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$, $\theta_1^\lambda=\omega\tau$, $\theta_2^\lambda=\omega r$), 则

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{(\theta_1^\lambda)^2}{z_\lambda}=\frac{2(\rho_2-\rho_1\cos\theta_2)}{lg(0)\rho_0}\triangleq\mathcal{E}^*>0,\quad \lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\omega+\theta_1^\lambda(\gamma+\lambda)}{\theta_1^\lambda}=-\rho_1\sin\theta_2\triangleq\mathcal{F}^*, \tag{3.16}$$

其中,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\theta_1^\lambda=\theta_1=0,\quad \lim_{\lambda\to\lambda_*}\theta_2^\lambda=\theta_2\in\left(0,\frac{1}{2}\pi\right).$$

证明 将 $(\lambda,\mathrm{i}\omega,r,\tau,\psi)$ $(\psi=c\phi_*+z_\lambda\vartheta)$ 和 $u_\lambda^*=z_\lambda\phi_*+h_\lambda$ 代入 (3.2), 且等式两边同乘以 ϕ_* 并在 $[0,L]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}\omega}{z_\lambda}\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*\psi dx=&\frac{D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}}{z_\lambda}\left[\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}h_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi)_x)_x\phi_*dx+z_\lambda\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi)_x)_x\phi_*dx\right]\\&+\frac{D}{z_\lambda}\left[\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi(\mathrm{e}^{\alpha x}h_\lambda)_x)_x\phi_*dx+z_\lambda\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x)_x\phi_*dx\right]\\&+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\psi\phi_*dx-g'(0)\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}\psi\phi_*dx}{z_\lambda}\\&+\frac{\langle\phi_*,\mathcal{L}_\lambda\psi\rangle}{z_\lambda}+o(z_\lambda).\end{aligned} \tag{3.17}$$

对 (3.17) 等号两边同时取极限 $\lambda\to\lambda_*$ 并分离实部与虚部, 可得

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{(\theta_1^\lambda)^2}{z_\lambda}=\frac{2(\rho_2-\rho_1\cos\theta_2)}{g'(0)\rho_0},\quad \lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\omega+\theta_1^\lambda(\gamma+\lambda)}{z_\lambda}=\rho_1\sin\theta_2.$$

当 $r>0$ 时, 若 $\rho_1-\rho_2>0$ 且 $\rho_1+\rho_2>0$, 则 $\rho_1>\rho_2>0$. 这里, 强调 $\theta_2\neq 0$, 否则

$$0\leqslant\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{(\theta_1^\lambda)^2}{z_\lambda}=\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{g'(0)\rho_0}<0,$$

构成矛盾. 因此, 可以找到合适的 $\theta_2\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ 满足

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{(\theta_1^\lambda)^2}{z_\lambda}=\frac{2(\rho_2-\rho_1\cos\theta_2)}{g'(0)\rho_0}>0,\quad \lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\omega+\theta_1^\lambda(\gamma+\lambda)}{z_\lambda}=\frac{\rho_1\sin\theta_2}{\rho_0}>0.$$

证毕. □

注 3.1 若 $r=0$, 则 $\theta_2=0$. 由已知条件 $z_\lambda>0$, $\rho_1>\rho_2$, $g'(0)\rho_0$ 以及极限的保号性可知

$$0\leqslant\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{(\theta_1^\lambda)^2}{z_\lambda}=\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{g'(0)\rho_0}<0,$$

构成矛盾. 因此, 当 $r=0$ 时, 特征方程 (3.2) 没有纯虚特征值.

根据引理 3.3 以及 $\lambda\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$, 记

$$\theta_1^\lambda=\mathcal{E}_\lambda\sqrt{z_\lambda},\quad \omega_\lambda=\sqrt{z_\lambda}[\mathcal{F}_\lambda\sqrt{z_\lambda}-\mathcal{E}_\lambda(\gamma+\lambda)], \tag{3.18}$$

其中,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\mathcal{E}_\lambda=\mathcal{E}^*\equiv\sqrt{\frac{2(\rho_2-\rho_1\cos\theta_2)}{g'(0)\rho_0}},\quad \lim_{\lambda\to\lambda_*}\mathcal{F}_\lambda=\mathcal{F}^*=\frac{\rho_1\sin\theta_2}{\rho_0}. \tag{3.19}$$

假设特征方程 (3.2) 具有纯虚特征值 $\mathrm{i}\omega$, 则有如下等价形式:

$$\begin{aligned}\Theta(\lambda,\omega,\theta_1,\theta_2)\psi=&(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_x)_x-\gamma\mathrm{e}^{\alpha x}\psi+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi)_x)_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}\\&+D(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x+g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\mathrm{e}^{\alpha x}\psi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}-\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{\alpha x}\psi\\=&0.\end{aligned}\tag{3.20}$$

基于此, 有如下结论:

定理 3.4 假设 $\rho_1-\rho_2>0$ 且当 $\rho_1+\rho_2>0$ 时有 $g'(0)>\gamma>0$, 则当 $\lambda\in(\lambda_*,\bar\lambda_*)$ 时有如下结论.

(1) 存在唯一一个从 $\lambda\in(\lambda_*,\bar\lambda_*)$ 到 $(X_{1\mathbb{C}}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^4$ 的连续可微映射 $\mathcal{Q}:\lambda\mapsto(\vartheta_\lambda,\beta_\lambda,\mathcal{E}_\lambda,\mathcal{F}_\lambda,\theta_2^\lambda)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\vartheta_\lambda,c_\lambda,\mathcal{E}_\lambda,\mathcal{F}_\lambda,\theta_2^\lambda,\lambda)=&\frac{c\Theta(\lambda,\sqrt{z_\lambda}[\mathcal{F}_\lambda\sqrt{z_\lambda}-\mathcal{E}_\lambda(\gamma+\lambda)],\mathcal{E}_\lambda\sqrt{z_\lambda},\theta_2^\lambda)\phi_*}{z_\lambda}\\&+\Theta(\lambda,\sqrt{z_\lambda}[\mathcal{F}_\lambda\sqrt{z_\lambda}-\mathcal{E}_\lambda(\gamma+\lambda)],\mathcal{E}_\lambda\sqrt{z_\lambda},\theta_2^\lambda)\vartheta,\end{aligned}$$

使得 $\mathcal{Q}(\vartheta_\lambda,c_\lambda,\mathcal{E}_\lambda,\mathcal{F}_\lambda,\theta_2^\lambda,\lambda)=0$, 且满足 $\mathcal{Q}(\vartheta^*,1,\mathcal{E}^*,\mathcal{F}^*,\theta_2^*,\lambda_*)=0$.

