中国科学: 数学 2025 年 第 55 卷 第 2 期: 323 ~ 342
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

箱约束的联合估计 - 鲁棒性投资组合选择问题

献给韩继业教授 90 寿辰

王英晓, 孔令臣*

北京交通大学数学与统计学院, 北京 100044
E-mail: wangyingxiao@bjtu.edu.cn, lchkong@bjtu.edu.cn

收稿日期: 2024-04-27; 接受日期: 2024-11-30; 网络出版日期: 2025-01-07; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12071022) 资助项目

摘要 投资组合优化问题中的输入参数大多是由历史数据估计而来, 估计的不确定性可能对 Markowitz 投资组合模型产生巨大的影响. 近期, 一个联合估计与鲁棒性的优化框架 (joint estimation and robustness optimization, JERO) 被提出, 通过结合参数估计和优化问题以减弱估计不确定性对优化问题的影响. JERO 框架被应用到投资组合优化领域 (JERO with the mean return and the risk (variance) constraints, JERO-MV), 同时考量了投资组合模型中有价值的两个度量: 投资组合的回报和风险. 但该模型可能会导致投资组合过分集中于某几个资产, 这将增加投资风险和成本. 本文在 JERO-MV 模型的基础上增加分散化约束, 并给出该模型的可行性条件. 本文在真实数据集上进行了大量的数值实验, 并与 JERO-MV 模型进行对比. 在大多数情形下, 我们的模型都有更好的样本外表现.

关键词 投资组合优化 参数估计 联合估计和鲁棒性 分散化约束

MSC (2020) 主题分类 60A05, 60F99, 90B50, 90C17, 90C22

1 引言

投资组合优化的根本目标是在参数不确定的情形下决定下一个财务周期的资产配置, 以达到收益最大化和风险控制. 投资组合优化问题的数学模型最早由 Markowitz [14] 提出, 即所谓的均值 - 方差投资组合模型. 该模型在理性投资者的假设下, 以收益的均值和方差作为投资的基准. 均值 - 方差投资组合模型需要根据历史数据估计风险资产收益的均值和方差, 作为输入参数. 然而, 历史数据不能精准预测未来的发展趋势, 这必然导致根据历史数据的估计值与未来真实值是有偏差的. 而均值 - 方差投资组合优化问题非常容易受到输入参数波动的影响, 即使波动很小 (参见文献 [5, 7]). 因此, 研究人员必须考虑如何减轻参数估计固有的不准确性对均值 - 方差模型的影响.

近二十年来, 鲁棒优化框架被广泛应用到处理不确定性问题中. 鲁棒优化框架需要构建一个不确定集, 该不确定集包含了所需参数的所有可能的值, 这些值与真实值之间有一定的偏差. 目前常用的

英文引用格式: Wang Y X, Kong L C. Portfolio selection by joint estimation and robustness optimization with a box constraint (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 323–342, doi: 10.1360/SSM-2024-0130

© 2025《中国科学》杂志社

不确定集有两种: 椭球不确定集 (参见文献 [1,2,8–11]) 和箱不确定集 (参见文献 [10,18]). 鲁棒优化框架通常被转化为易于求解的形式, 如二阶锥优化问题和半定规划问题. 然而, 鲁棒优化框架需要提前定义不确定集并给定其大小. 鲁棒优化技术的表现严重依赖于不确定集的定义和大小. 正如 Bertsimas 等 [3] 及 Bertsimas 和 Sim [4] 提出的: 定义或者大小不合适的不确定集时常会导致难以计算或过于保守的投资组合模型. 在量化金融领域, Kang 等 [12] 及 Butler 和 Kwon [6] 指出, 定义一个大小合适的不确定集仍然是亟待解决的问题.

为克服鲁棒优化框架的局限性, Zhu 等 [20] 提出了一类联合估计和鲁棒性优化 (joint estimation and robustness optimization, JERO) 框架. JERO 框架将参数估计问题与优化问题结合, 基于参数估计的精度建立参数的不确定集. 尽管 JERO 框架是基于鲁棒优化框架发展而来的, 但 JERO 框架与鲁棒优化框架有两大不同之处: (1) JERO 框架无需提前给定不确定集的大小; JERO 框架是寻找一个尽可能大的不确定集, 而在鲁棒优化框架中提前给定不确定集的大小是必需的. (2) JERO 框架将参数估计与优化问题结合, 而鲁棒优化问题是先估计参数, 然后代入到优化模型中求解. 在约束函数均为鞍函数时, 即约束函数关于一个变量为凸函数, 关于另一个变量为凹函数, Zhu 等 [20] 提出的 JERO 框架可以等价转化为二阶锥优化问题. 然而, 在投资组合优化问题中需要考虑两个有价值的因素: 投资组合的回报和风险. Wang 等 [19] 在 JERO 框架下增加了对投资组合风险的约束 (JERO with the mean return and the risk (variance) constraints, JERO-MV), 该风险约束函数并不是鞍函数. 他们将 JERO-MV 模型转化为可处理的形式, 并通过二分法来求解转化后的模型. 但是, Wang 等 [19] 的工作得到的投资组合可能会过分集中于某几个资产, 投资的分散化程度低, 从而降低抵御市场风险的能力. 因此, 本文考虑在 JERO-MV 模型的基础上增加分散化约束, 避免资产过于集中. 由于模型含有多个约束, 我们需要考虑是否存在一个投资组合可以同时满足鲁棒回报和风险约束. 因此, 本文分析了模型的可行性条件, 并采用二分法, 求解一系列可行问题. 为了验证模型和算法的有效性, 本文在真实数据集上进行了大量的数值实验, 与 JERO-MV 模型的数值效果进行对比, 同时也对比了不同上界约束下的投资组合表现.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节介绍 JERO 框架和 JERO-MV 模型. 第 3 节提出本文的模型, 给出可行性分析和求解算法. 第 4 节考察所提出模型和算法的数值表现, 在真实数据集上建立数值实验, 并与 JERO-MV 模型进行对比分析. 第 5 节总结本文工作和未来的研究方向.

为叙述方便, 以下对文中出现的符号进行说明. $\mathbb{R}_+$ 表示非负实数空间. $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 分别表示 n 维实数向量空间和 $n\times n$ 维矩阵空间. 用黑斜体小写字母表示向量, 如 $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$ 表示由 n 个元素 w_i, $i=1,\ldots,n$ 表示的列向量. $\boldsymbol{w}^\top$ 表示 $\boldsymbol{w}$ 的转置, 是一个行向量. 特别地, $\mathbf{1}_n$ 表示所有元素全为 1 的 n 维向量. $\|\boldsymbol{w}\|_2$ 表示 $\boldsymbol{w}$ 的 Euclid 范数. $\mathbb{S}_+^n$ 表示半正定锥, 即任意 $A\in\mathbb{S}_+^n$, A 是半正定矩阵, 表示为 $A\succeq 0$. $A\succ 0$ 表示 A 是正定矩阵.

2 预备知识

本节简要回顾 Markowitz 提出的均值 - 方差投资组合模型, 并介绍其 JERO 框架和 JERO-MV 模型的具体表达式.

2.1 Markowitz 投资组合模型

1952 年, Markowitz [14] 提出的均值 - 方差投资组合模型, 是一个多目标优化问题, 具体如下:

$$\begin{aligned} &\max\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\top}\boldsymbol{w}\\ &\min\ \boldsymbol{w}^{\top}\widehat{\Omega}\boldsymbol{w}\\ &\text{s.t.}\ \ \mathbf{1}_n^{\top}\boldsymbol{w}=1,\\ &\qquad \boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$ 是决策变量, 期望回报向量 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}\in\mathbb{R}^n$ 和回报的协方差矩阵 $\widehat{\Omega}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是输入参数. 为了便于求解和更贴合实际投资需求, 研究者将模型 (2.1) 变形, 并引入实际投资需要的约束条件 (如对某些资产做空 ($w_i<0$) 时常是不被允许的). 下面列举出两种常用的变形:

(1) 最大化投资回报的均值 - 方差投资组合模型

$$\begin{aligned} Z=\max_{\boldsymbol{w}}\ &\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\top}\boldsymbol{w}\\ \text{s.t.}\ &\boldsymbol{w}^{\top}\widehat{\Omega}\boldsymbol{w}\leqslant\tau_{\sigma}^2,\\ &\mathbf{1}_n^{\top}\boldsymbol{w}=1,\\ &\boldsymbol{w}\in G; \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2) 最小化投资风险的均值 - 方差投资组合模型

$$\begin{aligned} C=\min_{\boldsymbol{w}}\ &\boldsymbol{w}^{\top}\widehat{\Omega}\boldsymbol{w}\\ \text{s.t.}\ &\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\top}\boldsymbol{w}\geqslant\tau_{\beta},\\ &\mathbf{1}_n^{\top}\boldsymbol{w}=1,\\ &\boldsymbol{w}\in G, \end{aligned} \tag{2.3}$$

更多的变形可以参见文献 [15]. 以上两个模型中, $\tau_{\sigma}^2\in\mathbb{R}_+$ 和 $\tau_{\beta}\in\mathbb{R}$ 分别是可接受的最大风险和最小回报, G 是如限制做空 ($w_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,n$) 等约束的集合. 以上两个模型可以满足不同投资风格的投资者. 模型 (2.2) 更适合看重控制投资风险的投资者, 模型 (2.3) 更适合看重投资回报的投资者. 输入参数 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}\in\mathbb{R}^n$ 和 $\widehat{\Omega}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 需要通过历史数据进行估计.

