中国科学: 数学 2026 年 第 56 卷 第 8 期: 1559 ~ 1576
SCIENTIA SINICA Mathematica
综 述

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

分形上的能量型

献给文志英教授 80 寿辰

曹仕平[1], 邱华[2*]

1. Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA 98195, USA;
2. 南京大学数学学院, 南京 210093
E-mail: spcao@uw.edu, huaqiu@nju.edu.cn

收稿日期: 2024-09-06; 接受日期: 2024-12-13; 网络出版日期: 2025-02-20; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12471087) 资助项目

摘要 本文简要介绍分形上分析的研究历史、核心问题和近年来的重要进展. 首先概述有限图上的电阻型. 然后回顾 Sierpiński 垫片和 Sierpiński 地毯这两个经典分形的一些自然推广上的能量型的分析构造方法与研究工具. 最后讨论当前分形上分析领域的相关活跃问题和研究展望.

关键词 分形分析 自相似集 Dirichlet 型 Laplace 算子 Sierpiński 垫片 Sierpiński 地毯

MSC (2020) 主题分类 28A80, 31E05

1 引言

20 世纪 80 年代, 人们开始关心分形的动态特性, 如分形上的热扩散、多孔媒介中的传输和分形结构材料的振动 (参见文献 [1, 65, 106]). Goldstein [53], Kusuoka [88], Barlow 和 Perkins [18] 利用随机过程理论在 Sierpiński 垫片 (Sierpiński gasket, SG) 上构造性地证明了 Brown 运动的存在性, 并得到了次 Gauss 型的转移概率估计. 随后, Barlow 和 Bass [11, 13, 14] 构造了 Sierpiński 地毯 (Sierpiński carpet, SC) 上的 Brown 运动并同时也获得了转移概率估计. 概率方法所构造的 Brown 运动对应于分形上的局部、正则、自相似的 Dirichlet 型 [44, 51], 上述工作拉开了分形上的概率与分析的研究序幕. SG 作为后临界有限 (post-critically finite, p.c.f.) 自相似集的代表, SC 作为非 p.c.f. (后临界无限) 自相似集的代表 (见图 1), 刻画其上 Laplace 算子 (Brown 运动的无穷小生成子) 与 Dirichlet 型的分析构造成为分形分析领域内的核心问题.

1989 年, 通过在 SG 的逼近图序列上构建相容的图能量序列, Kigami [77] 用纯分析的方法构造了 SG 上的自相似 Dirichlet 型, 并随后将这一构造推广到了 p.c.f. 自相似集上 (参见文献 [78]). 1992 年, Kusuoka 和 Zhou [89] 通过在 SC 的逼近图序列上比较和估计 Poincaré 常数序列和电阻常数序列, 给出了构造自相似 Dirichlet 型的分析方法框架, 但是其中关键的电阻下界估计借助了 Barlow 和 Bass [11]

英文引用格式: Cao S, Qiu H. Energy forms on fractals (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1559–1576, doi: 10.1360/SSM-2024-0275

© 2025《中国科学》杂志社

的 “骑士移动” (Knight move) 概率方法. Dirichlet 型的引入给分形上扩散过程的研究提供了许多有用工具. 首先, 分形上扩散运动的一些特性, 尤其是次 Gauss 型热核估计 (参见文献 [13, 14, 49, 62, 81]), 可以借助 Dirichlet 型上的各种不等式得到理解. 其次, 分形上 Dirichlet 型的构造相较于扩散过程的概率构造更加简单. 特别地, p.c.f. 自相似集 [108] 和 SC [15] 上 Brown 运动的唯一性的证明都利用了 Dirichlet 型工具.

本文从 SG 和 SC 这两个最经典的自相似集出发, 介绍分形上 Dirichlet 型的分析构造的方法及工具、历史与现状. 同时, 也介绍诸如 p- 能量型、Weyl 谱渐近分析、函数空间、边值问题和迹定理等相关重要研究方向的最新进展.

2 图上的电阻型

作为预备, 简要介绍有限图上的电阻型. 设 V 是一个有限集, $\#V \geqslant 2$. 对任意点对 $\{x, y\} \subset V$, 分配非负权重常数 $c_{x,y}$ 满足 $c_{x,y} = c_{y,x}$, $c_{x,x} = 0$, 并称 $c_{x,y}$ 为点对 $\{x, y\}$ 之间的电导 (conductance, 电阻的倒数), 称 (V, c) 为 V 上的一个电阻网络. 记 $l(V)$ 为 V 上实值函数的全体, 给定电阻网络 (V, c), 引入 $l(V)$ 上的对称双线性型:

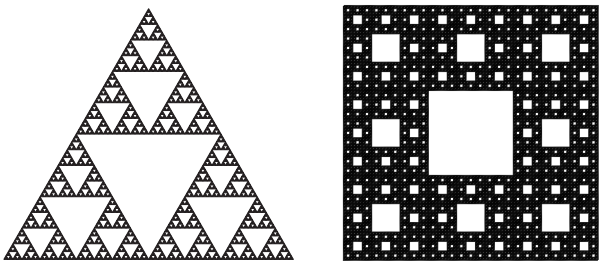
$$\mathcal{E}(f, g) := \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} c_{x,y}(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)), \quad \text{其中 } f, g \in l(V).$$