(2) 特征方程 (3.2) 有纯虚特征值 $\mathrm{i}\omega$ 当且仅当

$$\begin{aligned}&\omega=\omega_\lambda\equiv\sqrt{z_\lambda}[\mathcal{F}_\lambda\sqrt{z_\lambda}-\mathcal{E}_\lambda(\gamma+\lambda)],\\&r=r_m^\lambda\equiv\frac{\theta_2^\lambda+2m\pi}{\omega_\lambda},\quad\tau=\tau_n^\lambda\equiv\frac{\theta_1^\lambda+2n\pi}{\omega_\lambda},\quad m,n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

以及

$$\theta_1^\lambda=\mathcal{E}_\lambda\sqrt{z_\lambda},\quad\theta_2^\lambda\in\left(0,\frac{1}{2}\pi\right),\quad\psi_\lambda=c_\lambda\phi_*+z_\lambda\vartheta_\lambda,$$

其中, c_λ, ϑ_λ, $\mathcal{E}_\lambda$, $\mathcal{F}_\lambda$, θ_1^λ 和 θ_2^λ 与本定理的 (1) 一致.

证明 这里, 只对 (1) 进行证明, (2) 可直接推得. 联立 (3.18)–(3.20), 可得

$$\mathcal{Q}(\vartheta_\lambda,c_\lambda,\mathcal{E}_\lambda,\mathcal{F}_\lambda,\theta_2^\lambda,\lambda)=0,\tag{3.21}$$

其中, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}c=1$ 且 $\mathcal{Q}$: $\mathbb{X}_{1\mathbb{C}}\times\mathbb{R}^4\to\mathbb{Y}_{\mathbb{C}}\times\mathbb{R}$ 具体表达式如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\phi,\beta,\varrho,\eta,\lambda)=&\frac{c\Theta(\lambda,\sqrt{z_\lambda}[\mathcal{F}_\lambda\sqrt{z_\lambda}-\mathcal{E}_\lambda(\gamma+\lambda)],\mathcal{E}_\lambda\sqrt{z_\lambda},\theta_2^\lambda)\phi_*}{z_\lambda}\\&+\Theta(\lambda,\sqrt{z_\lambda}[\mathcal{F}_\lambda\sqrt{z_\lambda}-\mathcal{E}_\lambda(\gamma+\lambda)],\mathcal{E}_\lambda\sqrt{z_\lambda},\theta_2^\lambda)\vartheta.\end{aligned}$$

经计算得

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_*\equiv&\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\Theta(\lambda,\sqrt{z_\lambda}[\mathcal{F}_\lambda\sqrt{z_\lambda}-\mathcal{E}_\lambda(\gamma+\lambda)],\mathcal{E}_\lambda\sqrt{z_\lambda},\theta_2^\lambda)\phi_*}{z_\lambda}\\=&(\lambda-\lambda_*)\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*+D(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x)_x(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}+1)+g''(0)\mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^2-\frac{g'(0)}{2}\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*\mathcal{E}^2-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*\mathcal{F}.\end{aligned}$$

显然, 有 $\langle\phi_*,\widehat{\phi}_*\rangle=0$ 并且

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\Theta(\lambda,\sqrt{z_\lambda}[\mathcal{F}_\lambda\sqrt{z_\lambda}-\mathcal{E}_\lambda(\gamma+\lambda)],\mathcal{E}_\lambda\sqrt{z_\lambda},\theta_2^\lambda)=\mathfrak{L}_{\lambda_*}.$$

因此, 存在 $\vartheta^* \in \mathbb{X}_{1\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 使得 $\mathfrak{L}_{\lambda_1}\vartheta^* = -\widehat{\phi}_*$. 同时有

$$\mathcal{Q}(\vartheta^*, 1, \mathcal{E}^*, \mathcal{F}^*, \theta_2^*, \lambda_*) = 0.$$

接下来, 记 Ξ: $\mathbb{X}_{1\mathbb{C}} \times \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{Y}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{R}$ 为

$$\Xi = D_{\vartheta,c,\mathcal{E},\mathcal{F},\theta_2}\mathcal{Q}(\vartheta^*, 1, \mathcal{E}^*, \mathcal{F}^*, \theta_2^*, \lambda_*).$$

于是有

$$\Xi(\varpi, \kappa, \rho, \varsigma, \Upsilon) = \mathfrak{L}_{\lambda_*}\varpi + \widehat{\phi}_*\kappa - g'(0)\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*\sqrt{\mathcal{E}}\rho - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*\varsigma - \mathrm{i}(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x)_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}\Upsilon.$$

因此, Ξ 是一个从 $\mathbb{X}_{1\mathbb{C}} \times \mathbb{R}^4$ 到 $\mathbb{Y}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{R}$ 的双射. 由隐函数存在定理知, 存在唯一一个从 $(\lambda_*, \bar{\lambda}_*)$ 到 $\mathbb{X}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{R}^4$ 的连续可微映射 $\lambda \mapsto (\vartheta_\lambda, c_\lambda, \mathcal{E}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda, \theta_2^\lambda)$, 使得 $\mathcal{Q}(\vartheta_\lambda, c_\lambda, \mathcal{E}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda, \theta_2^\lambda, \lambda) = 0$. 因此, 定理得证. □

接下来, 引入集合 $\Pi_\lambda =: \{(r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi}) \mid n, m \in \mathbb{N}_0, (\lambda, \xi) \in (\lambda_*, \bar{\lambda}_*) \times \mathcal{X}\}$ 作为横截曲线, 研究当 (r, τ) 偏离 Π_λ 时, 特征方程 (3.20) 中纯虚特征值穿过复平面中虚轴的方向. 为此, 构建辅助方程如下:

$$\mathcal{G}(\mu, \lambda, r, \tau) = \mathcal{G}_0(\mu, \lambda, r, \tau) + \mathcal{G}_1(\mu, \lambda, r, \tau)\mathrm{e}^{-\mu r} + \mathcal{G}_2(\mu, \lambda, r, \tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau} = 0, \tag{3.22}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0(\mu, \lambda, r, \tau) &= D\int_0^L (\mathrm{e}^{\alpha x}\psi(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x\phi_* dx + (\lambda - \lambda_* - \mu - lg(0))\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\psi\phi_* dx,\\
\mathcal{G}_1(\mu, \lambda, r, \tau) &= D\int_0^L (\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi)_x)_x\phi_* dx,\\
\mathcal{G}_2(\mu, \lambda, r, \tau) &= \int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\psi\phi_* dx.
\end{aligned}$$