2.2 JERO 框架

给定数据集 $\mathcal{D}=\{\boldsymbol{z}_t\}_{t=1}^N$, 其中 $\boldsymbol{z}_t^{\top}=[z_{1t},\ldots,z_{nt}]$. 我们通过求解如下问题获得关于参数 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}=\arg\min\ \{\rho(\boldsymbol{\beta};\mathcal{D})\mid\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n\}, \tag{2.4}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{\beta};\mathcal{D})$ 是估计度量, 如最小二乘估计 (ordinary least squares estimation, OLSE) 和最大似然估计 (maximum likelihood estimation, MLE). 在最小二乘估计中, ρ 表示估计误差的平方和. 在最大似然估计中, ρ 表示关于回报均值和协方差的对数似然函数. 结合参数估计度量, 可定义如下估计不确定集 (参见文献 [20]):

$$\mathcal{E}(r;\mathcal{D})\triangleq\{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n\mid\rho(\boldsymbol{\beta};\mathcal{D})\leqslant\widehat{\rho}+r\}, \tag{2.5}$$

其中 $\widehat{\rho}=\rho(\widehat{\boldsymbol{\beta}};\mathcal{D})$ 是问题 (2.4) 目标函数的最小值, $r\in\mathbb{R}_+$ 是与最优值 $\widehat{\rho}$ 的距离.

接下来介绍 JERO 框架中的鲁棒约束, 进而给出广义的 JERO 框架形式.

假设存在函数 $a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\beta}):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 对给定的 $\tau\in\mathbb{R}$, 满足 $a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\beta})\leqslant\tau$. 该约束的鲁棒形式为: 对任意的 $\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{E}(r;\mathcal{D})$, $a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\beta})\leqslant\tau$ 都成立, 即

$$\max\{a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\beta})\mid\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{E}(r;\mathcal{D})\}\leqslant\tau. \tag{2.6}$$

广义的 JERO 框架 [20] 可以表示如下:

$$\begin{aligned}(\text{JERO})\quad \max_{r,\boldsymbol{w}}\ & r\\ \text{s.t.}\ & a_i(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\beta})\leqslant\tau_i,\quad\forall\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{E}(r;\mathcal{D}),\quad i=1,\dots,k,\\ & \boldsymbol{w}\in G,\\ & r\in\mathbb{R}_+.\end{aligned} \tag{2.7}$$

JERO 框架中的目标函数是最大化不确定集的大小, 其目标是找到一个在尽可能大的不确定集中仍能保持可行的最优解 $\boldsymbol{w}$.

上述 JERO 框架通常是难以处理的. Zhu 等 [20] 假设约束函数 $a_i(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\beta})$ 为鞍函数 (即关于 $\boldsymbol{w}$ 是凸函数, 关于 $\boldsymbol{\beta}$ 是凹函数). 在此假设下, 他们给出了 JERO 框架的可处理形式. 他们将 JERO 框架应用到投资组合优化问题 (参见文献 [20, 例 2]), 即 $k=1$, $a_1(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\beta})=-\boldsymbol{\beta}^\top\boldsymbol{w}\leqslant-\tau_\beta$ 表示投资组合的负的期望回报约束. 因为 $a_1(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\beta})$ 关于 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 是鞍函数, 该鲁棒回报约束可以转化为如下可处理形式:

$$a_1(\boldsymbol{w})=-\widehat{\boldsymbol{\beta}}^\top\boldsymbol{w}+\sqrt{\mathrm{e}^{2r}-1}\|\widehat{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{w}\|_2+\tau_\beta. \tag{2.8}$$

这里, (2.8) 不涉及不确定参数 $\boldsymbol{\beta}$, 因此将转化后的形式记为 $a_1(\boldsymbol{w})$. 正如 Markowitz 模型中所展示的, 对于投资组合, 回报和风险都是需要考量的重要因素. Wang 等 [19] 建立了同时考量投资组合的回报和风险的 JERO 框架. 假设数据服从均值和协方差分别为 $(\boldsymbol{\beta},\Omega)$ 的多元正态分布. 假设协方差矩阵 Ω 是正定的. 均值对数似然函数为

$$l(\boldsymbol{\beta},\Omega;\mathcal{D})=-\frac{1}{2}\bigg(n\ln(2\pi)+\ln\det\Omega+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{\beta})^\top\Omega^{-1}(\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{\beta})\bigg). \tag{2.9}$$

给定 $\boldsymbol{\beta}$, 最优对数似然估计为 $\max_{\Omega\in\mathbb{S}_+^n}l(\boldsymbol{\beta},\Omega;\mathcal{D})$. 相应的估计度量为

$$\rho(\boldsymbol{\beta};\mathcal{D})=\min_{\Omega\in\mathbb{S}_+^n}\frac{1}{2}\bigg(\ln\det\Omega+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{\beta})^\top\Omega^{-1}(\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{\beta})\bigg). \tag{2.10}$$

直接求解模型 (2.10), 可得到

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{z}_i,\quad\widehat{\Omega}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(\boldsymbol{z}_i-\widehat{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{z}_i-\widehat{\boldsymbol{\beta}})^\top, \tag{2.11}$$

最优估计度量为 $\widehat{\rho}=\frac{1}{2}(\ln\det\widehat{\Omega}+n)$. 记矩阵 $\widehat{\Omega}$ 是正定矩阵, 则存在一个正定矩阵 $\widehat{\Omega}^{1/2}$, 使得

$$\widehat{\Omega}^{1/2}\widehat{\Omega}^{1/2}=\widehat{\Omega}.$$

由文献 [20, 命题 6], $\rho(\boldsymbol{\beta};\mathcal{D})$ 可有如下表示:

$$\rho(\boldsymbol{\beta};\mathcal{D})=\frac{1}{2}(n+\ln\det\widehat{\Omega}+\ln(1+(\boldsymbol{\beta}-\widehat{\boldsymbol{\beta}})^{\top}\widehat{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\widehat{\boldsymbol{\beta}}))). \tag{2.12}$$

因此, 估计不确定集为

$$\mathcal{E}(r;\mathcal{D})=\{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n\mid(\boldsymbol{\beta}-\widehat{\boldsymbol{\beta}})^{\top}\widehat{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\widehat{\boldsymbol{\beta}})\leqslant \mathrm{e}^{2r}-1\} \tag{2.13}$$

是一个闭凸集. 鲁棒的风险约束为

$$a_2(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{w}^{\top}\Omega_{\beta}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^{\top}\widehat{\Omega}\boldsymbol{w}+(\boldsymbol{\beta}-\widehat{\boldsymbol{\beta}})^{\top}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\top}(\boldsymbol{\beta}-\widehat{\boldsymbol{\beta}})\leqslant\tau_{\sigma}^2,\quad\forall\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{E}(r;\mathcal{D}). \tag{2.14}$$

上式可等价地转化为如下可处理形式 [19]:

$$a_2(\boldsymbol{w})=\mathrm{e}^{2r}\|\widehat{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{w}\|^2-\tau_{\sigma}^2\leqslant 0. \tag{2.15}$$

2.3 分散化约束

Markowitz 模型得到的投资组合可能会过分集中于某些高回报的资产 (参见文献 [13, 16]). 为了克服这一不足, 投资者通常会在模型中增加对投资权重的限制, 从而实现分散化投资, 降低投资风险. 接下来将回顾几种常用的分散化约束 [13]. 本文所考虑的投资组合优化问题都带有约束 $\mathbf{1}_n^{\top}\boldsymbol{w}=1$ 和 $w_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,n$.

(1) 权重上界约束. 增加投资权重的上界约束可以避免投资组合过于集中到某几个资产. 该约束表示如下:

$$\max(\boldsymbol{w})\leqslant U_w. \tag{2.16}$$

上界 U_w 越小, 则得到的投资组合分散化程度越高. 当 $U_w=\frac{1}{n}$ 时, 得到的投资组合为等权重投资组合. 当 $U_w=1$ 时, 上界约束是冗余的. 因此, U_w 的取值范围为 $[\frac{1}{n},1]$.

(2) 权重下界约束. 增加投资权重的下界约束也可以避免投资组合资产过于集中. 该约束表示如下:

$$\min(\boldsymbol{w})\geqslant L_w. \tag{2.17}$$

下界 L_w 越大, 则得到的投资组合分散化程度越高. 当 $L_w=\frac{1}{n}$ 时, 得到的投资组合为等权重投资组合. 当 $L_w=0$ 时, 下界约束是冗余的. 因此, L_w 的取值范围为 $[0,\frac{1}{n}]$.

(3) L^p- 范数约束. 给定 $p>1$, 增加对权重的 L^p- 范数的上界, 具体形式如下:

$$N(\boldsymbol{w})=\sum_{i=1}^{n}|w_i|^p\leqslant U_N. \tag{2.18}$$

当 $\boldsymbol{w}$ 中只有一个元素为 1、其余元素均为 0 时, $N(\boldsymbol{w})$ 取得最大值 1. 当对于所有的 i 都有 $w_i=\frac{1}{n}$ 时, $N(\boldsymbol{w})$ 取得最小值 n^{1-p}. 因此, U_N 的取值范围为 $[n^{1-p},1]$.

(4) 熵约束. 增加对投资组合 $\boldsymbol{w}$ 的熵 $E(\boldsymbol{w})$ 的下界约束, 具体形式如下:

$$E(\boldsymbol{w})=-\sum_{i=1}^{n}w_i\ln w_i\geqslant L_E. \tag{2.19}$$

当 $\boldsymbol{w}$ 中只有一个元素为 1、其余元素均为 0 时, $E(\boldsymbol{w})$ 取得最小值 0. 当对于所有的 i 都有 $w_i = \frac{1}{n}$ 时, $N(\boldsymbol{w})$ 取得最大值 $\ln n$. 因此, U_N 的取值范围为 $[0, \ln n]$.

下面对 4 种分散化约束的优点和局限性进行讨论.

