中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 6 期: 899～916
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

关于 Landau 方程的 Cauchy 问题的弱解的唯一性

献给陈恕行教授 80 华诞

曹红梅*, 徐超江

南京航空航天大学理学院, 南京 211106
E-mail: hmcao_91@nuaa.edu.cn, xuchaojiang@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2020-05-28; 接受日期: 2020-09-14; 网络出版日期: 2021-01-14; * 通信作者
中央高校基本科研业务费和国家自然科学基金 (批准号: 11871274) 资助项目

摘要 本文研究非线性及空间非齐次 Landau 方程具有一般初值的 Cauchy 问题, 证明在带多项式权的 Sobolev 空间中的一类弱解的唯一性.

关键词 非齐次 Landau 方程 弱解 唯一性

MSC (2020) 主题分类 35D30, 35E15, 74H25, 82C40

1 引言

Landau 方程是动理学理论中的一个基本模型, 描述了等离子体中粒子的密度演化. 本文考虑空间非齐次 Landau 方程, 其方程形式如下:

$$\begin{cases} \partial_t F + v\cdot\nabla_x F = Q(F,F), \\ F\,|_{t=0} = F_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $F = F(t,x,v) \geqslant 0$ 是关于空间变量 $x\in\mathbb{R}^3$ 和速度变量 $v\in\mathbb{R}^3$ 在时间 $t\geqslant 0$ 的粒子密度分布函数. Landau 碰撞算子 Q 是仅作用于速度变量 v 的双线性算子:

$$Q(F,G)(v) = \nabla_v\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^3} a(v-v_*)[F_*\nabla_v G - \nabla_{v_*}F_* G]dv_*\right),$$

这里使用一般的简写形式 $F_* = F(t,x,v_*)$, $\nabla_v G = \nabla_v G(t,x,v)$, $\nabla_{v_*}F_* = \nabla_{v_*}F(t,x,v_*)$, $G = G(t,x,v)$. 矩阵值函数 $a(v) = (a_{i,j}(v))_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ 是非负对称矩阵且依赖于粒子之间的相互作用, 通常假定为

$$a(v) = (|v|^2\boldsymbol{I} - v\otimes v)|v|^\gamma, \quad -3\leqslant\gamma\leqslant 1,$$

英文引用格式: Cao H M, Xu C J. On the uniqueness of weak solutions for Cauchy problem to Landau equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 899–916, doi: 10.1360/SSM-2020-0166

© 2021《中国科学》杂志社

其中 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_{3\times 3}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的单位矩阵, $v\otimes v=(v_iv_j)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. $\gamma\in(0,1]$ 称为硬位势; $\gamma=0$ 称为 Maxwellian 分子; $\gamma\in[-3,0)$ 称为软位势.

Landau 方程是描述带电粒子在其库仑力相互作用时发生碰撞的一个基本方程. 本文在 $-3<\gamma\leqslant 0$ 的情形下, 证明具有一般初值的 Cauchy 问题 (1.1) 的弱解的唯一性. 为此, 定义加权函数空间,

$$\|u\|_{L^p_\beta(\mathbb{R}^3)}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\langle v\rangle^\beta u(v)|^p dv\right)^{1/p},\quad p\geqslant 1,\quad \beta\in\mathbb{R},$$

以及加权 Sobolev 空间,

$$\|u\|_{H^m_\beta(\mathbb{R}^3)}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\langle D_v\rangle^m(\langle v\rangle^\beta u(v))|^2 dv\right)^{1/2},\quad m,\beta\in\mathbb{R},$$

其中

$$\langle v\rangle=(1+|v|^2)^{1/2},\quad \langle D_v\rangle=(1-\Delta_v)^{1/2}.$$

另外, 我们还要用到关于速度变量具有多项式衰减的函数空间, 对 $m\in\mathbb{R}$, $\ell\geqslant 0$, 有

$$\mathcal{H}^m_\ell([0,T]\times\mathbb{R}^6_{x,v})=C^0([0,T];\mathcal{S}'(\mathbb{R}^6_{x,v}))\cap L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3_x;H^m_\ell(\mathbb{R}^3_v)),$$

其中 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^6_{x,v})$ 表示缓增分布函数的集合.

本文的主要结果是下面的唯一性定理 (有关弱解的定义参见第 2 节).

定理 1.1 当 $-3<\gamma\leqslant 0$ 时, 对 $0<T<+\infty$, $\ell_0\geqslant 8$, 假设 Cauchy 问题 (1.1) 存在两个弱解 $F_1,F_2\in\mathcal{H}^2_{\ell_0}([0,T]\times\mathbb{R}^6_{x,v})$ 具有相同的初始值 $F_0\in L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^2_{\ell_0}(\mathbb{R}^3_v))$. 若其中一个解是非负的, 则 $F_1\equiv F_2$.

注 1.1 关于这个定理, 我们想特别强调两点:

(1) 这里考虑的是 Landau 方程的原始模型, 而不是平衡态附近的小扰动问题;

(2) 上面的定理对于空间齐次的 Landau 方程也同样成立.

回顾有关空间非齐次动理学方程的一些已知的结果, 首先是关于解的存在性. DiPerna 和 Lions [1] 在任意初始值条件下证明了具有角截断 Boltzmann 方程的 "重整化解" 的整体存在性. 然后, Alexandre 和 Villani [2,3] 将 "重整化解" 分别推广到非角截断 Boltzmann 方程和 Landau 方程. 关于非角截断 Boltzmann 方程, 在速度变量上指数衰减的 Sobolev 函数空间中, Alexandre 等 [4] 证明了非常短时间的局部解的存在性.

关于经典解的工作则主要是平衡态附近的小扰动问题, 这方面有大量的工作, 主要有 Guo [5,6] 分别在周期域内关于 Landau 方程和在全空间上关于 Boltzmann 方程建立了经典解的整体时间存在性, Hsiao 和 Yu [7] 将文献 [5] 的结果延伸到全空间. 关于非角截断 Boltzmann 方程, 主要有 Alexandre、Morimoto、Ukai、杨彤和本文第二作者的一系列工作 (参见文献 [8–12]). 这些工作也同时证明了平衡态附近的小扰动的经典解的唯一性.

但一般的弱解的唯一性, 如文献 [1] 引入的 "重整化解", 仍然是该研究领域中一个具有挑战性的问题. 根据文献 [13–16] 中的初步结果, 可以发现, 若非齐次 Boltzmann 方程有一个重整化解和一个经典解, 则它们应该是一致的. 关于非角截断 Boltzmann 方程, Alexandre 等 [17] 研究了在速度变量上多项式衰减的解的唯一性. 本文将这一工作推广到空间非齐次 Landau 方程. 但是在这一类函数空间中的解的存在性, 特别是整体存在性, 仍然是一个具有挑战性的问题. 最近, 在临界正则性空间中, Cao 等 [18] 在 Maxwellian 分子情形下建立了 Landau 方程强解的整体存在性.

本文中用到的符号 $f \lesssim g$ 表示 $f \leqslant Cg$, 其中 $C > 0$ 是依赖于 γ 或 ε ($1 > \varepsilon > 0$ 非常小) 的常数. 我们需要得到一个关键不等式, 然后利用 Gronwall 不等式推导出结论, 其中 C 的值不会影响本文的结果. $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^3_v)$ 上的内积, $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})$ 上的内积.

本文余下内容的安排如下: 第 2 节给出定理 1.1 的证明大纲, 第 3 节建立 Landau 碰撞算子的三线性估计和交换子估计.