当 $\rho_1 - \rho_2 > 0$, $g'(0) > \gamma > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\mathrm{i}\omega_\lambda, \lambda, r_m^\lambda, \tau_n^\lambda) &= \mathcal{G}_0(\mathrm{i}\omega_\lambda, \lambda_*, r_m, \tau_n) + \mathcal{G}_1(\mathrm{i}\omega_\lambda, \lambda_*, r_m, \tau_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\lambda r_m^{\lambda,\xi}} + \mathcal{G}_2(\mathrm{i}\omega_\lambda, \lambda, r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\lambda\tau_n^{\lambda,\xi}}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

并且

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\mathcal{G}(\mathrm{i}\omega_\lambda, \lambda, r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi}) = -(1 + g'(0)\tau_n^{\lambda,\xi})\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*^2 dx = -(1 + g'(0)\tau_n^{\lambda,\xi})\rho_0 \neq 0,$$

这里 $(r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi}) \in \Pi_\lambda$. 由隐函数存在定理可知, 当 $(r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi}) \in \Pi_\lambda$ 时, 特征方程 (3.20) 在 $(r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi})$ 附近存在特征值 $\mu_\lambda(r, \tau) = \alpha_\lambda(r, \tau) + \mathrm{i}\omega_\lambda(r, \tau)$, 其对应的特征向量为 $\psi_\lambda(r, \tau)$ 且满足

$$\alpha_\lambda(r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi}) = 0, \quad \omega_\lambda(r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi}) = \omega_\lambda, \quad \psi_\lambda(r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi}) = \psi_\lambda.$$

参见文献 [3] 中的工作, 我们将横截曲线 Π_λ 上 ω 增加的方向称为正方向, 并且当我们沿着曲线的正方向移动时, 横截曲线左侧 (右侧) 的区域称为左 (右) 区域. 根据隐函数存在定理, 可得

$$\mathrm{Im}\left\{\overline{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial r}}(\mathrm{i}\omega_\lambda, \lambda, r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi})\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\tau}(\mathrm{i}\omega_\lambda, \lambda, r_m^{\lambda,\xi}, \tau_n^{\lambda,\xi})\right\} \neq 0.$$

则 (r,τ) 在 $(\alpha_\lambda,\omega_\lambda)=(0,\omega_\lambda)$ 邻域可以视为 $(\alpha_\lambda,\omega_\lambda)$ 的函数. 从而, 有

$$\mathrm{sgn}\left\{\mathrm{Im}\left\{\overline{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r}}(\mathrm{i}\omega_\lambda,\lambda,r_m^{\lambda,\xi},\tau_n^{\lambda,\xi})\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau}(\mathrm{i}\omega_\lambda,\lambda,r_m^{\lambda,\xi},\tau_n^{\lambda,\xi})\right\}\right\}=\mathrm{sgn}\{\mathrm{Im}\{\overline{\mathcal{G}_1}(\mathrm{i}\omega_\lambda,\lambda)\mathcal{G}_2(\mathrm{i}\omega_\lambda,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2^\xi-\theta_1^\xi)}\}\}.$$

由引理 3.2 知, 当 $(\lambda,\xi)\in\mathrm{int}((\lambda_*,\bar\lambda_*)\times\mathcal{X})$ 时, $\sin(\theta_2^\xi-\theta_1^\xi)\neq 0$. 结合

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\overline{\mathcal{G}_1}(\mathrm{i}\omega_\lambda,\lambda)\mathcal{G}_2(\mathrm{i}\omega_\lambda,\lambda)}{z_\lambda}=-g'(0)\rho_0\rho_1<0,$$

有如下结论成立.

定理 3.5 假设 $\rho_1>\rho_2>0$, $g'(0)>\gamma>0$. 当 $(\lambda,\xi)\in\mathrm{int}((\lambda_*,\bar\lambda_*)\times\mathcal{X})$ 时, 特征方程 (3.20) 在 $(r_m^{\lambda,\xi},\tau_n^{\lambda,\xi})$ 邻域存在特征值 $\mu_\lambda(r,\tau)=\alpha_\lambda(r,\tau)+\mathrm{i}\omega_\lambda(r,\tau)$, 且满足

$$\alpha_\lambda(r_m^{\lambda,\xi},\tau_n^{\lambda,\xi})=0,\quad \omega_\lambda(r_m^{\lambda,\xi},\tau_n^{\lambda,\xi})=\omega_\lambda,\quad \psi_\lambda(r_m^{\lambda,\xi},\tau_n^{\lambda,\xi})=\psi_\lambda.$$

当 $\sin(\theta_2^\xi-\theta_1^\xi)<0$ (>0) 时, 随着 (r,τ) 穿过横截曲线区域的右 (左) 侧, $\mu_\lambda(r,\tau)$ 从左到右穿过虚轴, 进而稳定性发生改变. 这里的 θ_1^ξ 和 θ_2^ξ 与引理 3.2 中定义的一致.

3.3 时滞 $r>0$, $\tau=0$

3.3.1 时滞 $r>0$, $\tau=0$ Hopf 分支

定理 3.6 假设 $\rho_1-\rho_2>0$, $g'(0)>\gamma>0$. 当 $\tau=0$ 时, 若 $\rho_2+\rho_1<0$, 则存在 $\hat\lambda\in(\lambda_*,\bar\lambda_*)$ 使得当 $\lambda\in(\lambda_*,\hat\lambda)$ 时, 特征方程 (3.2) 的所有特征值均具有负实部.