权重上界约束通过设置每个资产的权重上界, 防止投资过度集中于少数资产, 降低了单一资产对投资组合的影响. 对于投资者而言, 权重上界约束是相对直观的, 投资者可以根据其投资偏好或法规要求合理设定权重上界. 同时, 投资者可以精准控制每个资产的最大投资比例, 由于权重上界约束是线性的, 其计算复杂度较低. 但当资产数量很大时, 约束条件的数量也会大大增加. 若资产权重的上界设置过低, 则可能会导致组合中资产配置过于平均, 削弱了高回报资产的作用, 从而限制了投资表现.

权重下界约束通过设置每个资产的权重下界, 使每个资产都投资一定的权重, 避免了重要但可能被低估的资产被忽略. 同权重上界约束, 权重下界约束也是相对直观和易于操作的. 但当权重下界设置过高时, 可能导致组合中资产分配过度分散, 从而影响整体的投资表现.

L^p $(p > 1)$ 范数约束可以减少极端权重的出现, 避免权重过于集中在少数资产上, 从而促进投资组合的分散化. 投资者应根据实际需求进行选择, 其计算复杂度取决于所选择的范数. 随着 p 的增大, 权重分配更加均匀, 一方面可能会削弱优质资产的影响; 另一方面也会大幅增加模型的计算复杂度, 尤其是当资产数量很大时. 此外, 不同于权重上界和下界约束, L^p $(p > 1)$ 范数约束不能精确控制单个资产权重的上界和下界. 对于许多投资者而言, 难以直观理解 L^p $(p > 1)$ 范数约束对投资组合的具体影响, 相较于设定投资权重的上界和下界, L^p $(p > 1)$ 范数约束上界更难合理给定.

熵约束通过限制投资组合的熵值, 可以有效控制组合内的资产不会过于集中, 熵值越大, 分散化程度越高, 但也可能将权重分配给表现一般的资产, 而削弱优质资产的影响. 同 L^p $(p > 1)$ 范数约束, 增加熵约束会大大增加模型的计算复杂度和理解的难度, 并且想要给定一个合理的熵值的界限也是很困难的.

3 箱约束的联合估计 - 鲁棒性投资组合选择模型

本节主要介绍带投资组合回报和风险, 以及资产权重箱约束的联合估计 - 鲁棒性投资组合优化 (JERO with the return, risk and weight box constraints, JERO-MVB) 模型. 首先给出该模型的具体形式, 并将模型转化为可求解的优化模型. 然后, 设计一个二分法来求解模型, 给出算法的框架以及解的存在性分析.

3.1 模型

对于模型 (2.2), 其对应带箱约束的 JERO 投资组合选择模型如下:

$$\begin{aligned} \max_{r,\boldsymbol{w}} \ & r \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{w} \geqslant \tau_\beta, \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{E}(r; \mathcal{D}), \\ & \boldsymbol{w}^\top \Omega_\beta \boldsymbol{w} \leqslant \tau_\sigma^2, \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{E}(r; \mathcal{D}), \\ & \mathbf{1}_n^\top \boldsymbol{w} = 1, \\ & l_i \leqslant w_i \leqslant u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $l_i \in \mathbb{R}$ 和 $u_i \in \mathbb{R}_+$ 分别是给定的投资组合权重的下界和上界.

可以将模型 (3.1) 转化为如下可处理形式:

$$\begin{aligned}&\max_{r,\boldsymbol{w}} r\\ &\text{s.t. } -\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\top}\boldsymbol{w}+\sqrt{\mathrm{e}^{2r}-1}\|\widehat{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{w}\|_2+\tau_\beta\leqslant 0,\\ &\quad -\tau_\sigma^2+\mathrm{e}^{2r}\boldsymbol{w}^{\top}\widehat{\Omega}\boldsymbol{w}\leqslant 0,\\ &\quad \mathbf{1}_n^{\top}\boldsymbol{w}=1,\\ &\quad l_i\leqslant w_i\leqslant u_i,\quad i=1,2,\ldots,n,\\ &\quad r\in\mathbb{R}_+.\end{aligned}\tag{3.2}$$

尽管模型 (3.2) 关于变量 r 和 $\boldsymbol{w}$ 不是联合凸的, 但是当任意给定 $r\in\mathbb{R}$ 时, 模型 (3.2) 是关于变量 $\boldsymbol{w}$ 的凸问题. 因此, 可以通过求解一系列如下子问题来得到最优解:

$$\begin{aligned}Z_E^r(\tau_\beta)=\min_{\boldsymbol{w}}\ &-\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\top}\boldsymbol{w}+\sqrt{\mathrm{e}^{2r}-1}\|\widehat{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{w}\|_2+\tau_\beta\\ \text{s.t. }&-\tau_\sigma^2+\mathrm{e}^{2r}\boldsymbol{w}^{\top}\widehat{\Omega}\boldsymbol{w}\leqslant 0,\\ &\mathbf{1}_n^{\top}\boldsymbol{w}=1,\\ &l_i\leqslant w_i\leqslant u_i,\quad i=1,2,\ldots,n.\end{aligned}\tag{3.3}$$

$-\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\top}\boldsymbol{w}+\sqrt{\mathrm{e}^{2r}-1}\|\widehat{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{w}\|_2+\tau_\beta\leqslant 0$ 可以重写为

$$S(\boldsymbol{w})\triangleq\frac{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\top}\boldsymbol{w}-\tau_\beta}{\|\widehat{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{w}\|_2}\geqslant\sqrt{\mathrm{e}^{2r}-1},$$

其中 $S(\boldsymbol{w})$ 为 Sharpe 比率. Sharpe 比率由 Sharpe [17] 提出, 是投资绩效评价指标, 可以对收益与风险综合考虑. 结合模型 (3.2) 和 (3.3), 本文的 JERO 模型 (3.1) 等价于在一定的风险水平下, 最大化 Sharpe 比率. 结合算法 1, 在最优解 r^* 和 $\boldsymbol{w}^*$ 处, 目标函数通常更趋近于 0, 而最优解 $\boldsymbol{w}^*$ 可能在可行域的内部取到. 因此在最优解处, 得到的投资组合的风险可能比 τ_σ^2 更小. 所以, 模型 (3.3) 适合看重风险控制的投资者.

算法 1 二分法 (BS) 求解模型 (3.2)

1. 初始化: $\boldsymbol{w}_0\in\mathbb{R}^n$, $r_1=0$, $r_2\in\mathbb{R}_+$ 和 $\Delta\in\mathbb{R}_+$. 令 $k:=0$.
2. 若 $r_2-r_1\leqslant\Delta$, 则停止; 否则, 转步 3.
3. 令 $r:=(r_1+r_2)/2$. 求解模型 (3.3), 得到最优解 $\boldsymbol{w}$.
4. 若 $Z_E^r(\tau_\beta)\leqslant 0$, 则更新 $r_1:=r$; 否则, 更新 $r_2:=r$.
5. 转步 2.

我们也可以将求解模型 (3.2) 转化为求解一系列如下子问题:

$$\begin{aligned}Z_E^r(\tau_\beta)=\min_{\boldsymbol{w}}\ &-\tau_\sigma^2+\mathrm{e}^{2r}\boldsymbol{w}^{\top}\widehat{\Omega}\boldsymbol{w}\\ \text{s.t. }&-\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\top}\boldsymbol{w}+\sqrt{\mathrm{e}^{2r}-1}\|\widehat{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{w}\|_2+\tau_\beta\leqslant 0,\\ &\mathbf{1}_n^{\top}\boldsymbol{w}=1,\\ &l_i\leqslant w_i\leqslant u_i,\quad i=1,2,\ldots,n.\end{aligned}\tag{3.4}$$

$-\tau_\sigma^2 + \mathrm{e}^{2r}\boldsymbol{w}^\top\widehat{\Omega}\boldsymbol{w} \leqslant 0$ 可以重写为 $\tau_\sigma^2/\boldsymbol{w}^\top\widehat{\Omega}\boldsymbol{w} \geqslant \mathrm{e}^{2r}$. 因此结合模型 (3.2) 和 (3.4), 本文的 JERO 模型 (3.1) 等价于在一定的 Sharpe 比率水平下, 最小化投资风险. 同样地, 在最优解 r^* 和 $\boldsymbol{w}^*$ 处, 目标函数通常更趋近于 0, 而最优解 $\boldsymbol{w}^*$ 可能在可行域的内部取到. 因此在最优解处, 得到的投资组合的 Sharpe 比率可能更大, 即收益比 τ_β 更高. 所以, 模型 (3.4) 适合追求收益的投资者.

3.2 算法

在模型 (3.2) 中, 目标回报 τ_β 和目标风险 τ_σ^2 需要提前给定. 下面给出 τ_β 的上界和 τ_σ^2 的下界, 以保证模型 (3.2) 是可行的.

考虑如下投资组合优化模型:

$$\begin{aligned} C_0 = \min_{\boldsymbol{w}}\ & \boldsymbol{w}^\top\widehat{\Omega}\boldsymbol{w} \\ \text{s.t. } & \widehat{\boldsymbol{\beta}}^\top\boldsymbol{w} \geqslant 0, \\ & \mathbf{1}_n^\top\boldsymbol{w} = 1, \\ & l_i \leqslant w_i \leqslant u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.5}$$

模型 (3.5) 的最优值 C_0^* 是 $\tau_\beta = 0$ 时 $\boldsymbol{w}^\top\widehat{\Omega}\boldsymbol{w}$ 的下界.

定理 3.1 记 C_0^* 和 Z^* 分别是模型 (3.5) 和 (2.2) 的最优值, 其中, 模型 (2.2) 中 $G = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \mid l_i \leqslant w_i \leqslant u_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$. 当给定的目标回报和风险分别满足 $\tau_\sigma^2 \geqslant \mathrm{e}^{2r}C_0^*$ 和 $\tau_\beta \leqslant Z^*$ 时, 模型 (3.2) 是可行的.