2 定理 1.1 的证明

首先给出 Cauchy 问题 (1.1) 的弱解的定义:

$$F \in C^0(\mathbb{R}^+;\mathcal{S}'(\mathbb{R}^6_{x,v})) \cap L^\infty([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^1_{2+\gamma^+}(\mathbb{R}^3_v))) \triangleq \mathcal{H}^1_{2+\gamma^+}([0,T]\times\mathbb{R}^6_{x,v}),$$

且在广义函数的意义下满足下列关系:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^6} F(t,x,v)\phi(t,x,v)dxdv - \int_{\mathbb{R}^6} F_0(x,v)\phi(0,x,v)dxdv\\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^6} F(\tau,x,v)(\partial_\tau + v\cdot\nabla_x)\phi(\tau,x,v)dxdv\\ &\quad = -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3_x} ((a\star F)\nabla F - (a\star\nabla F)F,\, \nabla\phi)_{L^2_v}(\tau,x)dxd\tau \end{aligned} \tag{2.1}$$

对所有的实验函数 $\phi \in C^1([0,T];C^\infty_0(\mathbb{R}^6))$ 成立, 这里 $a\star F$ 和 $a\star\nabla F$ 表示卷积,

$$\begin{aligned}(a\star F)(v) &= \int_{\mathbb{R}^3} a(v-v_*)F(v_*)dv_*,\\ (a\star\nabla F)(v) &= \int_{\mathbb{R}^3} a(v-v_*)\nabla_{v_*}F(v_*)dv_*.\end{aligned}$$

利用稠密性定理可以将实验函数拓展到函数空间

$$\phi \in \mathrm{Lip}([0,T];W^{1,1}(\mathbb{R}^3_x;H^1_{\ell+\gamma^+}(\mathbb{R}^3_v))), \quad \ell \geqslant 2. \tag{2.2}$$

这里需要强调的是, 我们考虑了软势 $-3 < \gamma \leqslant -2$ 的情形, 因此, F 关于速度变量 v 需要属于空间 $H^1_2(\mathbb{R}^3_v)$. 如果考虑 $-2 < \gamma \leqslant 0$, 则 F 关于速度变量 v 仅仅需要属于空间 $L^1_2(\mathbb{R}^3_v)$.

下面首先给出定理 1.1 的证明思路. 令 $G = F_1 - F_2$, 其中 $F_1 \geqslant 0$, 则在 (2.1) 的弱解的意义下, 根据方程 (1.1), 得出

$$\begin{cases}\partial_t G + v\cdot\nabla_x G = Q(F_1,G) + Q(G,F_2),\\ G\,|_{t=0} = 0.\end{cases} \tag{2.3}$$

下面证明在解的存在区域上有 $G \equiv 0$.

证明弱解的唯一性的关键步骤是利用函数 G 构造满足条件 (2.2) 的实验函数: 首先是关于 x 变量, 函数 G 没有可微性, 因此需要关于 x 变量进行磨光, 令 $S \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ 满足 $0 \leqslant S \leqslant 1$ 且

$$S(\tau) = 1, \quad |\tau| \leqslant 1; \quad S(\tau) = 0, \quad |\tau| \geqslant 2,$$

则对任意的 $N \in \mathbb{N}$ 和 $m \in \mathbb{R}$, 有

$$S_N(D_x) \triangleq S(2^{-2N}|D_x|^2): \quad H^m(\mathbb{R}^3_x) \to H^\infty(\mathbb{R}^3_x),$$

且对任意的 $m \in \mathbb{R}$ 和任意的 $u \in H^m(\mathbb{R}^3_x)$, 有

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N(D_x)u - u\|_{H^m(\mathbb{R}^3_x)} = 0. \tag{2.4}$$

其次对于 x 变量, 函数 G 在 $\mathbb{R}^3_x$ 上也没有可积性, 因此需要添加一个关于 x 变量的权函数. 对 $\ell \in \mathbb{R}$, 设 $\varphi(v,x) = 1 + |v|^2 + |x|^2$, 令

$$W_\ell(v) = \langle v\rangle^\ell, \quad W_{\varphi,\ell} = \frac{W_\ell(v)}{\varphi(v,x)} = \frac{(1+|v|^2)^{\ell/2}}{1+|v|^2+|x|^2}.$$

然后, 对满足定理 1.1 中条件的 F_1 和 F_2, 令 $G = F_1 - F_2$, 则有

$$\psi(t,x,v) = W_{\varphi,\ell}S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G \in L^\infty([0,T];W^{1,1}(\mathbb{R}^3_x;H^1_{\ell_0-2\ell}(\mathbb{R}^3_v))).$$

事实上, 因为 G 在弱解意义下满足方程 (2.3), 所以, 函数 ψ 关于时间变量是 Lipschitz 光滑的.

引理 2.1 设 $G = F_1 - F_2$, 其中 F_1 和 F_2 满足定理 1.1 中的条件, 则有

$$S_N(D_x)W_{\varphi,\ell}G \in \mathrm{Lip}([0,T];H^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^1_{\ell_0-\ell}(\mathbb{R}^3_v))).$$

这个引理的证明类似于文献 [19, 引理 4.3] 的证明, 其中交换子的估计稍微有一些变化, 这里省略其详细计算.

定理 1.1 的证明 根据引理 2.1, 在 (2.3) 中取 $\psi(t,x,v) = W_{\varphi,\ell}S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G(t,x,v)$ 作为实验函数, 得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^6} G(t,x,v)W_{\varphi,\ell}S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G(t,x,v)dvdx - \int_{\mathbb{R}^6} G_0(x,v)W_{\varphi,\ell}S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G(0,x,v)dvdx\\
&\quad - 2\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^6} G(\tau,x,v)(v\cdot\nabla_x)W_{\varphi,\ell}S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G(\tau,x,v)dvdx\\
&\quad = -2\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3_x} ((a\star F_1)\nabla_v G - (a\star\nabla_v F_1)G, \nabla_v(W_{\varphi,\ell}S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G))_{L^2_v}(\tau,x)dx\\
&\qquad - 2\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3_x} ((a\star G)\nabla_v F_2 - (a\star\nabla_v G)F_2, \nabla_v(W_{\varphi,\ell}S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G))_{L^2_v}(\tau,x)dx.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&2\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^6} G(\tau,x,v)(v\cdot\nabla_x)(W_{\varphi,\ell}S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G(\tau,x,v))dvdx\\
&\quad = 2\int_0^t (v\cdot\nabla_x(S_N(D_x)W_{\varphi,\ell}G(\tau)), S_N(D_x)W_{\varphi,\ell}G(\tau))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}d\tau\\
&\qquad + 2\int_0^t (v\cdot\nabla_x(\varphi^{-1})W_\ell G(\tau), S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G(\tau))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}d\tau
\end{aligned}$$

和

$$(v\cdot\nabla_x(S_N(D_x)W_{\varphi,\ell}G(\tau)), S_N(D_x)W_{\varphi,\ell}G(\tau))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})} = 0, \tag{2.5}$$

再考虑到 $G_0=0$, 从而得到

$$\begin{aligned}
&\|S_N(D_x)W_{\varphi,\ell}G\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}\\
&\quad=2\int_0^t(v\cdot\nabla_x(\varphi^{-1})W_\ell G(\tau),S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G(\tau))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}d\tau\\
&\qquad-2\int_0^t((a\star F_1)\nabla_v G-(a\star\nabla_v F_1)G,\nabla_v(W_{\varphi,\ell}S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}(\tau)d\tau\\
&\qquad-2\int_0^t((a\star G)\nabla_v F_2-(a\star\nabla_v G)F_2,\nabla_v(W_{\varphi,\ell}S_N(D_x)^2W_{\varphi,\ell}G))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