证明 假设 $(\lambda,\mu_\lambda,r_\lambda,\tau_\lambda,\psi_\lambda)$ 是特征方程 (3.2) 的解, 且有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_*}\mathrm{e}^{-\mu_\lambda r_\lambda}=\lim_{\lambda\to\lambda_*}b_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}=b_*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2},$$

其中, $b_*\in[0,1]$, $\theta_2\in[0,2\pi]$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\lambda-\lambda_*}{z_\lambda}=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_0}\triangleq-\mathcal{A}$, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\psi_\lambda=\phi_*$. 将 $u_\lambda^*=z_\lambda\phi_*+h_\lambda$ 代入 (3.2), 等号两边同乘以 ϕ_* 并在 $[0,L]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mu_\lambda}{z_\lambda}\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*\psi_\lambda dx=&\frac{Db_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}}{z_\lambda}\left[\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}h_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\phi_*dx+z_\lambda\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\phi_*dx\right]\\&+\frac{D}{z_\lambda}\left[\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}h_\lambda)_x)_x\phi_*dx+z_\lambda\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x)_x\phi_*dx\right]\\&+\frac{\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\psi_\lambda\phi_*dx-g'(0)\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda\phi_*dx}{z_\lambda}\\&+\frac{\langle\phi_*,\mathcal{L}_\lambda\psi_\lambda\rangle}{z_\lambda}+o(z_\lambda).\end{aligned}$$

因为 $0\leqslant b_*\leqslant 1$, $-1\leqslant\cos\theta_2^\lambda\leqslant 1$, $\rho_1+\rho_2<0$, $z_\lambda>0$ $(\lambda>\lambda_*)$, 所以有

$$\begin{aligned}\mathcal{S}&\triangleq\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\mathcal{R}e\mu_\lambda}{z_\lambda}=-b_*\cos\theta_2\rho_1+\rho_2,\\\mathcal{T}&\triangleq\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\mathcal{I}m\mu_\lambda}{z_\lambda}=b_*\sin\theta_2\rho_1.\end{aligned}$$

从而有

$$(\mathcal{S}-\rho_2)^2+\mathcal{T}^2=\mathcal{S}^2-2\mathcal{S}\rho_2+\rho_2^2+\mathcal{T}^2=b_*^2\rho_1^2.$$

假设 $\mathcal{R}\mathrm{e}\mu_\lambda \geqslant 0$, 由保号性可知 $\mathcal{S} \geqslant 0$, 又因为 $\rho_2 < 0$, 故

$$\rho_1^2 \geqslant b_*^2\rho_1^2 > \rho_2^2,$$

这与已知条件 $|\rho_2| > |\rho_1|$ 矛盾, 因此 $\mathcal{R}\mathrm{e}\mu_\lambda < 0$ 成立, 即存在 $\hat{\lambda} \in (\lambda_*, \bar{\lambda}_*)$ 使得当 $\lambda \in (\lambda_*, \hat{\lambda})$ 时 $\mathcal{R}\mathrm{e}\mu_\lambda < 0$. 这也就是说, 特征方程 (3.2) 的所有特征值均具有负实部. 证毕. □

由第 3.2 小节可知, 当 $\rho_1 - \rho_2 > 0$, $\rho_1 + \rho_2 > 0$ 且 $g'(0) > \gamma > 0$ 时, 特征方程 (3.2) 存在纯虚特征值. 特别地, 当 $\tau = 0$ 时, 有可能发生 Hopf 分支. 接下来证明, 当 r 穿过一些临界值 r_m^λ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ 时, (3.2) 的特征值将从 $\mathrm{i}\omega_\lambda$ 穿过虚轴. 特别地, 当 $\tau = 0$, $\rho_1 - \rho_2 > 0$, $\rho_1 + \rho_2 > 0$ 且 $g'(0) > \gamma > 0$ 时, 特征方程 (3.2) 可以化为下面表达式:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\lambda, \mu, r)\psi = {} & (\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_x)_x - \gamma\mathrm{e}^{\alpha x}\psi + D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi)_x)_x\mathrm{e}^{-\mu r} \\ & + D(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x + g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\mathrm{e}^{\alpha x}\psi - \mu\mathrm{e}^{\alpha x}\psi. \end{aligned} \tag{3.23}$$

引理 3.4 假设 $\rho_1 > \rho_2$, $\rho_1 + \rho_2 > 0$ 且 $g'(0) > \gamma > 0$. 当 $\lambda \in (\lambda_*, \bar{\lambda}_*)$, $\tau = 0$ 时, 若 $(\lambda, \mathrm{i}\omega, r, \psi)$ 是方程 (3.23) 的解 (其中, $r \geqslant 0$, $\psi \in X_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, $\theta_2^\lambda = \omega r$), 则

$$\rho_2 = \rho_1\cos\theta_2, \quad \lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\omega}{z_\lambda} = \rho_1\sin\theta_2 \triangleq \eta^*, \tag{3.24}$$

其中, $\lim_{\lambda\to\lambda_*}\theta_2^\lambda = \theta_2 \in (0, \pi)$.

证明 将 $(\lambda, \mathrm{i}\omega, r, \psi)$ $(\psi = c\phi_* + z_\lambda\vartheta)$ 和 $u_\lambda^* = z_\lambda\phi_* + h_\lambda$ 代入 (3.23), 等式两边同乘以 ϕ_* 并在 $[0, L]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}\omega}{z_\lambda}\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*\psi dx = {} & \frac{D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}}{z_\lambda}\left[\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}h_\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi)_x)_x\phi_* dx + z_\lambda\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi)_x)_x\phi_* dx\right] \\ & + \frac{D}{z_\lambda}\left[\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi(\mathrm{e}^{\alpha x}h_\lambda)_x)_x\phi_* dx + z_\lambda\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x)_x\phi_* dx\right] \\ & + \frac{\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\psi\phi_* dx - g'(0)\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\psi\phi_* dx}{z_\lambda} \\ & + \frac{\langle\phi_*, \mathcal{L}_\lambda\psi\rangle}{z_\lambda} + o(z_\lambda). \end{aligned} \tag{3.25}$$

对上式两边同时取极限 $\lambda \to \lambda_*$, 并分离实部与虚部, 可得

$$\rho_2 = \rho_1\cos\theta_2, \quad \lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\omega}{z^\lambda} = \lim_{\lambda\to\lambda_*}\eta_\lambda = \rho_1\sin\theta_1 = \sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2} \triangleq \eta_* > 0.$$

证毕. □

与定理 3.4 的证明类似, 当 $\rho_1 > \rho_2$, $\rho_1 + \rho_2 > 0$ 且 $g'(0) > \gamma > 0$, $\lambda \in (\lambda_*, \bar{\lambda}_*)$ 时, 特征方程 (3.23) 有纯虚特征值 $\mathrm{i}\omega$ 当且仅当

$$\omega = \omega_\lambda \equiv z_\lambda\eta_\lambda, \quad r = r_m^\lambda \equiv \frac{\theta_2^\lambda + 2m\pi}{\omega_\lambda}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.26}$$