证明 由模型 (3.2) 中的风险约束和模型 (3.5) 可得

$$\tau_\sigma^2 \geqslant \mathrm{e}^{2r}\boldsymbol{w}^\top\widehat{\Omega}\boldsymbol{w} \geqslant \mathrm{e}^{2r}C_0^*.$$

结合 τ_σ^2 的下界, 投资者根据自己的投资偏好设定 τ_σ^2 的值, 并代入到模型 (2.2) 中, 得到最优值 Z^*, 可作为 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^\top\boldsymbol{w}$ 的上界, 即 $\tau_\beta \leqslant Z^*$. □

结合上述模型转化和分析, 我们提出如下算法求解模型 (3.2).

注 3.1 在算法 1 中, 若 r_2 的初始值设置过大, 则势必会增加计算成本. 因此, 需要选定一个合理的 r_2 的初始值, 并且满足 $Z_E^{r_2}(\tau_\beta) \geqslant 0$. 具体地, 先给定一个较小的 r_2, 代入模型 (3.3) 中计算得到 $Z_E^{r_2}(\tau_\beta)$ 的值. 若 $Z_E^{r_2}(\tau_\beta) < 0$, 则根据其与 0 的距离适当增加 r_2, 即 $Z_E^{r_2}(\tau_\beta)$ 与 0 相差越大, 则对 r_2 扩大越多, 得到新的 r_2'; 反之, 若 $Z_E^{r_2}(\tau_\beta) > 0$, 则根据其与 0 的距离适当减小 r_2, 即 $Z_E^{r_2}(\tau_\beta)$ 与 0 相差越大, 则对 r_2 减小越多, 得到新的 r_2'. 重复上述过程, 直到得到的新的 r_2', 满足 $Z_E^{r_2'}(\tau_\beta) \geqslant 0$.

4 数值实验

本节为验证本文模型和算法的有效性, 在真实数据集上进行了大量的数值实验. 首先介绍本文的数据集和评估方法.

4.1 评估方法

本小节选取 6 个常用市场指数的股票集合, 分别为道琼斯工业平均指数 (Dow Jones Industrial Average Index, DJIA)、恒生指数 (Hangseng Index, HSI)、纳斯达克 100 指数 (Nasdaq 100 Index,

NDX100)、标普 500 指数 (Standard & Poor's 500 Index, S&P500)、罗素 1000 指数 (Russell 1000 Index, RUI1000) 和罗素 2000 指数 (Russell 2000 Index, RUI2000). 通过雅虎金融数据库, 我们收集了这些成分股的月回报率数据, 时间从 2017 年 9 月到 2023 年 9 月. 数据集的具体信息展示在表 1 中.

采用滚动窗口的方法设计数值实验. 该方法在投资组合的数值实验中被广泛使用. 具体而言, 收集所有成分股 T 个月的月回报率数据. 设定估计窗口的长度为 $M < T$. 从第 $t = M + 1$ 个月起, 使用前 M 个月的历史数据得到第 t 个月的投资组合, 并计算第 t 个月的投资回报率. 重复上述过程, 直至 $t = T$. 最终, 得到 $Q = T - M$ 个投资组合. 本文设定 $T = 72$, $M = 60$. 为探究投资权重上界和下界对投资效果的影响, 设置两组实验: (1) 投资权重下界 $l_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, 上界分别取值 $u_i = 0.1, 0.05, 2/n$, $i = 1, \ldots, n$; (2) 投资权重下界 $l_i = 0.01, 1/2n$, $i = 1, \ldots, n$ (数据集 DJIA, HSI 和 NDX100) 和 $l_i = 0.001$, $i = 1, \ldots, n$ (数据集 S&P500, RUI1000 和 RUI2000), 上界取值为 $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$. 在 6 个数据集上分别通过滚动窗口方法计算得到我们的评价指标, 并与 JERO-MV 模型 [19] 的结果进行比较.

接下来介绍本文采用的投资组合样本外表现的评价指标.

(1) 样本外回报均值 (out-of-sample mean of return, MR):

$$\mathrm{MR} = \frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q} r_q, \tag{4.1}$$

其中 $r_q \in \mathbb{R}$ 是第 q 次计算的投资组合月回报率.

(2) 样本外回报标准差 (out-of-sample standard deviation of returns, VR):

$$\mathrm{VR} = \sqrt{\frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q}(r_q - \mathrm{MR})^2}. \tag{4.2}$$

(3) 样本外 Sharpe 比率 (out-of-sample Sharpe ratio, SR):

$$\mathrm{SR} = \frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{VR}}. \tag{4.3}$$

(4) 样本外平均转换率 (out-of-sample turnover, TRN):

$$\mathrm{TRN} = \frac{1}{n(Q-1)}\sum_{q=1}^{Q-1}\sum_{i=1}^{n}(|w_i^{q+1} - w_i^q|), \tag{4.4}$$

表 1 6 类真实数据集

ID	数据集	资产个数	起始时间	数据来源	频率
1	DJIA	29	2017 年 9 月–2023 年 9 月	雅虎金融数据库	月
2	HSI	59	2017 年 9 月–2023 年 9 月	雅虎金融数据库	月
3	NDX100	78	2017 年 9 月–2023 年 9 月	雅虎金融数据库	月
4	S&P500	446	2017 年 9 月–2023 年 9 月	雅虎金融数据库	月
5	RUI1000	724	2017 年 9 月–2023 年 9 月	雅虎金融数据库	月
6	RUI2000	878	2017 年 9 月–2023 年 9 月	雅虎金融数据库	月

其中 w_i^{q+1} 是在第 $q+1$ 次计算中第 i 个资产的投资权重, w_i^q 在第 q 次计算中第 i 个资产的投资权重.

(5) 样本外最小回报: $\min_q r_q$.

(6) 样本外最大回报: $\max_q r_q$.

(7) 样本外投资资产个数: 投资组合权重 $\boldsymbol{w}$ 中非零元素的个数.

4.2 数值结果

表 2–7 分别展示了 6 个数据集上的样本外结果. 每个评价指标中最好的结果用黑体表示, 次优的结果用斜体表示. 总体来看, 除 DJIA 数据集外, JERO-MVB 模型在其他数据集上表现出较好的 Sharpe 比率, 尤其是在 NDX100 和 S&P500 数据集上, JERO-MVB 模型的 Sharpe 比率分别达到了

表 2 模型 JERO-MVB 和 JERO-MV 在 DJIA 数据集上的样本外表现

投资组合类型	(l_i, u_i)	Sharpe 比率	回报均值	标准差	最小回报	最大回报	平均转换率	资产个数
JERO-MVB	$(0, 0.1)$	0.2039	0.0005	**0.0027**	−0.0048	0.0056	0.0107	12
	$(0, 0.05)$	0.2230	**0.0006**	0.0028	−0.0042	**0.0063**	**0.0056**	21
	$(0, 2/n)$	*0.2300*	**0.0006**	**0.0027**	**−0.0040**	*0.0061*	0.0071	16
	$(0.01, 0.1)$	0.1963	0.0005	**0.0027**	−0.0049	0.0056	0.0085	29
	$(1/2n, 0.1)$	0.1989	0.0005	**0.0027**	−0.0048	0.0054	*0.0067*	29
JERO-MV	$(0, 1)$	**0.2507**	**0.0006**	0.0028	−0.0054	0.0048	0.0142	3

表 3 模型 JERO-MVB 和 JERO-MV 在 HSI 数据集上的样本外表现

投资组合类型	(l_i, u_i)	Sharpe 比率	回报均值	标准差	最小回报	最大回报	平均转换率	资产个数
JERO-MVB	$(0, 0.1)$	−0.0235	−0.0001	*0.0056*	−0.0087	0.0098	0.0042	12
	$(0, 0.05)$	−0.0265	−0.0001	*0.0056*	−0.0074	*0.0120*	0.0036	41
	$(0, 2/n)$	−0.0462	−0.0002	**0.0053**	−0.0072	0.0108	0.0038	40
	$(0.01, 0.1)$	−0.0015	*0.0000*	0.0058	−0.0070	0.0115	*0.0020*	59
	$(1/2n, 0.1)$	**0.0148**	**0.0001**	0.0058	**−0.0069**	0.0113	**0.0023**	59
JERO-MV	$(0, 1)$	−0.0717	−0.0006	0.0090	−0.0143	**0.0173**	0.0054	4

表 4 模型 JERO-MVB 和 JERO-MV 在 NDX100 数据集上的样本外表现

投资组合类型	(l_i, u_i)	Sharpe 比率	回报均值	标准差	最小回报	最大回报	平均转换率	资产个数
JERO-MVB	$(0, 0.1)$	**0.4447**	**0.0015**	0.0036	−0.0056	*0.0060*	0.0033	12
	$(0, 0.05)$	*0.3890*	*0.0012*	0.0033	−0.0047	0.0046	0.0028	21
	$(0, 2/n)$	0.3224	0.0009	**0.0029**	**−0.0045**	0.0040	0.0027	41
	$(0.01, 0.1)$	0.3334	0.0010	*0.0032*	−0.0049	0.0051	**0.0019**	78
	$(1/2n, 0.1)$	0.3248	0.0011	0.0036	−0.0056	0.0050	*0.0021*	78
JERO-MV	$(0, 1)$	0.0497	0.0003	0.0061	−0.0107	**0.0087**	0.0064	4

表 5 模型 JERO-MVB 和 JERO-MV 在 S&P500 数据集上的样本外表现

投资组合类型	(l_i, u_i)	Sharpe 比率	回报均值	标准差	最小回报	最大回报	平均转换率	资产个数
JERO-MVB	$(0, 0.1)$	*0.4290*	0.0012	0.0030	−0.0045	0.0058	0.0007	15
	$(0, 0.05)$	0.3814	0.0009	**0.0025**	**−0.0039**	0.0052	0.0007	24
	$(0, 2/n)$	0.1750	0.0004	**0.0025**	−0.0042	0.0039	*0.0004*	225
	$(0.01, 0.1)$	0.2001	0.0006	0.0029	−0.0040	0.0043	**0.0003**	446
	$(1/2n, 0.1)$	**0.4563**	*0.0015*	0.0035	−0.0046	*0.0061*	0.0005	446
JERO-MV	$(0, 1)$	0.3140	**0.0021**	0.0070	−0.0100	**0.0167**	0.0012	6