现在上面这个式子的两边都没有关于变量 x 的微分了, 因此可以利用 (2.4), 在上面的等式中取极限 $N\to\infty$, 从而去掉关于 x 变量的磨光化算子而只保留权函数. 根据碰撞算子 Q 的定义和分部积分, 对任意的 $t\in(0,T)$, 有

$$\begin{aligned}
\|W_{\varphi,\ell}G\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}&=2\int_0^t(v\cdot\nabla_x(\varphi^{-1})W_\ell G(\tau),W_{\varphi,\ell}G(\tau))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}d\tau\\
&\quad-2\int_0^t((a\star F_1)\nabla_v G-(a\star\nabla_v F_1)G,\nabla_v(W_{\varphi,\ell}W_{\varphi,\ell}G))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}(\tau)dxd\tau\\
&\quad-2\int_0^t((a\star G)\nabla_v F_2-(a\star\nabla_v G)F_2,\nabla_v(W_{\varphi,\ell}W_{\varphi,\ell}G))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}(\tau)dxd\tau\\
&=2\int_0^t(v\cdot\nabla_x(\varphi^{-1})W_\ell G(\tau),W_{\varphi,\ell}G(\tau))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}d\tau\\
&\quad+2\int_0^t(W_{\varphi,\ell}Q(F_1(\tau),G(\tau))+W_{\varphi,\ell}Q(G(\tau),F_2(\tau)),W_{\varphi,\ell}G(\tau))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}d\tau.
\end{aligned}$$

因为

$$|v\cdot\nabla_x(\varphi^{-1})|=|2v\cdot|x|(\varphi^{-2})|\lesssim\varphi^{-1}\tag{2.6}$$

对 $x\in\mathbb{R}^3$ 和 $v\in\mathbb{R}^3$ 一致成立, 所以有

$$|(v\cdot\nabla_x(\varphi^{-1})W_\ell G(\tau),W_{\varphi,\ell}G(\tau))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}|\lesssim\|W_{\varphi,\ell}G\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}.$$

从而, 得到

$$\begin{aligned}
\|W_{\varphi,\ell}G\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}&\lesssim\int_0^t\|W_{\varphi,\ell}G(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}d\tau\\
&\quad+\int_0^t(W_{\varphi,\ell}Q(F_1(\tau),G(\tau))+W_{\varphi,\ell}Q(G(\tau),F_2(\tau)),W_{\varphi,\ell}G(\tau))_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}d\tau.
\end{aligned}\tag{2.7}$$

若有如下估计 (这里需要使用条件 $F_1\geqslant 0$):

$$(W_{\varphi,\ell}Q(F_1,G),W_{\varphi,\ell}G)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}\lesssim\|F_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^2_{7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v))}\|W_{\varphi,\ell}G\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}\tag{2.8}$$

和

$$|(W_{\varphi,\ell}Q(G,F_2),W_{\varphi,\ell}G)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}|\lesssim\|F_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^2_{\ell+(\gamma+2)^+}(\mathbb{R}^3_v))}\|W_{\varphi,\ell}G\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})},\tag{2.9}$$

并且取 $\ell = 6$, 若

$$F_1, F_2 \in L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3_x; H^2_8(\mathbb{R}^3_v)),$$

根据 (2.7), 得到

$$\|W_{\varphi,\ell}G(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})} \lesssim A\int_0^t \|W_{\varphi,\ell}G(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}d\tau,$$

其中

$$A = C(\|F_1\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3_x; H^2_{7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v))} + \|F_2\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3_x; H^2_{\ell+(\gamma+2)^+}(\mathbb{R}^3_v))}),$$

再应用 Gronwall 不等式推导出 $W_{\varphi,\ell}G \equiv 0$, 即 $F_1 \equiv F_2$. 从而, 定理 1.1 证毕. □

注 2.1 关于证明的关键点, 有下面两点需要强调:

(1) 如果没有关于 x 变量的磨光化, 以及没有添加关于 x 变量的权函数, 等式 (2.5) 是没有意义的, 也就是说, 等式

$$(v\cdot\nabla_x G, G)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})} = 0$$

对于我们考虑的弱解是没有意义的, 这就是为什么需要引进上面复杂的磨光化算子和权函数的原因. 在证明中也可以看到, 一旦我们处理了 (2.5), 就可以令 $N\to\infty$, 也就是说去掉关于 x 变量的磨光化算子, 但是关于 x 变量的权函数需要一直保留.

(2) 在构造权函数时需要带有 v 变量是因为交换子估计 (2.6).

两个主要估计 (2.8) 和 (2.9) 的证明是本文的关键技术部分, 将在下一节中给出.

3 Landau 碰撞算子的上界估计

本节致力于证明估计 (2.8) 和 (2.9). 本文的证明中, 由于多次用到了 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式和 Sobolev 嵌入定理, 为此, 我们先给出其详细形式.

引理 3.1 [20, 21] (Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式) 令 $1 < p, q < \infty$. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, 则有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda}dxdy\right| \leqslant N_{p,\lambda,d}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)},$$

其中 $1/p + 1/q + \lambda/d = 2$, $0 < \lambda < d$.

引理 3.2 [22] (Sobolev 嵌入定理) (1) 若 $d > mp$, q 满足 $p \leqslant q \leqslant dp/(d-mp)$, 则 $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ 连续嵌入到 $L^q(\mathbb{R}^d)$. 具体地, 在给定的条件下, 存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\forall\,\varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d), \quad \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

(2) 若 $d = mp$, $p > 1$, 则对 $p \leqslant q < \infty$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ 连续嵌入到 $L^q(\mathbb{R}^d)$.

基于以上两个引理, 本文主要利用了以下引理.

引理 3.3 (1) 若 $0<\lambda<3/2$, 则有

$$\int_{|x-y|\leqslant 1}\frac{|f(y)||g(x)|}{|x-y|^{\lambda}}|h(x)|dxdy\leqslant C_{1\lambda}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)};\tag{3.1}$$

(2) 若 $3/2\leqslant\lambda<3$, 则有

$$\int_{|x-y|\leqslant 1}\frac{|f(y)||g(x)|}{|x-y|^{\lambda}}|h(x)|dxdy\leqslant C_{2\lambda}\|f\|_{H^{\frac{\lambda}{2}}(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)};\tag{3.2}$$

(3) 特别地, 当 $g(x)\equiv h(x)$ 时, 有

$$\int_{|x-y|\leqslant 1}\frac{|f(y)||g(x)|^2}{|x-y|^{\lambda}}dxdy\leqslant C_{3\lambda}\begin{cases}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}, & 0<\lambda<\dfrac{3}{2},\\ \|f\|_{H^{\frac{\lambda}{2}}(\mathbb{R}^3)}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}, & \dfrac{3}{2}\leqslant\lambda<3,\end{cases}\tag{3.3}$$

其中 $C_{1\lambda},C_{2\lambda},C_{3\lambda}>0$ 都表示与 λ 有关的常数.