以及

$$\theta_2^\lambda \in (0, \pi), \quad \psi_\lambda = c_\lambda\phi_* + z_\lambda\vartheta_\lambda.$$

引理 3.5 当 $\rho_1>\rho_2$, $\rho_1+\rho_2>0$ 且 $g'(0)>\gamma>0$, $\lambda\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$ 时, 有

(1)

$$\mathcal{P}_m(\lambda)=\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi}_\lambda\psi_\lambda dx+Dr_m^\lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\overline{\psi}_\lambda dx\neq 0; \tag{3.27}$$

(2) 对每一个 $m\in\mathbb{N}$, 纯虚特征值 $\mathrm{i}\omega_\lambda$ 是特征方程 (3.23) 的单重特征值;

(3)

$$\frac{d\mathcal{R}\mathrm{e}(\mu(r_m^\lambda))}{dr}>0,\quad (\lambda,m)\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)\times\mathbb{N}.$$

证明 首先, 运用反证法证明结论 (1). 假设存在序列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty\subseteq(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$, 使得 $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\lambda_*$ 且 $\mathcal{P}_m(\lambda_k)=0$, 则

$$\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi_{\lambda_k}}(x)\psi_{\lambda_k}(x)dx=-Dr_m^{\lambda_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^{\lambda_k}}\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}(\mathrm{e}^{\alpha x}u_{\lambda_k}^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_{\lambda_k})_x)_x\overline{\psi}_{\lambda_k}dx. \tag{3.28}$$

对上式等号两端同时取 $k\to\infty$, 有

$$\begin{aligned}\rho_0&=\lim_{k\to\infty}\int_0^L \mathrm{e}^{\gamma x}\overline{\psi_{\lambda_k}}(x)\psi_{\lambda_k}(x)dx\\&=-Dr_m^{\lambda_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1^{\lambda_k}}\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}(\mathrm{e}^{\alpha x}u_{\lambda_k}^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_{\lambda_k})_x)_x\overline{\psi}_{\lambda_k}dx\\&=(\theta_2+2m\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}\rho_1.\end{aligned}$$

注意到 $\theta_2\in(0,\pi)$, 产生矛盾. 结论 (1) 得证.

接下来, 验证纯虚特征值 $\mathrm{i}\omega_\lambda$ 是特征方程 (3.23) 的单重特征值. 假设 $\mathrm{i}\omega_\lambda$ 不是单重特征值, 则存在 $u\in C^1([-r_{m,\lambda},0],X_{\mathbb{C}}\setminus\{0\})$ 和常数 $k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\begin{aligned}&\dot{u}(\varpi)=\mathrm{i}\omega_\lambda u(\varpi)+k\psi_\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\lambda\varpi},\\&\mathrm{e}^{\alpha x}\dot{u}(0)=(\mathrm{e}^{\alpha x}u_x)_x(0)-\gamma\mathrm{e}^{\alpha x}u(0)+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}u(-r_m^\lambda))_x)_x\\&\qquad\quad+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x(0)+g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\mathrm{e}^{\alpha x}u(0).\end{aligned}\tag{3.29}$$

由 (3.29) 的第一个方程可得 $u(\varpi)=(k\varpi\psi_\lambda+z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\lambda\varpi}$, 将其代入 (3.29) 的第二个方程可得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\alpha x}(k\psi_\lambda+\mathrm{i}\omega_\lambda z)=&(\mathrm{e}^{\alpha x}z_x)_x-\gamma\mathrm{e}^{\alpha x}z+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}(-kr_m^\lambda\psi_\lambda+z))_x)_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}\\&+D(\mathrm{e}^{\alpha x}z(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x+g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\mathrm{e}^{\alpha x}z.\end{aligned}$$

将上式与 ψ_λ 作内积, 可得

$$\begin{aligned}k\langle\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda,\psi_\lambda\rangle=&\langle\psi_\lambda,(\mathrm{e}^{\alpha x}z_x)_x-\gamma\mathrm{e}^{\alpha x}z+D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}z)_x)_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}-\mathrm{i}\omega_\lambda\mathrm{e}^{\gamma x}z\rangle\\&+\langle\psi_\lambda,D(\mathrm{e}^{\alpha x}z(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)_x)_x+g'(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*)\mathrm{e}^{\alpha x}z\rangle\\&-k\langle\psi_\lambda,Dr_m^\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}\rangle\\=&\langle\mathcal{O}(\lambda,\mathrm{i}\omega_\lambda,r_m^\lambda)\psi_\lambda,z\rangle-k\langle\psi_\lambda,Dr_m^\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}\rangle\\=&-k\langle\psi_\lambda,Dr_m^\lambda(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}\rangle.\end{aligned}$$

由 (1) 可知 $k=0$, 故通过归纳演绎法得到 $\mathrm{i}\omega_\lambda$ 是单重特征值, 即结论 (2) 得证.

下面, 通过研究横截性条件来验证系统 (1.7) 在 $r_m^\lambda = (\theta_2^\lambda + 2m\pi)/\omega_\lambda$ 处是否发生 Hopf 分支. 由隐函数存在定理可知, 存在 $(r_m^\lambda, \mathrm{i}\omega_\lambda, \psi_\lambda)$ 的一个邻域 $O_m \times D_m \times H_m \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times X_\mathbb{C}$ 以及满足 $\mu(r_m^\lambda) = \mathrm{i}\omega_\lambda$ 和 $\psi(r_m^\lambda) = \psi_\lambda$ 的连续可微映射 (μ, ψ): $O_m \to D_m \times H_m$ 使得特征方程 (3.23) 在 D_m 内有唯一特征值 $\mu(r_m^\lambda)$ 且

$$\mathcal{O}(\lambda, \mu(r_m^\lambda), r_m^\lambda)\psi(r_m^\lambda) \equiv 0, \quad r \in O_m. \tag{3.30}$$

(3.30) 在 $r = r_m^\lambda$ 处微分, 可得

$$\mathcal{O}(\lambda, \mu(r_m^\lambda), r_m^\lambda)\frac{d\psi(r_m^\lambda)}{dr} = D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\mathrm{e}^{-\mu(r_m^\lambda)r_m^\lambda}\left[\mu(r_m^\lambda) + r_m^\lambda\frac{d\mu(r_m^\lambda)}{dr}\right]\psi_\lambda + \psi_\lambda\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{d\mu(r_m^\lambda)}{dr}.$$