表 6 模型 JERO-MVB 和 JERO-MV 在 Russell1000 数据集上的样本外表现

投资组合类型	(l_i, u_i)	Sharpe 比率	回报均值	标准差	最小回报	最大回报	平均转换率	资产个数
JERO-MVB	$(0, 0.1)$	**0.3684**	*0.0015*	0.0042	−0.0068	*0.0061*	0.0005	13
	$(0, 0.05)$	*0.3459*	0.0010	*0.0031*	−0.0050	0.0050	0.0006	138
	$(0, 2/n)$	0.1713	0.0004	**0.0025**	**−0.0040**	0.0040	*0.0003*	364
	$(0.001, 0.1)$	0.1810	0.0006	0.0032	−0.0053	0.0046	**0.0002**	724
JERO-MV	$(0, 1)$	0.0490	**0.0018**	0.0046	−0.0056	**0.0076**	0.0005	8

表 7 模型 JERO-MVB 和 JERO-MV 在 Russell2000 数据集上的样本外表现

投资组合类型	(l_i, u_i)	Sharpe 比率	回报均值	标准差	最小回报	最大回报	平均转换率	资产个数
JERO-MVB	$(0, 0.1)$	−0.2254	−0.0008	0.0036	−0.0065	*0.0063*	0.0004	20
	$(0, 0.05)$	−0.2266	−0.0006	**0.0030**	−0.0053	0.0052	0.0004	28
	$(0, 2/n)$	**0.0980**	**0.0003**	**0.0030**	**−0.0048**	0.0052	*0.0002*	441
	$(0.001, 0.1)$	−0.0404	−0.0002	0.0039	−0.0059	**0.0065**	**0.0001**	878
JERO-MV	$(0, 1)$	−0.2556	−0.0010	0.0042	−0.0103	*0.0063*	0.0005	20

0.4447 和 0.4563. 而 JERO-MV 模型在 NDX100 和 S&P500 数据集上的 Sharpe 比率较低, 分别为 0.0497 和 0.3140. 特别是在 RUI2000 数据集上, JERO-MV 模型的 Sharpe 比率为 −0.2556, 表现较差. 而 JERO-MVB 模型在相同数据集上的 Sharpe 比率虽然也不高, 但是可以通过分散化技术最高达到 Sharpe 比率为 0.0980, 表现略优于 JERO-MV 模型.

在回报均值方面, 在多个数据集上, JERO-MV 模型都可以获得较高的回报均值, 尤其是在 S&P500 和 RUI1000 数据集上, JERO-MV 模型的回报均值分别达到了 0.0021 和 0.0018. 但是 JERO-MVB 模型可以通过调整权重的上下界约束, 提高其回报均值. 尤其是在 HSI 和 RUI2000 数据集中, JERO-MV 和部分 JERO-MVB 模型的回报均值均为负数, 但通过调整权重上下界, JERO-MVB 模型可以将回报均值分别提升至 0.0001 和 0.0003, 同时也提高了 Sharpe 比率.

就标准差而言, JERO-MVB 模型显示出了较低的波动性. 例如, 在 S&P500 数据集上, JERO-MVB 模型的标准差最高为 0.0035, 而此时 JERO-MV 模型的标准差为 0.0070. 这表明 JERO-MVB 模型在

样本外表现中更能有效控制风险.

在最小回报和最大回报方面, 在多个数据集上, JERO-MV 模型都获得较高的最大回报, 而 JERO-MVB 模型最大回报表现不如 JERO-MV 模型, 但其在不同的数据集上表现出比较好的极端收益控制. 例如, 在 HSI 数据集上, JERO-MVB 模型的最小回报为 -0.0087, 最大回报为 0.0098, 最小回报和最大回报之间差距为 0.0186. 而 JERO-MV 模型的最小回报和最大回报之间的差距为 0.0316, 最小回报低至 -0.0143.

关于平均转换率, 在测试的 6 个数据集上, JERO-MV 模型的平均转换率相对较低, 尤其是对于资产数量大的数据集. 例如, 在 S&P500, RUI1000 和 RUI2000 数据集上, JERO-MVB 模型的平均转换率可以低至 0.0003. 而 JERO-MV 模型的平均转换率较高, 尤其是在 DJIA 数据集上, JERO-MV 模型的平均转换率达到 0.0142.

当投资组合权重下界为 0 时, 随着权重上界的减小, JERO-MVB 模型的 Sharpe 比率和回报均值在多个数据集上都是增加的, 投资资产的数目整体也呈现增加的趋势. 这说明权重上界的减少使得投资组合的分散化得以提高, 从而提高了样本外表现. 但是, 当将权重下界设置为 $l_i > 0$ 时, 投资组合会对资产池内的所有资产都投资, 由于同时有权重上界和下界的约束, 所以此时投资组合的分散化程度更高. 在 HSI, S&P500 和 RUI2000 数据集上, 同时约束权重上界和下界, 使得 JERO-MVB 模型比仅有上界约束的限制做空的 JERO-MVB 模型拥有更高的 Sharpe 比率; 在 DJIA, NDX100 和 RUI1000 数据集上, 带权重上界和下界约束的 JERO-MVB 模型的 Sharpe 比率比仅有上界约束的限制做空的 JERO-MVB 模型的更低, 这可能是过度分散化, 从而导致投资组合的预期收益被削弱. 并且投资资产数量很大, 必然会导致更多投资成本的投入, 因此在使用分散化技术时, 需要综合考虑投资目标和投资成本.

数值实验结果表明, 大多数情形下, JERO-MVB 模型可以得到更好的样本外表现. 具体表现在: JERO-MVB 模型可以获得更高的 Sharpe 比率和回报均值; JERO-MVB 模型的回报标准差和平均转换率更小, 这说明 JERO-MVB 模型得到的投资组合更稳定. 转换率越小, 意味着不同投资周期间的调仓越小, 这有利于降低投资者的投资成本; JERO-MVB 模型投资的资产个数比 JERO-MV 模型的资产个数略多, 但相对于整体的资产池, JERO-MVB 模型投资的资产依旧很少, 依旧保持了资产选择的能力. 针对不同的 u_i 的取值, 我们发现并不是 u_i 越小, 得到的投资效果越好. 在 DJIA, S&P500 和 RUI1000 数据集中, 投资组合的 Sharpe 比率随 u_i 的增大而变大; 在 NDX100 数据集中, 投资的 Sharpe 比率随 u_i 的增大而变小; 而在 HSI 和 RUI2000 数据集中, 投资的 Sharpe 比率随 u_i 的增大并不是单调变化的. 这说明投资组合的分散化程度与投资效果并不是简单的成正比例或反比例关系.

为了更直观地观察到投资组合中的资产权重, 图 1–6 展示了不同数据集上不同模型的资产权重. 横坐标表示对应指数的成分股, 纵坐标表示投资组合中对应资产的权重. 图中红色实心点表示选择的资产的权重; 蓝色空心圆表示该资产未被选择, 即资产权重为 0. 我们发现 JERO-MV 模型的投资过分集中于某几个资产. 例如, 在 DJIA 数据集中, JERO-MV 模型只投资了两个资产, 并对其中一个资产的投资权重超过了 0.9. 若该资产在下一个财务周期内出现较大的波动, 则需及时调仓, 否则收益也会随之有很大的波动. 然而此时调仓成本可能会较高, 这在表 3 中也有所体现: JERO-MV 模型的样本外平均转换率比 JERO-MVB 模型的高很多. 当权重上界减小时, 多数投资的资产权重等于上界. 权重越小, 权重等于上界的资产越多. 当增大权重下界时, 会对资产池内的所有资产都投资, 导致大部分资产的权重都很小, 通常投资权重为下界. 这虽然提高了投资组合的分散化, 但是分散化程度过高, 可能导致投资效益被削弱, 并且也会大幅提高投资成本. JERO-MV 模型在 DJIA, HSI 和 NDX100 数据