证明 (1) 当 $0<\lambda<3/2$ 时, 由于 $|y|^{-\lambda}\mathbf{1}_{|y|\leqslant 1}\in L^2(\mathbb{R}^3)$, 因此利用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_{|x-y|\leqslant 1}\frac{|f(y)||g(x)|}{|x-y|^{\lambda}}|h(x)|dxdy\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^3_x}\bigg(\int_{|x-y|\leqslant 1}|x-y|^{-2\lambda}dy\bigg)^{1/2}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3_y}|f(y)|^2dy\bigg)^{1/2}|g(x)||h(x)|dx\\&\leqslant C_{1\lambda}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

(2) 当 $3/2\leqslant\lambda<3$ 时, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式, 得到

$$\begin{aligned}&\int_{|x-y|\leqslant 1}\frac{|f(y)||g(x)|}{|x-y|^{\lambda}}|h(x)|dxdy\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^3_x}\bigg(\int_{|x-y|\leqslant 1}|x-y|^{-\lambda}dy\bigg)^{1/2}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3_y}\frac{|f(y)|^2}{|x-y|^{\lambda}}dy\bigg)^{1/2}|g(x)||h(x)|dx\\&\leqslant C_{\lambda}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_y}\frac{|f(y)|^2|g(x)|^2}{|x-y|^{\lambda}}dxdy\bigg)^{1/2}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3_x}|h(x)|^2dx\bigg)^{1/2}\\&\leqslant\tilde{C}_{\lambda}\|f^2\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}\|g^2\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\quad\bigg(\text{其中 }\frac{1}{q}=1-\frac{\lambda}{3}<1\bigg)\\&\leqslant C_{2\lambda}\|f\|_{H^{\frac{\lambda}{2}}(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$

最后一个不等式中用到了引理 3.2 的 Sobolev 嵌入 $H^{\frac{\lambda}{2}}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^{2q}(\mathbb{R}^3)$. 根据以上两个估计, 当 $g(x)\equiv h(x)$ 时, 直接得到 (3.3). 引理 3.3 得证. □

接下来, 给出一些关键的估计.

命题 3.1 当 $0\geqslant\gamma>-3$ 时, 对任意的 $f\in L^{\infty}(\mathbb{R}^3_x;H^2_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v))$ 和 $h\in L^2(\mathbb{R}^3_x;H^1(\mathbb{R}^3_v))$, 有

$$(Q(f,h),h)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}\leqslant-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{D}(f,h)dx+C_{\gamma,\varepsilon}\|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^3_x;H^{\frac{|\gamma|}{2}}_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v))}\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})},\tag{3.4}$$

其中 $C_{\gamma,\varepsilon}>0$ 依赖于 γ 和 ε ($1>\varepsilon>0$ 是非常小的常数),

$$\mathcal{D}(f,h)=\sum_{i\neq j}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma}f_*[(v_i-v_{i*})\partial_j h-(v_j-v_{j*})\partial_i h]^2dvdv_*.$$

注 3.1 这里 $(Q(f,h),h)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}$ 和 $\mathcal{D}(f,h)$ 的定义中需要 $h\in L^2(\mathbb{R}^3_x;H^1(\mathbb{R}^3_v))$, (3.4) 的右边的第二项中 h 的范数必须是 L^2, 所以需要 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^2_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v))$. 在本文中, 取非常小的 $1>\varepsilon>0$ 使得积分 $\int_{\mathbb{R}^3}(1+|v|^2)^{-(3/2+\varepsilon)}dv$ 是可积的.

命题 3.1 的证明 首先, 碰撞算子 $Q(f,g)$ 可以改写为

$$Q(f,g)=\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\int_{\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(f(v_*)\partial_j g(v)-(\partial_j f)(v_*)g(v))dv_*,$$

其中 $a^{ij}(v)=|v|^\gamma(\delta_{ij}|v|^2-v_iv_j)$ (这里 δ_{ij} 是 Kronecker 常数). 关于变量 v 运用分部积分, 得到

$$\begin{aligned}
&(Q(f,h),h)_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\
&=-\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(f(v_*)\partial_i h(v)\partial_j h(v)-(\partial_j f)(v_*)h(v)\partial_i h(v))dvdv_*\\
&=-\sum_{i\neq j}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^\gamma f(v_*)((v_i-v_{i*})^2(\partial_j h)^2-(v_i-v_{i*})(v_j-v_{j*})(\partial_i h)(\partial_j h))dvdv_*\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(\partial_j f)(v_*)h(v)\partial_i h(v)dvdv_*\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^\gamma f(v_*)[(v_i-v_{i*})\partial_j h-(v_j-v_{j*})\partial_i h]^2dvdv_*\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(\partial_j f)(v_*)h(v)\partial_i h(v)dvdv_*\\
&=-\frac{1}{2}\mathcal{D}(f,h)+K(f,h),
\end{aligned}\tag{3.5}$$

其中

$$K(f,h)=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(\partial_j f)(v_*)h(v)\partial_i h(v)dvdv_*.$$

关于 $K(f,h)$ 在速度变量 v 上进行分部积分, 则有

$$K(f,h)=-\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(\partial_j f)(v_*)(\partial_i a^{ij}(v-v_*)h^2+a^{ij}(v-v_*)h\partial_i h)dvdv_*,$$

即有

$$K(f,h)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\partial_i a^{ij}(v-v_*)(\partial_j f)(v_*)h^2(v)dvdv_*.$$

由于

$$\partial_{j*}\partial_i a^{ij}(v-v_*)=\begin{cases}-\gamma\left(1+(\gamma-2)\dfrac{(v_i-v_{i*})^2}{|v-v_*|^2}\right)\left(1-\dfrac{(v_i-v_{i*})^2}{|v-v_*|^2}\right)|v-v_*|^\gamma, & i=j,\\ \left[\left(1+\gamma\dfrac{(v_j-v_{j*})^2}{|v-v_*|^2}\right)+\left(1+(\gamma-2)\dfrac{(v_j-v_{j*})^2}{|v-v_*|^2}\right)\dfrac{(v_i-v_{i*})^2}{|v-v_*|^2}\right]|v-v_*|^\gamma, & i\neq j,\end{cases}$$

这暗含了 $|\partial_{j*}\partial_i a^{ij}(v-v_*)| \lesssim |v-v_*|^\gamma$. 对 $K(f,h)$ 在变量 v_* 上进行分部积分, 利用上式和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可推导出

$$\begin{aligned}
|K(f,h)| &= \frac{1}{2}\Big|\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\partial_{j*}\partial_i a^{ij}(v-v_*)f_*h^2dvdv_*\Big| \\
&\leqslant C\int_{\{|v-v_*|>1\}}|f_*||h|^2dvdv_* + C\int_{\{|v-v_*|\leqslant 1\}}|v-v_*|^\gamma|f_*||h|^2dvdv_* \\
&\leqslant C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} + C_\gamma\|f\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \\
&\leqslant (C_\varepsilon\|f\|_{L^2_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)} + C_\gamma\|f\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)})\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \\
&\leqslant C_{\gamma,\varepsilon}\|f\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_v)},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $C_{\gamma,\varepsilon}$ 依赖于 γ 和 $\int_{\mathbb{R}^3}(1+|v|^2)^{-(3/2+\varepsilon)}dv$ ($1>\varepsilon>0$ 非常小), 第二行中用到了引理 3.3 中的 (3.3). 合并估计 (3.5) 和 (3.6) 并且对得到的结果关于变量 x 积分, 则得出期望的估计式. 命题 3.1 证毕. □

特别地, 当 $0\geqslant\gamma>-3/2$ 时, 可以比较简单地得到

$$(Q(f,h),h)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})} \leqslant -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{D}(f,h)dx + C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x;L^2_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v))}\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}.$$