将上式与 $\psi_\lambda(x)$ 作内积, 有

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu(r_m^\lambda)}{dr} &= -\frac{\langle\psi_\lambda, \mathrm{i}\omega_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\rangle}{\langle\psi_\lambda, \psi_\lambda\mathrm{e}^{\alpha x} + r_m^\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}D(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\rangle} \\
&= -\frac{\mathrm{i}\omega_\lambda D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\overline{\psi}_\lambda(x)dx}{\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}\overline{\psi}_\lambda\psi_\lambda dx + Dr_m^\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha x}(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x\overline{\psi}_\lambda dx} \\
&= -\frac{1}{|\mathcal{P}_m(\lambda)|^2}\left[\mathrm{i}\omega_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2^\lambda}\int_0^L\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha y}(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x(x)\overline{\psi}_\lambda(x)\psi_\lambda(y)\overline{\psi}_\lambda(y)dxdy\right. \\
&\quad \left. + \mathrm{i}r_m^\lambda\omega_\lambda\left|D\int_0^L(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x\overline{\psi}_\lambda(x)dx\right|^2\right].
\end{aligned}$$

根据 ψ_λ 和 r_m^λ 的表达式, 当 $\lambda \to \lambda_*$ 时, 得到

$$\theta_2^\lambda \to \theta_2 \in (0, \pi), \quad \psi_\lambda \to \phi_*, \quad \omega_\lambda r_m^\lambda \to \theta_2 + 2m\pi.$$

继而, 由 Lebesgue 控制收敛定理有下式成立:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{d\mathcal{R}\mathrm{e}(\mu(r_m^\lambda))}{dr}\cdot\frac{1}{z_\lambda^2} &= -\lim_{\lambda\to\lambda_*}\frac{\omega_\lambda\sin\theta_\lambda\int_0^L\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha y}(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x(x)\overline{\psi}_\lambda(x)\psi_\lambda(y)\overline{\psi}_\lambda(y)dxdy}{z_\lambda^2|\mathcal{S}_n(\lambda)|^2} \\
&= -\rho_1\sin\theta_2^2\lim_{\lambda\to\lambda_1}\frac{\int_0^L\int_0^L\mathrm{e}^{\alpha y}(\mathrm{e}^{\alpha x}u_\lambda^*(\mathrm{e}^{\alpha x}\psi_\lambda)_x)_x(x)\overline{\psi}_\lambda(x)\psi_\lambda(y)\overline{\psi}_\lambda(y)dxdy}{z_\lambda|\mathcal{S}_n(\lambda)|^2} \\
&= \frac{\rho_0\rho_1^2\sin\theta_2^2}{|\rho_0 - (\theta_2 + 2n\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}\rho_1|^2} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

定理得证. □

根据引理 3.4 和 3.5, 可以得到下面结论:

定理 3.7 当 $\rho_1 > \rho_2$, $\tau = 0$ 且 $g'(0) > \gamma > 0$, $\lambda \in (\lambda_*, \bar{\lambda}_*)$ 时, 有如下结论.

(1) 如果 $\rho_1 + \rho_2 < 0$, 则当 $\lambda \in (\lambda_*, \hat{\lambda})$ 时, 对所有的 $r \in [0, \infty)$, 特征方程 (3.23) 的所有特征值均具有负实部, 即非常数稳态解 u_λ^* 在 $(r, \lambda) = (0, \lambda_*)$ $(r \geqslant 0)$ 附近是局部渐近稳定的.

(2) 如果 $\rho_1 + \rho_2 > 0$, 则当 $\lambda \in (\lambda_*, \hat{\lambda})$ 时, 存在序列 $\{r_m^\lambda\}$ 和临界值 r_0^λ, 使得当 $r \in [0, r_0^\lambda)$ 时, 正稳态 u_λ^* 是线性稳定的; 当 $r \in (r_0^\lambda, \infty)$ 时, 正稳态 u_λ^* 是线性不稳定的, 且模型 (1.7) 在 r_m^λ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ 处发生 Hopf 分支.

3.3.2 模型应用以及对流参数 α 对 Hopf 分支的影响

本小节举一个具体的例子来验证在第 3.3.1 小节中相关 Hopf 分支的结论:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} - \alpha u_x - \gamma u + D(u(u(t-r))_x)_x + a u \mathrm{e}^{-pu}, \quad x \in (0, L), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

通过计算, 得到 $g(0) = 0$, $g'(0) = a > \delta$, $g''(0) = -2ap$. 此外, 对前面的结果进一步地计算, 可得

$$\begin{aligned} &\lambda_* = \lambda_*(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \phi_*(\alpha) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}x} \sin\frac{\pi}{L}x, \quad x \in (0, L), \\ &\rho_0(\alpha) = \int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*^2 dx = \int_0^L \sin^2\frac{\pi}{L}x dx = \frac{L}{2}, \\ &\rho_1(\alpha) = D\int_0^L \mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*(\mathrm{e}^{\alpha x}\phi_*)_x(\phi_*)_x dx \\ &\quad = D\int_0^L \left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}x}\sin\frac{\pi}{L}x\right)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}x}\sin\frac{\pi}{L}x\right)_x\left(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}x}\sin\frac{\pi}{L}x\right)_x dx \\ &\quad = \frac{D\pi^3}{L^3}(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}L}+1)\left(\frac{1}{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2}{L^2}} - \frac{24}{\alpha^2+\frac{36\pi^2}{L^2}}\right) \end{aligned} \tag{3.32}$$