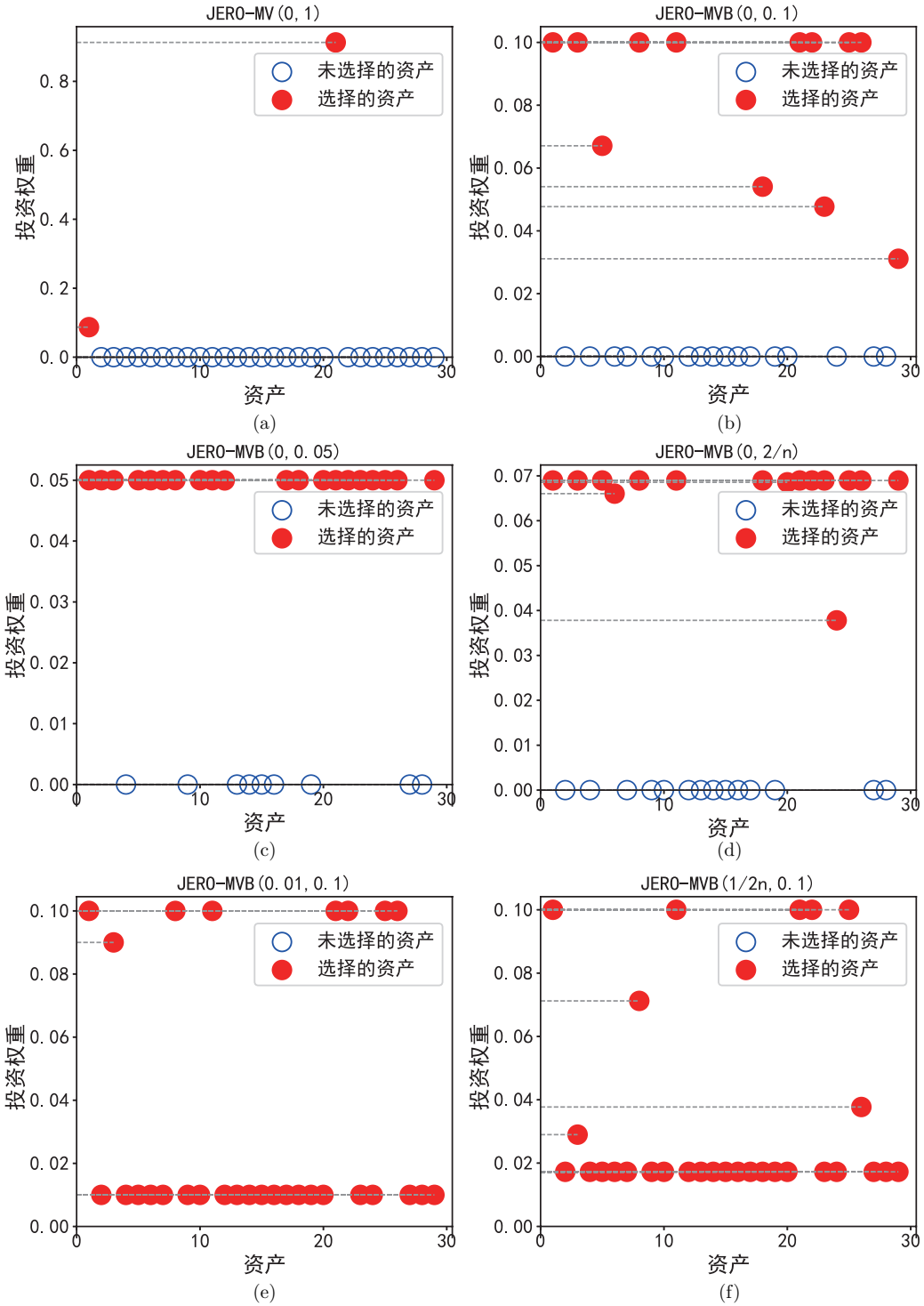


图 1 (网络版彩图) 模型 JERO-MV 和 JERO-MVB 在 DJIA 数据集的投资权重. (a) JERO-MV 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$); (b) JERO-MV 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$); (c) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 0.05$, $i = 1, \ldots, n$); (d) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 2/n$, $i = 1, \ldots, n$); (e) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0.01$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$); (f) JERO-MVB 模型 ($l_i = 1/(2n)$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$)

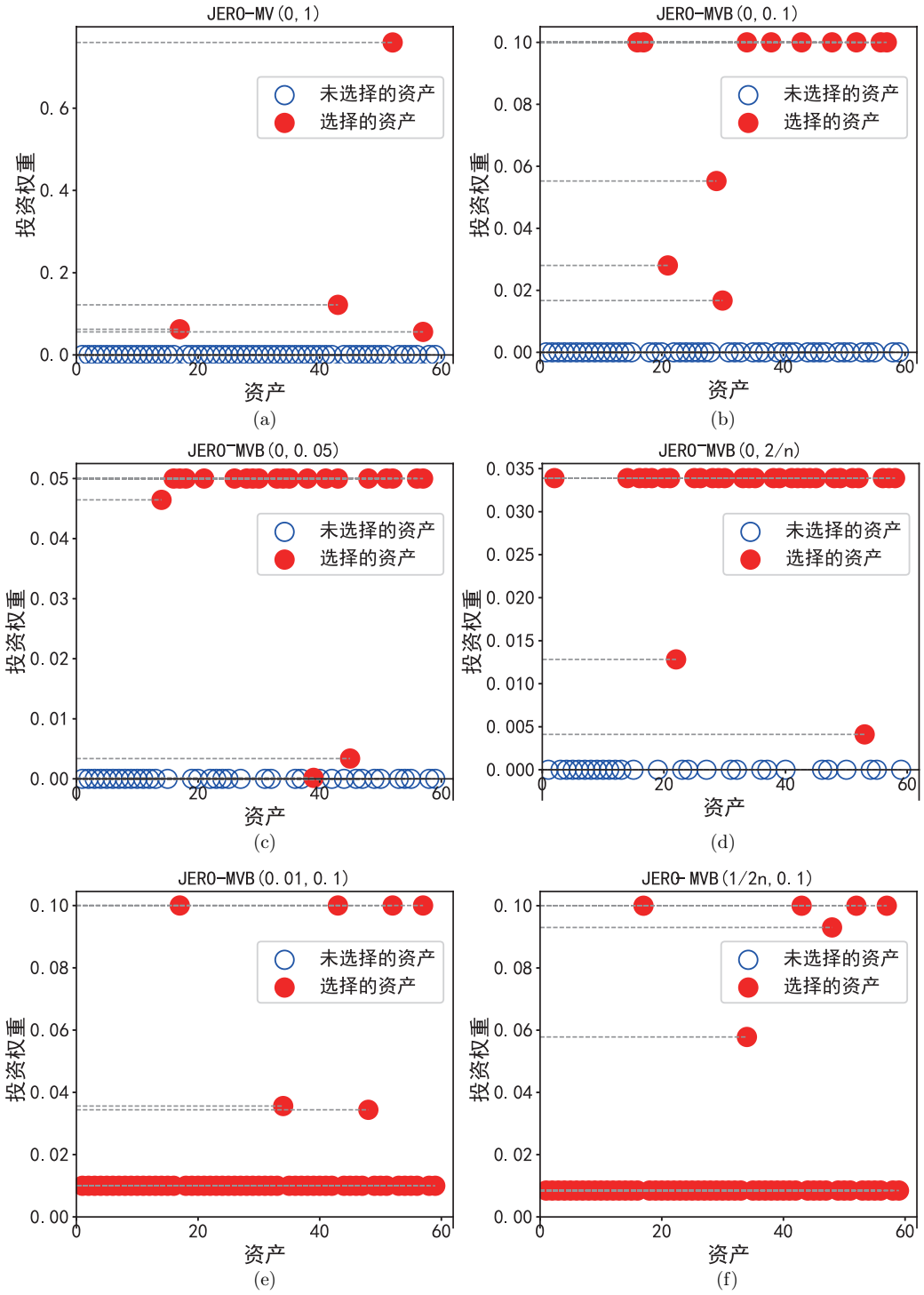


图 2 (网络版彩图) 模型 **JERO-MV** 和 **JERO-MVB** 在 **HSI** 数据集的投资权重. **(a) JERO-MV** 模型 $(l_i = 0, u_i = 1, i = 1, \ldots, n)$; **(b) JERO-MV** 模型 $(l_i = 0, u_i = 0.1, i = 1, \ldots, n)$; **(c) JERO-MVB** 模型 $(l_i = 0, u_i = 0.05, i = 1, \ldots, n)$; **(d) JERO-MVB** 模型 $(l_i = 0, u_i = 2/n, i = 1, \ldots, n)$; **(e) JERO-MVB** 模型 $(l_i = 0.01, u_i = 0.1, i = 1, \ldots, n)$; **(f) JERO-MVB** 模型 $(l_i = 1/(2n), u_i = 0.1, i = 1, \ldots, n)$