为得到估计 (2.8), 我们还需计算交换子估计 $|(W_{\varphi,\ell}Q(f,g)-Q(f,W_{\varphi,\ell}g),h)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}|$, 得到一个上界. 基于命题 3.1 并考虑到弱解 F_1 的条件, 上界中需要范数 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^2_\alpha(\mathbb{R}^3_v))}$ ($\alpha\geqslant 0$)、$\|W_{\varphi,\ell}g\|_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}$、$\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}$ 及包含 ∇h 的 $\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{D}(|f|,h)dx$ 存在. 命题如下:

命题 3.2 令 $\ell\geqslant 0$. 当 $0\geqslant\gamma>-3$ 时, 对任意 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^2_{7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v))$, $g,h\in L^2(\mathbb{R}^3_x;H^1(\mathbb{R}^3_v))$, 有

$$\begin{aligned}
&|(W_{\varphi,\ell}Q(f,g)-Q(f,W_{\varphi,\ell}g),h)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}| \\
&\quad\lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^{\frac{|\gamma|}{2}}_{7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v))}\|W_{\varphi,\ell}g\|_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})} \\
&\qquad+\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{D}(|f|,h)dx\Big)^{1/2}\|f\|^{1/2}_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x;L^2_{(\gamma+2)^++3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v))}\|W_{\varphi,\ell}g\|_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 $1>\varepsilon>0$ 是一个非常小的常数.

证明 通过直接计算, 得到

$$\begin{aligned}
&(W_{\varphi,\ell}Q(f,g)-Q(f,W_{\varphi,\ell}g),h)_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \\
&\quad=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i\Big(\int_{\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(f(v_*)\partial_j g(v)-(\partial_j f)(v_*)g(v))dv_*\Big)W_{\varphi,\ell}hdv \\
&\qquad-\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i\Big(\int_{\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(f(v_*)\partial_j g(v)-(\partial_j f)(v_*)g(v))W_{\varphi,\ell}dv_*\Big)hdv \\
&\qquad+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_j W_{\varphi,\ell}g\partial_i hdvdv_* \\
&\quad=-\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*(\partial_i W_{\varphi,\ell}\partial_j gh-\partial_j W_{\varphi,\ell}g\partial_i h)dvdv_*
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(\partial_j f)(v_*)\partial_i W_{\varphi,\ell}ghdvdv_*\\
&=2\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_j W_{\varphi,\ell}g\partial_i hdvdv_*+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_j\partial_i W_{\varphi,\ell}ghdvdv_*\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\partial_j a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_i W_{\varphi,\ell}ghdvdv_*+\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(\partial_j f)(v_*)\partial_i W_{\varphi,\ell}ghdvdv_*\\
&\triangleq I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}
$$

接下来逐一估计 I_1、I_2、I_3 和 I_4. 关于第一项 I_1, 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
|I_1|&=2\Big|\sum_{i\neq j}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}[(v_i-v_{i*})\partial_j h-(v_j-v_{j*})\partial_i h]|v-v_*|^{\gamma}(v_i-v_{i*})f_*\partial_j W_{\varphi,\ell}gdvdv_*\Big|\\
&\lesssim(\mathcal{D}(|f|,h))^{1/2}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma+2}|f_*|W_{\varphi,\ell-1}^2|g|^2dvdv_*\bigg)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

当 $0\geqslant\gamma\geqslant-2$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma+2}|f_*|W_{\varphi,\ell-1}^2|g|^2dvdv_*\\
&\lesssim\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|(W_{\gamma+2}f)(v_*)||W_{\varphi,\ell-1+(\gamma+2)/2}g|^2dvdv_*\\
&\lesssim\|f\|_{L^1_{\gamma+2}(\mathbb{R}^3_v)}\|W_{\varphi,\ell-1+(\gamma+2)/2}g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\
&\lesssim\|f\|_{L^2_{\gamma+7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|W_{\varphi,\ell}g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.
\end{aligned}
$$

当 $-2\geqslant\gamma>-3$ 时, 得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma+2}|f_*|W_{\varphi,\ell-1}^2|g|^2dvdv_*\\
&\lesssim\int(\mathbf{1}_{\{|v-v_*|>1\}}+\mathbf{1}_{\{|v-v_*|\leqslant1\}}|v-v_*|^{\gamma+2})|f_*||W_{\varphi,\ell-1}g|^2dvdv_*\\
&\lesssim(\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3_v)}+\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)})\|W_{\varphi,\ell-1}g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\
&\lesssim\|f\|_{L^2_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|W_{\varphi,\ell-1}g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_v)},
\end{aligned}
$$

其中第 2 行中利用了引理 3.3 中的 (3.3). 从而, 当 $0\geqslant\gamma>-3$ 时, 得到

$$
|I_1|\lesssim(\mathcal{D}(|f|,h))^{1/2}\|f\|^{1/2}_{L^2_{(\gamma+2)^++3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|W_{\varphi,\ell}g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)},\tag{3.8}
$$

其中 $(\gamma+2)^+=\max\{\gamma+2,0\}$. 关于第二项 I_2, 由于

$$
|a^{ij}(v-v_*)|\lesssim|v-v_*|^{\gamma+2},\quad|\partial_j\partial_i W_{\varphi,\ell}|\lesssim W_{\varphi,\ell-2},
$$

因此有

$$
|I_2|\lesssim\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma+2}|f_*||W_{\varphi,\ell-2}gh|dvdv_*
$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} |v-v_*|^\gamma |(W_2 f)(v_*)||W_{\varphi,\ell} g||h| dv dv_* \\
&\lesssim \int (\mathbf{1}_{\{|v-v_*|>1\}} + \mathbf{1}_{\{|v-v_*|\leqslant 1\}} |v-v_*|^\gamma)|(W_2 f)(v_*)||W_{\varphi,\ell} g||h| dv dv_* \\
&\lesssim (\|f\|_{L^1_2(\mathbb{R}^3_v)} + \|W_2 f\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)}) \|W_{\varphi,\ell} g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \\
&\lesssim (\|f\|_{L^2_{7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)} + \|f\|_{H_2^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)}) \|W_{\varphi,\ell} g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \\
&\lesssim \|f\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}_{7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)} \|W_{\varphi,\ell} g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}, \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

这里第 3 行中用到了引理 3.3 中的 (3.1) 和 (3.2).

类似于 I_2 的证明, 由于

$$
|\partial_j a^{ij}(v-v_*)| \lesssim |v-v_*|^{\gamma+1}, \quad |\partial_{v_i} W_{\varphi,\ell}| \lesssim W_{\varphi,\ell-1},
$$

我们再次利用引理 3.3, 得到

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} |v-v_*|^{\gamma+1} |f_*||W_{\varphi,\ell-1} g h| dv dv_* \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} |v-v_*|^\gamma |(W_1 f)(v_*)||W_{\varphi,\ell} g||h| dv dv_* \\
&\lesssim \int (\mathbf{1}_{\{|v-v_*|>1\}} + \mathbf{1}_{\{|v-v_*|\leqslant 1\}} |v-v_*|^\gamma)|(W_1 f)(v_*)||W_{\varphi,\ell} g||h| dv dv_* \\
&\lesssim (\|f\|_{L^1_1(\mathbb{R}^3_v)} + \|W_1 f\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)}) \|W_{\varphi,\ell} g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \\
&\lesssim (\|f\|_{L^2_{5/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)} + \|f\|_{H_1^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)}) \|W_{\varphi,\ell} g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \\
&\lesssim \|f\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}_{5/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)} \|W_{\varphi,\ell} g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