以及

$$\begin{aligned} &\rho_2(\alpha) = \frac{g''(0)}{2}\int_0^L \mathrm{e}^{2\alpha x}\phi_*^3(x)dx = ap\int_0^L \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}x}\sin^3\frac{\pi}{L}x dx = -ap\frac{24\frac{\pi^3}{L^3}(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}L}+1)}{(\alpha^2+\frac{36\pi^2}{L^2})(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2}{L^2})}, \\ &\rho_1(\alpha) - \rho_2(\alpha) = ap\frac{\pi^3(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}L}+1)}{L^3(\alpha^2+\frac{36\pi^2}{L^2})(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2}{L^2})}\left(\frac{12D\pi^2}{L^2} - 5D\alpha^2 + 24ap\right), \\ &\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) = ap\frac{\pi^3(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}L}+1)}{L^3(\alpha^2+\frac{36\pi^2}{L^2})(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2}{L^2})}\left(\frac{12D\pi^2}{L^2} - 5D\alpha^2 - 24ap\right), \\ &\rho_1'(\alpha) = \frac{D\pi^3}{L^3}(\mathrm{e}^{\frac{\alpha L}{2}}+1)\left[\frac{L}{2}\left(\frac{1}{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2}{L^2}} - \frac{24}{\alpha^2+\frac{36\pi^2}{L^2}}\right) + \left(\frac{48\alpha}{(\alpha^2+\frac{36\pi^2}{L^2})^2} - \frac{\alpha}{2(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2}{L^2})^2}\right)\right], \\ &\rho_2'(\alpha) = \frac{24g\pi^3(\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}L}+1)}{L^3}\frac{(L(\alpha^2+\frac{36\pi^2}{L})(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2}{L^2})+32\alpha)}{(\alpha^2+\frac{36\pi^2}{L})^2(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi^2}{L^2})^2}, \\ &\frac{\rho_2(\alpha)}{\rho_1(\alpha)} = \frac{24g}{D(\frac{12\pi^2}{L^2}-5\alpha^2)}, \quad \left(\frac{\rho_2(\alpha)}{\rho_1(\alpha)}\right)' = \frac{240g\alpha}{D(\frac{12\pi^2}{L^2}-5\alpha^2)^2}, \\ &\cos\theta_2 = \frac{\rho_2(\alpha)}{\rho_1(\alpha)}, \quad (\theta_2)' = -\frac{1}{\sin\theta_2}\left(\frac{\rho_2(\alpha)}{\rho_1(\alpha)}\right)' = -\frac{\rho_1(\alpha)}{\sqrt{\rho_1^2(\alpha)-\rho_2^2(\alpha)}}\frac{240g\alpha}{D(\frac{12\pi^2}{L^2}-5\alpha^2)^2}, \\ &(\eta_*)'(\alpha) = (\rho_1(\alpha)\sin\theta_2(\alpha))' = \rho_1'(\alpha)\sin\theta_2(\alpha) + \rho_2(\alpha)\theta_2'(\alpha), \\ &\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)} z_\lambda'(\alpha) = \lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}\left(\frac{\rho_0(\lambda-\lambda_*(\alpha))}{\rho_1(\alpha)-\rho_2(\alpha)}\right)' + \lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)} o(z_\lambda(\alpha)) = -\frac{\alpha\rho_0}{2(\rho_1(\alpha)-\rho_2(\alpha))} < 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

于是, 由定理 3.7 可得如下结论:

推论 3.2 假设

$$\frac{12D\pi^2}{L^2} - 5D\alpha^2 - 24ap > 0, \quad \frac{12D\pi^2}{L^2} - 5D\alpha^2 + 24ap > 0, \quad \text{且} \quad g'(0) = a > \gamma > 0.$$

当 $\tau=0$ 时, 存在常数 $\bar{\lambda}_*>\lambda_*$, 使得当 $\lambda\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$ 时, 模型 (3.31) 存在序列 $\{r_m^\lambda\}$ 和临界值 r_0^λ, 使得当 $r\in[0,r_0^\lambda)$ 时, 正稳态 u_λ^* 是线性稳定的; 当 $r\in(r_0^\lambda,\infty)$ 时, 正稳态 u_λ^* 是线性不稳定的, 且模型 (3.31) 在 r_m^λ $(m=0,1,2,\ldots)$ 处发生 Hopf 分支.

接下来研究参数 α 对分支的影响. 记符号 $'$ 为关于参数 α 的导数.

命题 3.1 假设

$$\frac{12D\pi^2}{L^2}-5D\alpha^2-24ap>0,\quad \frac{12D\pi^2}{L^2}-5D\alpha^2+24ap>0,$$
$$\text{且}\quad g'(0)=a>\gamma>0,\quad g''(0)=-2ap\equiv\text{const}.$$

当 $\tau=0$ 时, 存在常数 $\bar{\lambda}_*>\lambda_*$, 使得当 $\lambda\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$ 时,

$$\frac{dr_0^\lambda(\alpha)}{d\alpha}>0.$$

证明 由 (3.26), (3.32) 和 (3.32) 可得

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda^2(\alpha)\frac{dr_0^\lambda(\alpha)}{d\alpha}&=\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda^2(\alpha)\frac{d(\frac{\theta_2^\lambda(\alpha)}{\omega_\lambda(\alpha)})}{d\alpha}\\&=\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda^2(\alpha)\frac{d(\frac{1}{z_\lambda(\alpha)}\frac{\theta_2^\lambda(\alpha)}{\frac{\omega_\lambda}{z_\lambda}(\alpha)})}{d\alpha}\\&=\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda^2(\alpha)\frac{d(\frac{1}{z_\lambda(\alpha)}\frac{\theta_2^\lambda(\alpha)}{\eta_\lambda(\alpha)})}{d\alpha}\\&=\frac{d(\frac{\theta_2(\alpha)}{\eta_*(\alpha)})}{d\alpha}\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda(\alpha)-\frac{\theta_2}{\eta_*}(\alpha)\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda'(\alpha).\end{aligned}$$

结合

$$\begin{aligned}\frac{d(\frac{\theta_2(\alpha)}{\eta_*(\alpha)})}{d\alpha}&=\frac{\theta_2'(\alpha)\eta_*(\alpha)-\theta_2(\alpha)\eta_*'(\alpha)}{\eta_*^2(\alpha)}\\&=\frac{-\frac{240g\alpha\rho_1(\alpha)}{D(\frac{12\pi^2}{L^2}-5\alpha^2)^2}-\theta_2(\alpha)(\rho_1'(\alpha)\sin\theta_2(\alpha)+\rho_2(\alpha)\theta_2'(\alpha))}{\rho_1^2(\alpha)\sin\theta_2^2(\alpha)}\end{aligned}$$