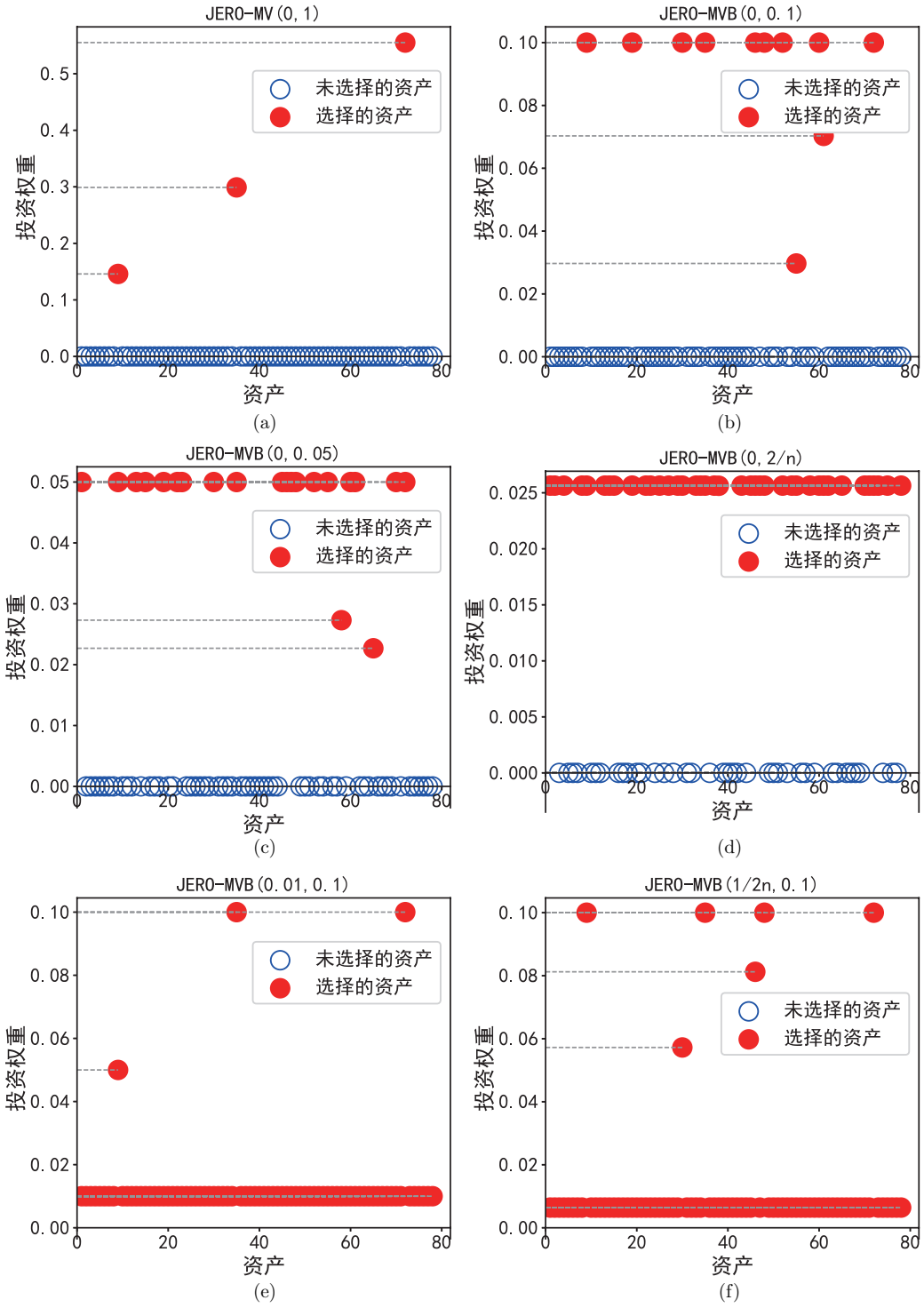


图 3 (网络版彩图) 模型 JERO-MV 和 JERO-MVB 在 NDX100 数据集的投资权重. (a) JERO-MV 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$); (b) JERO-MV 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$); (c) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 0.05$, $i = 1, \ldots, n$); (d) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 2/n$, $i = 1, \ldots, n$); (e) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0.01$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$); (f) JERO-MVB 模型 ($l_i = 1/(2n)$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$)

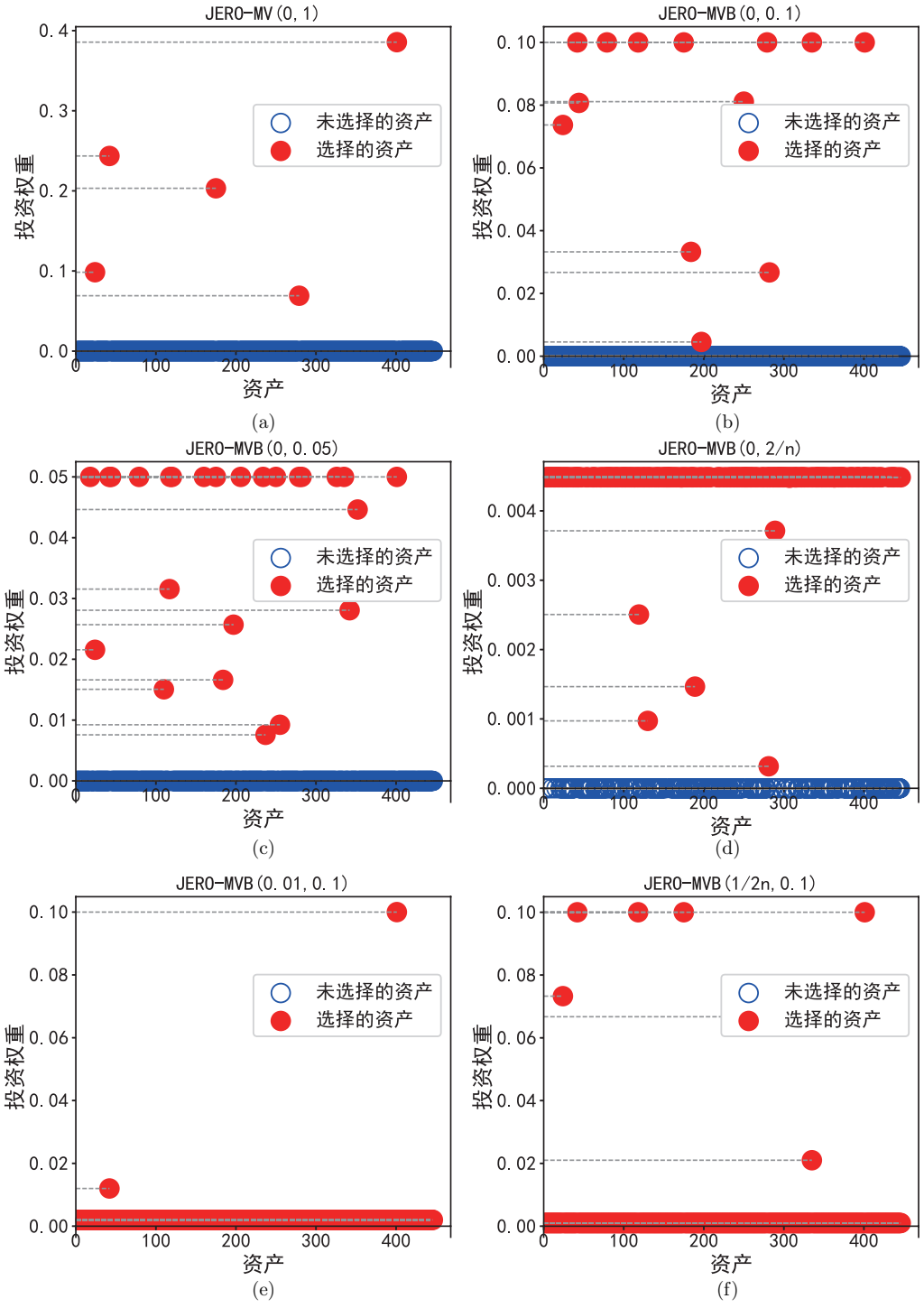


图 4 (网络版彩图) 模型 JERO-MV 和 JERO-MVB 在 S&P500 数据集的投资权重. (a) JERO-MV 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$); (b) JERO-MV 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$); (c) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 0.05$, $i = 1, \ldots, n$); (d) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 2/n$, $i = 1, \ldots, n$); (e) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0.01$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$); (f) JERO-MVB 模型 ($l_i = 1/(2n)$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$)

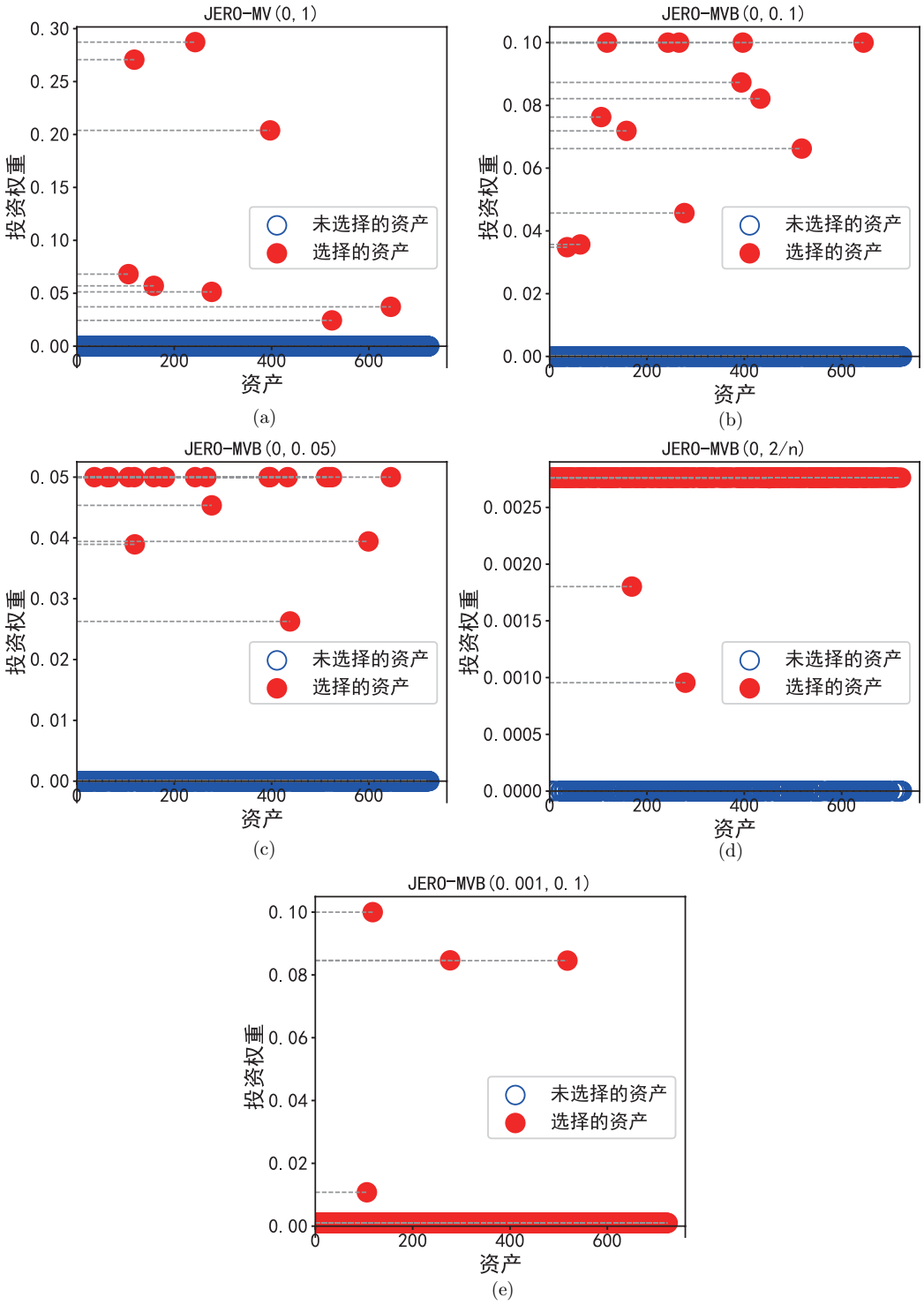


图 5 (网络版彩图) 模型 JERO-MV 和 JERO-MVB 在 RUI1000 数据集的投资权重. (a) JERO-MV 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$); (b) JERO-MV 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$); (c) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 0.05$, $i = 1, \ldots, n$); (d) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0$, $u_i = 2/n$, $i = 1, \ldots, n$); (e) JERO-MVB 模型 ($l_i = 0.01$, $u_i = 0.1$, $i = 1, \ldots, n$)