为了估计最后一项 I_4, 利用分部积分推导出

$$
\begin{aligned}
|I_4| &= \Big| \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \partial_{j_*} a^{ij}(v-v_*) f_* \partial_i W_{\varphi,\ell} g h dv dv_* \Big| \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} |v-v_*|^{\gamma+1} |f_*||W_{\varphi,\ell-1} g||h| dv dv_*,
\end{aligned}
$$

然后, 根据与 I_3 的类似计算, 得到

$$
|I_4| \lesssim \|f\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}_{5/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)} \|W_{\varphi,\ell} g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}. \qquad (3.11)
$$

合并估计 (3.8)–(3.11), 再关于变量 x 积分可推导出期望的不等式 (3.7). 命题 3.2 证毕. □

估计 (2.8) 的证明 运用命题 3.1 和 3.2 于 $f = F_1 \geqslant 0$, $g = G$, $h = W_{\varphi,\ell} G$, 且利用 Young 不等式, 得到

$$
\begin{aligned}
&|(W_{\varphi,\ell} Q(F_1, G), W_{\varphi,\ell} G)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}| \\
&\quad \leqslant C \|F_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x; H^{\frac{|\gamma|}{2}}_{7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v))} \|W_{\varphi,\ell} G\|^2_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{D}(F_1,W_{\varphi,\ell}G)dx+\frac{1}{2}\bigg(\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{D}(|F_1|,W_{\varphi,\ell}G)dx\bigg).$$

再利用弱解 F_1 的非负性, 即 $F_1\geqslant 0$, 可以立即得到估计 (2.8). □

为证明估计 (2.9), 我们需要计算估计 $|(W_{\varphi,\ell}Q(f,g),h)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}|$, 得到一个上界. 考虑到弱解 F_2 的条件, 上界中需要范数 $\|W_{\varphi,\ell}f\|_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}$、$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^2_{\ell_0}(\mathbb{R}^3_v))}$ 和 $\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}$ 存在. 命题如下:

命题 3.3 令 $\ell\geqslant 6$. 当 $0\geqslant\gamma>-3$ 时, 对任意的 $W_{\varphi,\ell}f\in L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})$, $g\in L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^2_{\ell+(\gamma+2)^+}(\mathbb{R}^3_v))$, 以及任意的 $h\in L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})$, 有

$$|(W_{\varphi,\ell}Q(f,g),h)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}|\lesssim\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x;H^2_{\ell+(\gamma+2)^+}(\mathbb{R}^3_v))}\|W_{\varphi,\ell}f\|_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}.$$

令 $f=G$, $g=F_2$, $h=W_{\varphi,\ell}G$, 可以得出估计 (2.9).

证明 首先,

$$\begin{aligned}(W_{\varphi,\ell}Q(f,g),h)_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}&=\bigg(Q\bigg(\frac{f}{\langle x\rangle^2},W_\ell g\bigg),\frac{\langle x\rangle^2}{\varphi(v,x)}h\bigg)_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\&\quad+\bigg(W_\ell Q\bigg(\frac{f}{\langle x\rangle^2},g\bigg)-Q\bigg(\frac{f}{\langle x\rangle^2},W_\ell g\bigg),\frac{\langle x\rangle^2}{\varphi(v,x)}h\bigg)_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\&\triangleq A_1+A_2.\end{aligned}$$

为了估计 A_1, 我们将双线性碰撞算子 Q 改写为

$$\begin{aligned}(Q(f,g),h)_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}&=\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}[\partial_i a^{ij}(v-v_*)\partial_j g(v)+a^{ij}(v-v_*)\partial_i\partial_j g(v)]f(v_*)h(v)dvdv_*\\&\quad-\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}[\partial_i a^{ij}(v-v_*)(\partial_j f)(v_*)g(v)+a^{ij}(v-v_*)(\partial_j f)(v_*)\partial_i g(v)]h(v)dvdv_*\\&=\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(\partial_i a^{ij}(v-v_*)\partial_j g(v)+\partial_{j*}a^{ij}(v-v_*)\partial_i g(v))f(v_*)h(v)dvdv_*\\&\quad+\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)\partial_i\partial_j g(v)f(v_*)h(v)dvdv_*\\&\quad+\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\partial_{j*}\partial_i a^{ij}(v-v_*)f(v_*)g(v)h(v)dvdv_*\\&\triangleq J_1+J_2+J_3.\end{aligned}$$

关于 J_1 和 J_2, 在非常软位势 $-3<\gamma\leqslant -2$ 的情形下, 运用 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 3.3 中的 (3.1) 和 (3.2), 得出

$$\begin{aligned}|J_1|+|J_2|&\lesssim\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(|v-v_*|^{\gamma+1}|\nabla_v g|+|v-v_*|^{\gamma+2}|\nabla_v^2 g|)|f_*||h|dvdv_*\\&\lesssim\int_{\{|v-v_*|>1\}}|\nabla_v g||f_*||h|+|\nabla_v^2 g||f_*||h|dvdv_*\\&\quad+\int_{\{|v-v_*|\leqslant 1\}}(|v-v_*|^{\gamma+1}|\nabla_v g|+|v-v_*|^{\gamma+2}|\nabla_v^2 g|)|f_*||h|dvdv_*\\&\lesssim\|g\|_{H^2(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}+(\|\nabla_v g\|_{H^{\frac{|\gamma+1|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)}+\|\nabla_v^2 g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)})\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\end{aligned}$$

$$\lesssim \|g\|_{H^2(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.$$

在 $-1<\gamma\leqslant 0$ 的情形下, 我们改写 J_1 为

$$\begin{aligned}J_1&=\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(\partial_i a^{ij}(v-v_*)+\partial_{i*}a^{ij}(v-v_*))\partial_j g(v)f(v_*)h(v)dvdv_*\\&=\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(\partial_i a^{ij}(v-v_*)+\partial_{i*}a^{ij}(v-v_*))(W_{\gamma+1}(v))^{-1}\partial_j(W_{\gamma+1}g)f(v_*)h(v)dvdv_*\\&\quad-(\gamma+1)\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(\partial_i a^{ij}(v-v_*)+\partial_{i*}a^{ij}(v-v_*))\frac{v_j}{1+|v|^2}g(v)f(v_*)h(v)dvdv_*\\&\triangleq J_{11}+J_{12}.\end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 则有

$$\begin{aligned}|J_{11}|+|J_{12}|&\lesssim\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(|\nabla_v(W_{\gamma+1}g)|+|W_{\gamma+1}g|)|(W_{\gamma+1}f)(v_*)||h|dvdv_*\\&\lesssim(\|\nabla_v(W_{\gamma+1}g)\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}+\|W_{\gamma+1}g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)})\|f\|_{L^1_{\gamma+1}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\&\lesssim\|g\|_{H^1_{\gamma+1}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{3/2+(\gamma+1)+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.\end{aligned}$$

当 $-2<\gamma\leqslant -1$ 时, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 3.3 中的 (3.1), 推导出

$$\begin{aligned}|J_1|&\lesssim\int(\mathbf{1}_{\{|v-v_*|>1\}}+\mathbf{1}_{\{|v-v_*|\leqslant 1\}}|v-v_*|^{\gamma+1})|\nabla_v g||f_*||h|dvdv_*\\&\lesssim\|\nabla_v g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}(\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3_v)}+\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)})\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\&\lesssim\|\nabla_v g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.\end{aligned}$$