和 $g''(0)=-2ap\equiv\text{const}$ 以及 (3.32) 和 (3.33) 可知, 当 $\lambda\in(\lambda_*,\bar{\lambda}_*)$ 时, $\theta_2(\alpha)$, $\theta_2'(\alpha)$, $\sin\theta_2(\alpha)$, $\cos\theta_2(\alpha)$, $\rho_1(\alpha)$, $\rho_1'(\alpha)$, $\rho_2(\alpha)$, $\rho_2'(\alpha)$, $\eta_*(\alpha)$ 和 $\eta_*'(\alpha)$ 都是有界的. 因此, 可以推导出 $\frac{d(\frac{\theta_2(\alpha)}{\eta_*(\alpha)})}{d\alpha}$ 是有界的, 即

$$\frac{d(\frac{\theta_2(\alpha)}{\eta_*(\alpha)})}{d\alpha}\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda(\alpha)=0.$$

于是, 当 $\rho_1>\rho_2$ 时有

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda^2(\alpha)\frac{dr_0^\lambda(\alpha)}{d\alpha}&=\frac{d(\frac{\theta_2(\alpha)}{\eta_*(\alpha)})}{d\alpha}\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda(\alpha)-\frac{\theta_2}{\eta_*}(\alpha)\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda'(\alpha)\\&=-\frac{\theta_2}{\eta_*}(\alpha)\lim_{\lambda\to\lambda_*(\alpha)}z_\lambda'(\alpha)\\&=\frac{\alpha\rho_0\theta_2(\alpha)}{2\eta_*(\alpha)(\rho_1(\alpha)-\rho_2(\alpha))}\\&>0.\end{aligned}$$

因此, 由极限的保号性可知 $\frac{dr_0^\lambda(\alpha)}{d\alpha} > 0$. □

注 3.2 由上述分析可得, 对流参数 α 将会对分支的发生产生一定的影响. 由命题 3.1 可知, 在某些条件下, 参数 α 的引入会导致系统 (1.7) 发生 Hopf 分支的时滞临界值 r_0^λ 增大. 这也就是说, 在一定程度上 Hopf 分支更难发生. 有趣的是, 这种现象恰好与 Ma 和 Wei[11] 早期工作中无记忆扩散的结论相反.

致谢 作者非常感谢审稿人提出的宝贵意见, 这对稿件的修改和质量的提升非常有帮助.

参考文献

1 Abrahms B, Hazen E L, Aikens E O, et al. Memory and resource tracking drive blue whale migrations. Proc Natl Acad Sci USA, 2019, 116: 5582–5587

2 Fagan W F. Migrating whales depend on memory to exploit reliable resources. Proc Natl Acad Sci USA, 2019, 116: 5217–5219

3 Gu K, Niculescu S I, Chen J. On stability crossing curves for general systems with two delays. J Math Anal Appl, 2005, 311: 231–253

4 Guo S J. Stability and bifurcation in a reaction-diffusion model with nonlocal delay effect. J Differential Equations, 2015, 259: 1409–1448

5 Guo S J, Ma L. Stability and bifurcation in a delayed reaction-diffusion equation with dirichlet boundary condition. J Nonlinear Sci, 2016, 26: 545–580

6 Gurney W S C, Blythe S P, Nisbet R M. Nicholson's blowflies revisited. Nature, 1980, 287: 17–21

7 Hess P, Kato T. On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function. Comm Partial Differential Equations, 1980, 5: 999–1030

8 Ma L, Guo S J. Stability and bifurcation in a diffusive Lotka-Volterra system with delay. Comput Math Appl, 2016, 72: 147–177

9 Ma L, Guo S J. Bifurcation and stability of a two-species diffusive Lotka-Volterra model. Commun Pure Appl Anal, 2020, 19: 1205–1232

10 Ma L, Wang H T, Gao J P. Dynamics of two-species Holling type-II predator-prey system with cross-diffusion. J Differential Equations, 2023, 365: 591–635

11 Ma L, Wei D. Hopf bifurcation of a delayed reaction-diffusion model with advection term. Nonlinear Anal, 2021, 212: 112455

12 Nicholson A J. An outline of the dynamics of animal populations. Aust J Zool, 1954, 2: 9–65

13 Shi J P, Wang C C, Wang H. Diffusive spatial movement with memory and maturation delays. Nonlinearity, 2019, 32: 3188–3208

14 Shi J P, Wang C C, Wang H, et al. Diffusive spatial movement with memory. J Dynam Differential Equations, 2020, 32: 979–1002

15 So J-W H, Wu J H, Yang Y J. Numerical steady state and Hopf bifurcation analysis on the diffusive Nicholson's blowflies equation. Appl Math Comput, 2000, 111: 33–51

16 So J-W H, Yu J S. Global attractivity and uniform persistence in Nicholson's blowflies. Differ Equ Dyn Syst, 1994, 2: 11–18

17 Song Y, Wu S, Wang H. Spatiotemporal dynamics in the single population model with memory-based diffusion and nonlocal effect. J Differential Equations, 2019, 267: 6316–6351

18 Tang D, Chen Y M. Global dynamics of a Lotka-Volterra competition-diffusion system in advective homogeneous environments. J Differential Equations, 2020, 269: 1465–1483

19 Tang D, Chen Y M. Global dynamics of a Lotka-Volterra competition-diffusion system in advective heterogeneous environments. SIAM J Appl Dyn Syst, 2021, 20: 1232–1252

20 Tang D, Chen Y M. Predator-prey systems in open advective heterogeneous environments with Holling-Tanner interaction term. J Differential Equations, 2022, 334: 280–308

21 Tang D, Zhou P. On a Lotka-Volterra competition-diffusion-advection system: Homogeneity vs heterogeneity. J Differential Equations, 2020, 268: 1570–1599

On the bifurcation for a diffusive model with memory delay in an advective environment

Li Ma & Dan Wei

Abstract In this paper, we propose and study a class of memory-based reaction-diffusion biological population models with double time delays. By using the Lyapunov-Schmidt reduction method, we obtain the existence, uniqueness, and multiplicity of the non-homogeneous steady-state solutions. Next, by analyzing the characteristic equation, we derive the local stability of the steady-state solution and sufficient conditions for Hopf bifurcation to occur. Under some special conditions, the first critical value r_0^λ for Hopf branch occurrence will increase as the advection term α increases, i.e., the advective effect has decelerated the generation of Hopf bifurcation to a certain extent.

Keywords **reaction-diffusion-advection model, bifurcation, Lyapunov-Schmidt reduction, double time delays**

MSC(2020) **92B05, 35B40, 35K57**

doi: 10.1360/SSM-2024-0103