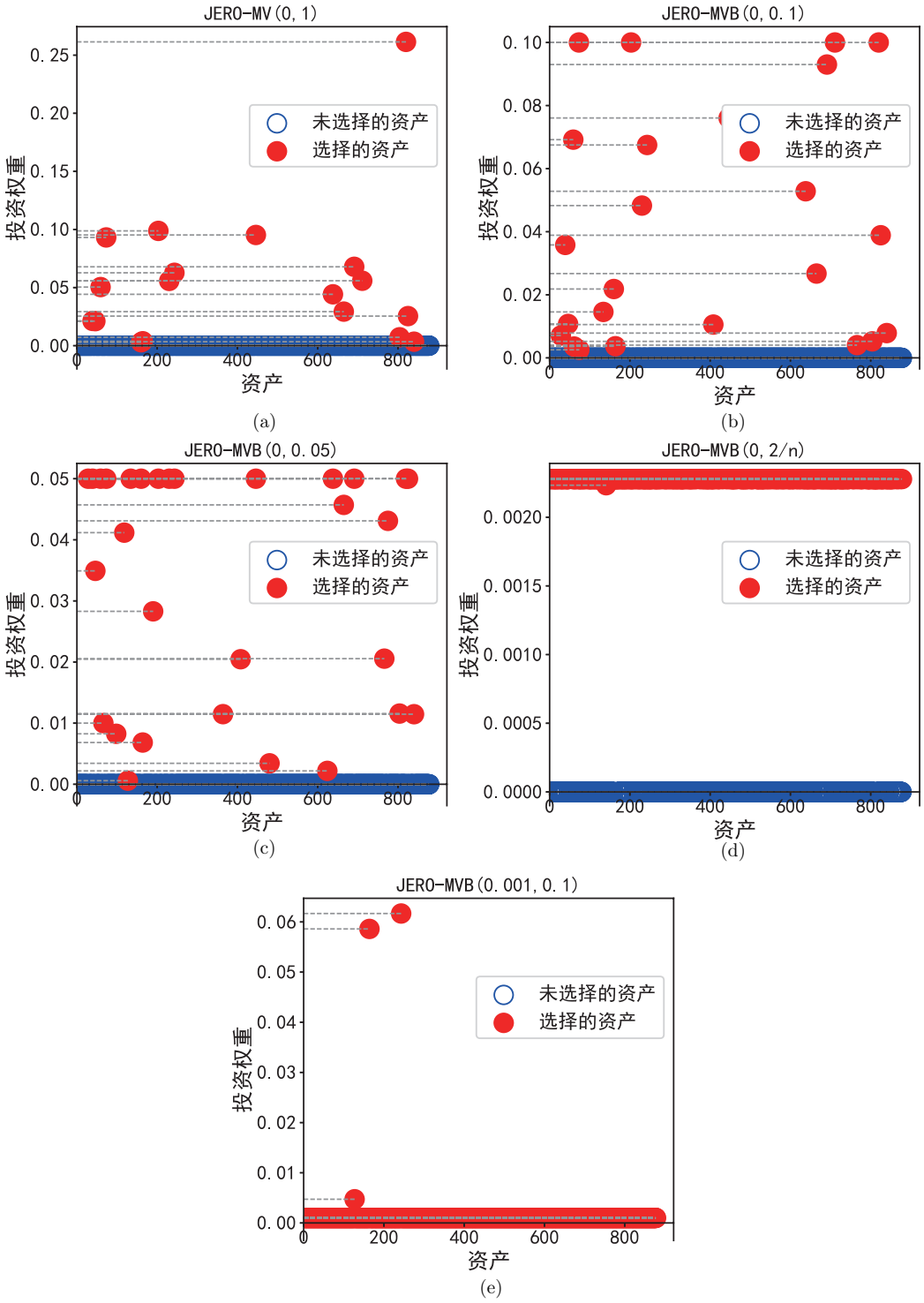


图 6 (网络版彩图) 模型 **JERO-MV** 和 **JERO-MVB** 在 **RUI2000** 数据集的投资权重. **(a) JERO-MV** 模型 $(l_i = 0,\ u_i = 1,\ i = 1,\ldots,n)$; **(b) JERO-MV** 模型 $(l_i = 0,\ u_i = 0.1,\ i = 1,\ldots,n)$; **(c) JERO-MVB** 模型 $(l_i = 0,\ u_i = 0.05,\ i = 1,\ldots,n)$; **(d) JERO-MVB** 模型 $(l_i = 0,\ u_i = 2/n,\ i = 1,\ldots,n)$; **(e) JERO-MVB** 模型 $(l_i = 0.01,\ u_i = 0.1,\ i = 1,\ldots,n)$

集中都对某一资产投资权重超过 0.5, 投资资产数目很少, 投资过于集中. 但随着资产池内资产数目的增大, JERO-MV 模型投资的资产的数目相应增加, 同时投资权重分配的极端化情形减少, 投资过于集中的情形也得到了一定改善.

5 结论与展望

本文首次在 JERO-MV 模型的基础上, 增加了对投资组合资产权重箱约束. 将该模型转化为可处理形式后, 分析了该模型的可行性条件. 本文用二分法求解转化后的模型, 并在真实数据集上进行了大量的数值实验. 与 JERO-MV 模型的样本外投资表现进行对比, 探究了取不同的权重上界和下界时的样本外表现. 大多数情形下, 带有箱约束的 JERO-MVB 模型可以获得更好的样本外表现.

除箱约束外, 在第 2 节也列举了其他几种常用的分散化约束. 所以在接下来的研究中, 可以探究不同的分散化约束对投资组合样本外表现的影响.

致谢 感谢审稿人的宝贵意见. 衷心祝愿我们敬爱的韩继业教授 90 寿辰快乐, 身体健康.

参考文献

1 Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust convex optimization. Math Oper Res, 1998, 23: 769–805
2 Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of uncertain linear programs. Oper Res Lett, 1999, 25: 1–13
3 Bertsimas D, Gupta V, Kallus N. Data-driven robust optimization. Math Program, 2018, 167: 235–292
4 Bertsimas D, Sim M. The price of robustness. Oper Res, 2004, 52: 35–53
5 Black F, Litterman R. Global portfolio optimization. Financ Anal J, 1992, 48: 28–43
6 Butler A, Kwon R H. Data-driven integration of regularized mean-variance portfolios. arXiv:2112.07016, 2021
7 Chopra V K, Ziemba W T. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. J Portfolio Manag, 1993, 19: 6–11
8 El Ghaoui L, Lebret H. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. SIAM J Matrix Anal Appl, 1997, 18: 1035–1064
9 El Ghaoui L, Oustry F, Lebret H. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. SIAM J Optim, 1998, 9: 33–52
10 Fabozzi F, Kolm P N, Pachamanova D A, et al. Robust Portfolio Optimization and Management. New York: John Wiley & Sons, 2007
11 Goldfarb D, Iyengar G. Robust portfolio selection problems. Math Oper Res, 2003, 28: 1–38
12 Kang Z, Li X, Li Z, et al. Data-driven robust mean-CVaR portfolio selection under distribution ambiguity. Quant Finance, 2019, 19: 105–121
13 Lin J L. On the diversity constraints for portfolio optimization. Entropy, 2013, 15: 4607–4621
14 Markowitz H. Portfolio selection. J Finance, 1952, 7: 77–91
15 Martínez-Nieto L, Fernández-Navarro F, Carbonero-Ruz M, et al. An experimental study on diversification in portfolio optimization. Expert Syst Appl, 2021, 181: 115203
16 Schmidt A B. Managing portfolio diversity within the mean variance theory. Ann Oper Res, 2019, 282: 315–329
17 Sharpe W F. Mutual fund performance. J Bus, 1966, 39: 119–138
18 Tütüncü R H, Koenig M. Robust asset allocation. Ann Oper Res, 2004, 132: 157–187
19 Wang Y X, Kong L C, Ahipasaoglu D S, et al. Portfolio selection by joint estimation-robustness optimization with the mean and variance constraints. Submitted
20 Zhu T Z, Xie J G, Sim M. Joint estimation and robustness optimization. Manage Sci, 2022, 68: 1659–1677

Portfolio selection by joint estimation and robustness optimization with a box constraint

Yingxiao Wang & Lingchen Kong

Abstract Most of the input parameters in portfolio optimization problems are estimated from historical data. The uncertainty of the estimation may have a huge impact on the Markowitz portfolio model. Recently, a joint estimation and robustness optimization (JERO) framework, which can mitigate estimation uncertainty in optimization problems by incorporating both the parameter estimation and the optimization problem, was proposed. The JERO framework is applied to the portfolio optimization problem and it simultaneously contains two valuable measures of the portfolio model: the mean return and the risk (variance) of a portfolio. This model is referred to as JERO-MV. However, the JERO-MV model may lead to portfolios that are highly concentrated on a few assets. In this paper, we combine the JERO-MV model with the diversification constraints by adding the constraints on the asset weights. The feasibility conditions of our model are also given. We conduct extensive numerical experiments on real data sets and compare the results with the JERO-MV model. In most cases, our models have better out-of-sample performances.

Keywords portfolio optimization, parameter estimation, joint estimation and robustness, diversification constraint

MSC(2020) 60A05, 60F99, 90B50, 90C17, 90C22

doi: 10.1360/SSM-2024-0130