关于 J_2, 当 $-2<\gamma\leqslant 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}J_2&=\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(W_{\gamma+2}(v))^{-1}\partial_i\partial_j(W_{\gamma+2}g)(v)f(v_*)h(v)dvdv_*\\&\quad-\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(W_{\gamma+2}(v))^{-1}(\partial_i\partial_j W_{\gamma+2})(v)g(v)f(v_*)h(v)dvdv_*\\&\quad-2\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(W_{\gamma+2}(v))^{-1}(\partial_i W_{\gamma+2})(v)(\partial_j g)(v)f(v_*)h(v)dvdv_*\\&\triangleq J_{21}+J_{22}+J_{23}.\end{aligned}$$

由于

$$|(W_{\gamma+2}(v))^{-1}(\partial_i\partial_j W_{\gamma+2})(v)|\lesssim(1+|v|^2)^{-1}\lesssim C,$$

当 $-2<\gamma\leqslant 0$ 时, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式估计 J_{21} 和 J_{22} 如下:

$$\begin{aligned}|J_{21}|+|J_{22}|&\lesssim\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(|\nabla_v^2(W_{\gamma+2}g)|+|(W_{\gamma+2}g)|)|(W_{\gamma+2}f)(v_*)||h(v)|dvdv_*\\&\lesssim(\|\nabla_v^2(W_{\gamma+2}g)\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}+\|W_{\gamma+2}g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)})\|f\|_{L^1_{\gamma+2}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\end{aligned}$$

$$\lesssim \|g\|_{H^2_{\gamma+2}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{3/2+(\gamma+2)+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.$$

当 $-2<\gamma\leqslant -1$ 时, 由于

$$|(W_{\gamma+2}(v))^{-1}(\partial_i W_{\gamma+2})(v)|\lesssim (1+|v|^2)^{-1/2},$$

因此有

$$\begin{aligned}|J_{23}|&\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma+1}|\nabla_v g(v)||(W_1 f)(v_*)||h(v)|dvdv_*\\&\lesssim \int(\mathbf{1}_{\{|v-v_*|>1\}}+\mathbf{1}_{\{|v-v_*|\leqslant 1\}}|v-v_*|^{\gamma+1})|\nabla_v g(v)||(W_1 f)(v_*)||h(v)|dvdv_*\\&\lesssim \|\nabla_v g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}(\|f\|_{L^1_1(\mathbb{R}^3_v)}+\|f\|_{L^2_1(\mathbb{R}^3_v)})\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\&\lesssim \|\nabla_v g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{5/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.\end{aligned}$$

当 $-1<\gamma\leqslant 0$ 时, 我们改写 J_{23} 为

$$\begin{aligned}J_{23}=&-2\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(W_{\gamma+2}(v)W_{\gamma+1}(v))^{-1}(\partial_i W_{\gamma+2})(v)\partial_j(W_{\gamma+1}g)(v)f(v_*)h(v)dvdv_*\\&+2\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(W_{\gamma+2}(v)W_{\gamma+1}(v))^{-1}(\partial_i W_{\gamma+2})(v)(\partial_j W_{\gamma+1})(v)g(v)f(v_*)h(v)dvdv_*\\\triangleq\ &J^1_{23}+J^2_{23},\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}|J^1_{23}|+|J^2_{23}|&\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(|\nabla_v(W_{\gamma+1}g)|+|(W_{\gamma+1}g)|)|(W_{\gamma+2}f)(v_*)||h(v)|dvdv_*\\&\lesssim (\|\nabla_v(W_{\gamma+1}g)\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}+\|W_{\gamma+1}g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)})\|f\|_{L^1_{\gamma+2}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\&\lesssim \|g\|_{H^1_{(\gamma+1)}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{3/2+(\gamma+2)^+ +\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.\end{aligned}$$

因此, 当 $-3<\gamma\leqslant 0$ 时,

$$|J_1|+|J_2|\lesssim \|g\|_{H^2_{(\gamma+2)^+}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{\bar\gamma}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)},$$

其中

$$\bar\gamma=\max\left\{\frac{5}{2}+\varepsilon,\frac{3}{2}+(\gamma+2)^+ +\varepsilon\right\}.$$

当 $-3<\gamma\leqslant 0$ 时, 我们估计 J_3 为

$$\begin{aligned}J_3&\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma}|g||f_*||h|dvdv_*\\&\lesssim \int_{\{|v-v_*|>1\}}|g||f_*||h|dvdv_*+\int_{\{|v-v_*|\leqslant 1\}}|v-v_*|^{\gamma}|g||f_*||h|dvdv_*\\&\lesssim \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}+\|g\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\&\lesssim (\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}+\|g\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)})\|f\|_{L^2_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\end{aligned}$$

$$\lesssim \|g\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)},$$

其中第 2 行中用到了引理 3.3 中的 (3.1) 和 (3.2). 合并以上关于 J_1、J_2 和 J_3 的估计, 当 $-3<\gamma\leqslant 0$ 时, 有

$$|(Q(f,g),h)_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}|\lesssim \|g\|_{H^2_{(\gamma+2)^+}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{\tilde{\gamma}}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}. \tag{3.12}$$

基于不等式 (3.12), 得到 A_1 的估计如下:

$$\begin{aligned}|A_1|&\lesssim \|W_\ell g\|_{H^2_{(\gamma+2)^+}(\mathbb{R}^3_v)}\left\|\frac{\varphi(v,x)}{\langle x\rangle^2}\frac{f}{\varphi(v,x)}\right\|_{L^2_{\tilde{\gamma}}(\mathbb{R}^3_v)}\left\|\frac{\langle x\rangle^2}{\varphi(v,x)}h\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\&\lesssim \|g\|_{H^2_{\ell+(\gamma+2)^+}(\mathbb{R}^3_v)}\|W_{\varphi,\tilde{\gamma}+2}f\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

关于 A_2, 我们计算如下:

$$\begin{aligned}&(W_\ell Q(f,g)-Q(f,W_\ell g),h)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}\\&=\sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i\bigg(\int_{\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(f(v_*)\partial_j g(v)-(\partial_j f)(v_*)g(v))dv_*\bigg)W_\ell h dv\\&\quad-\sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i\bigg(\int_{\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(f(v_*)\partial_j g(v)-(\partial_j f)(v_*)g(v))W_\ell dv_*\bigg)h dv\\&\quad+\sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_j W_\ell g\partial_i h dv dv_*\\&=-\sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*(\partial_i W_\ell\partial_j g h-\partial_j W_\ell g\partial_i h)dv dv_*\\&\quad+\sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)(\partial_j f)(v_*)\partial_i W_\ell g h dv dv_*\\&=-2\sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_i W_\ell\partial_j g h dv dv_*\\&\quad-\sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_i\partial_j W_\ell g h dv dv_*\\&\quad-\sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(\partial_i a^{ij}(v-v_*)+\partial_{i*}a^{ij}(v-v_*))\partial_j W_\ell g f_* h dv dv_*\\&\triangleq B_1+B_2+B_3.\end{aligned}$$

接下来逐一估计 B_1、B_2 和 B_3. 当 $-2\leqslant\gamma\leqslant 0$ 时, 我们改写 B_1 为

$$\begin{aligned}B_1=&-2\sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_i W_\ell(W_{\ell+\gamma+1}(v))^{-1}\partial_j(W_{\ell+\gamma+1}g)(v)h(v)dv dv_*\\&+2\sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_i W_\ell(W_{\ell+\gamma+1}(v))^{-1}(\partial_j W_{\ell+\gamma+1})(v)g(v)h(v)dv dv_*\end{aligned}$$

$$\triangleq B_{11}+B_{12}.$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned}|B_{11}|+|B_{12}| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}(|\nabla_v(W_{\ell+\gamma+1}g)|+|W_{\ell+\gamma+1}g|)|(W_{\gamma+2}f)(v_*)||h|dvdv_*\\ &\lesssim (\|\nabla_v(W_{\ell+\gamma+1}g)\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}+\|W_{\ell+\gamma+1}g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)})\|f\|_{L^1_{\gamma+2}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\ &\lesssim \|g\|_{H^1_{\ell+\gamma+1}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{3/2+(\gamma+2)+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.\end{aligned}$$

当 $-3<\gamma<-2$ 时, 我们再次改写 B_1 为

$$\begin{aligned}B_1 &= -2\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_iW_\ell(W_{\ell-1}(v))^{-1}\partial_j(W_{\ell-1}g)(v)h(v)dvdv_*\\ &\quad+2\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}a^{ij}(v-v_*)f_*\partial_iW_\ell(W_{\ell-1}(v))^{-1}(\partial_jW_{\ell-1})(v)g(v)h(v)dvdv_*\\ &\triangleq \tilde{B}_{11}+\tilde{B}_{12}.\end{aligned}$$

类似地, 估计 $\tilde{B}_{11}$ 和 $\tilde{B}_{12}$ 为

$$\begin{aligned}|\tilde{B}_{11}|+|\tilde{B}_{12}| &\lesssim \int(\mathbf{1}_{\{|v-v_*|>1\}}+\mathbf{1}_{\{|v-v_*|\leqslant1\}}|v-v_*|^{\gamma+2})(|\nabla_v(W_{\ell-1}g)|+|W_{\ell-1}g|)|f_*||h|dvdv_*\\ &\lesssim (\|\nabla_v(W_{\ell-1}g)\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}+\|W_{\ell-1}g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)})(\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3_v)}+\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)})\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\ &\lesssim \|g\|_{H^1_{\ell-1}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{3/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.\end{aligned}$$

从而, 当 $-3<\gamma\leqslant0$ 时, 有

$$B_1\lesssim\|g\|_{H^1_{\ell-1+(\gamma+2)^+}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{3/2+(\gamma+2)^++\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.$$

当 $-3<\gamma\leqslant0$ 时, 我们估计 B_2 为

$$\begin{aligned}|B_2| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma+2}W_{\ell-2}|g||f_*||h|dvdv_*\\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma}|W_\ell g||(W_2f)(v_*)||h|dvdv_*\\ &\lesssim \int(\mathbf{1}_{\{|v-v_*|>1\}}+\mathbf{1}_{\{|v-v_*|\leqslant1\}}|v-v_*|^{\gamma})|W_\ell g||(W_2f)(v_*)||h|dvdv_*\\ &\lesssim (\|W_\ell g\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}+\|W_\ell g\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)})\|W_2f\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\ &\lesssim \|W_\ell g\|_{H^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.\end{aligned}$$

对于最后一项 B_3, 类似于 I_3 的证明, 当 $-3<\gamma\leqslant0$ 时, 有

$$\begin{aligned}|B_3| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma+1}W_{\ell-1}|g||f_*||h|dvdv_*\\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}|v-v_*|^{\gamma}|W_\ell g||(W_1f)(v_*)||h|dvdv_*\end{aligned}$$

$$\lesssim \|g\|_{H_\ell^{\frac{|\gamma|}{2}}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{5/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}.$$

合并以上关于 B_1、B_2 和 B_3 的估计, 则有

$$|(W_\ell Q(f,g)-Q(f,W_\ell g),h)_{L^2(\mathbb{R}^6_{x,v})}|\lesssim \|g\|_{H^2_{\ell+(\gamma+1)^+}(\mathbb{R}^3_v)}\|f\|_{L^2_{7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}. \tag{3.14}$$

因此, 利用估计 (3.14), 推导出

$$\begin{aligned} A_2 &\lesssim \|g\|_{H^2_{\ell+(\gamma+1)^+}(\mathbb{R}^3_v)}\left\|\frac{\varphi(v,x)}{\langle x\rangle^2}\frac{f}{\varphi(v,x)}\right\|_{L^2_{7/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^3_v)}\left\|\frac{\langle x\rangle^2}{\varphi(v,x)}h\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\\ &\lesssim \|g\|_{H^2_{\ell+(\gamma+1)^+}(\mathbb{R}^3_v)}\|W_{\varphi,6}f\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

合并估计 (3.13) 和 (3.15), 命题 3.3 证毕. □

致谢 作者特别感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1 DiPerna R J, Lions P L. On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability. Ann of Math (2), 1989, 130: 321–366
2 Alexandre R, Villani C. On the Boltzmann equation for long-range interactions. Comm Pure Appl Math, 2002, 55: 30–70
3 Alexandre R, Villani C. On the Landau approximation in plasma physics. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2004, 21: 61–95
4 Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. Existence of local solutions for the Boltzmann equation without angular cutoff. C R Math Acad Sci Paris, 2009, 347: 1237–1242
5 Guo Y. The Landau equation in a periodic box. Comm Math Phys, 2002, 231: 391–434
6 Guo Y. The Boltzmann equation in the whole space. Indiana Univ Math J, 2004, 53: 1081–1094
7 Hsiao L, Yu H J. On the Cauchy problem of the Boltzmann and Landau equations with soft potentials. Quart Appl Math, 2007, 65: 281–315
8 Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. Regularizing effect and local existence for the non-cutoff Boltzmann equation. Arch Ration Mech Anal, 2010, 198: 39–123
9 Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. Global existence and full regularity of the Boltzmann equation without angular cutoff. Comm Math Phys, 2011, 304: 513–581
10 Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space, II: Global existence for hard potential. Anal Appl (Singap), 2011, 9: 113–134
11 Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: Qualitative properties of solutions. Arch Ration Mech Anal, 2011, 202: 599–661
12 Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space, I: Global existence for soft potential. J Funct Anal, 2012, 262: 915–1010
13 Lions P L. Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications, I. J Math Kyoto Univ, 1994, 34: 391–427
14 Lions P L. Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications, II. J Math Kyoto Univ, 1994, 34: 429–461
15 Lions P L. Compactness in Boltzmann's equation via Fourier integral operators and applications, III. J Math Kyoto Univ, 1994, 34: 539–584
16 Lu X. A result on uniqueness of mild solutions of Boltzmann equations. Transport Theory Statist Phys, 1997, 26: 209–220
17 Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. Uniqueness of solutions for the non-cutoff Boltzmann equation with soft potential. Kinet Relat Models, 2011, 4: 919–934
18 Cao H M, Li H G, Xu C J, et al. Well-posedness of Cauchy problem for Landau equation in critical Besov space. Kinet Relat Models, 2019, 12: 829–884

19 Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. Smoothing effect of weak solutions for the spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff. Kyoto J Math, 2012, 52: 433–463
20 Hardy G H, Littlewood J E. Some properties of fractional integrals, I. Math Z, 1928, 27: 565–606
21 Sobolev S L. On a theorem of functional analysis. Amer Math Soc Transl Ser 2, 1963, 34: 39–68
22 Demengel F, Demengel G. Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations. London: Springer, 2012

On the uniqueness of weak solutions for Cauchy problem to Landau equation

Hongmei Cao & Chaojiang Xu

Abstract In this paper, we study the Cauchy problem of the nonlinear and spatially inhomogeneous Landau equation with general initial values, and prove the uniqueness of a class of weak solutions in Sobolev spaces with polynomial weights.

Keywords **inhomogeneous Landau equation, weak solution, uniqueness**

MSC(2020) **35D30, 35E15, 74H25, 82C40**

doi: 10.1360/SSM-2020-0166