称 $\mathcal{E}$ 是 V 上的一个电阻型 (resistance form, 也称能量型), 如果对所有非常值函数 f 均有 $\mathcal{E}(f, f) \neq 0$ 成立. 记 $x \sim y$, 如果 $c_{x,y} > 0$, 并且令 $E = \{\{x, y\} \subset V : x \sim y\}$. 那么如果 $\mathcal{E}$ 是 V 上的一个电阻型, 可以验证 $G := (V, E)$ 是一个有限连通图. 图上的电阻型和图上的随机游走存在着紧密的联系: 令 $c_x = \sum_{y \in V} c_{x,y}$ 和 $p_{x,y} = \frac{c_{x,y}}{c_x}$, 可以看到 $P := (p_{x,y})_{x,y \in V}$ 是一个 V 上的转移概率矩阵, 其对应的 Markov 过程 $X_0, X_1, X_2, \ldots$ 称为图 G 上的随机游走. 感兴趣的读者可参见文献 [10, 115] 来了解图上随机游走和电阻网络理论.

如果 U 是 V 的非空真子集, $\#U \geqslant 2$, 对每个 $u \in l(U)$, 定义

$$\mathcal{E}|_U(u, u) := \min\{\mathcal{E}(f, f) : f \in l(V), f|_U = u\}; \tag{2.1}$$

并且对 $u, v \in l(U)$, 定义 $\mathcal{E}|_U(u, v) := \frac{1}{4}(\mathcal{E}|_U(u + v, u + v) - \mathcal{E}|_U(u - v, u - v))$. 称 $\mathcal{E}|_U$ 为电阻型 $\mathcal{E}$ 在 U 上的迹 (trace). 根据文献 [10, 命题 2.48], 可以看到 $\mathcal{E}|_U$ 是 U 上的一个电阻型. 在概率意义上, $\mathcal{E}|_U$ 生成的随机游走 $X^{(U)}$ 对应于 V 上随机游走 X 在 U 上的迹: 如果 $X_0, X_1, \ldots$ 是 V 上从 $X_0 = x \in U$ 出



(a) (b)

图 1 (a) Sierpiński 垫片; (b) Sierpiński 地毯

发的随机游走, 则 $X_0^{(U)}=X_0$, $X_1^{(U)}$ 是 X_0 后 (即 $X_1,X_2,\ldots$) 第一个 $U\setminus\{X_0\}$ 中的点, $X_2^{(U)}$ 是 $X_1^{(U)}$ 后第一个 $U\setminus\{X_1^{(U)}\}$ 中的点, 依此类推, 这给出了 U 上对应于 $\mathcal{E}|_U$ 的随机游走.

我们可以定义 V 上对应 $\mathcal{E}$ 的 Laplace 算子 $\Delta: l(V)\to l(V)$ 如下:

$$\Delta f(x)=\sum_{y\in V}c_{x,y}(f(y)-f(x)),\quad \text{其中 } x\in V.$$

可以看到

$$\mathcal{E}(f,g)=-\sum_{x\in V}\Delta f(x)g(x),\quad f,g\in l(V).$$

称 f 在子集 $D\subset V$ 上调和, 如果 $\Delta f(x)=0$ 对所有的 $x\in D$ 成立. 在这里, 我们指出 (2.1) 中的最小值被唯一的函数 f 取得, 并且 f 在 $V\setminus U$ 上是调和的 (参见文献 [10, 命题 2.47]), 称这样的 f 为函数 u 在 V 上的调和扩张 (harmonic extension).

例 2.1 考虑在 $V=\{0,1/2,1\}$ 上的电阻型 $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(f,g)=(f(0)-f(1/2))(g(0)-g(1/2))+(f(1/2)-f(1))(g(1/2)-g(1)),\quad f,g\in l(V).$$

其对应的 Laplace 算子 Δ 满足: 对 $f\in l(V)$, 有

$$\begin{cases}\Delta f(0)=f(1/2)-f(0),\\ \Delta f(1/2)=f(0)+f(1)-2f(1/2),\\ \Delta f(1)=f(1/2)-f(1).\end{cases}$$

如果 u 是 $U=\{0,1\}$ 上的函数, 则 u 在 V 上的调和扩张 f 在 $1/2$ 点处的取值为 $f(1/2)=\frac{1}{2}u(0)+\frac{1}{2}u(1)$ (注意到此时 $\Delta f(1/2)=0$). 所以 $\mathcal{E}|_U(u,u)=\mathcal{E}(f,f)=\frac{1}{2}(u(0)-u(1))^2$.

3 p.c.f. 自相似集上的 Dirichlet 型

1989 年, Kigami [77] 通过逼近图能量的极限定义了 SG 上的能量型. 令 $p_0=(0,0)$, $p_1=(1,0)$, $p_2=(1/2,\sqrt{3}/2)$, 以及 $\Psi_i(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}p_i$, $i=0,1,2$. Sierpiński 垫片 (SG) 可以被定义为唯一的 $\mathbb{R}^2$ 上的非空紧集, 其满足 $\mathrm{SG}=\bigcup_{i=0}^2\Psi_i(\mathrm{SG})$. 自然地, 可以定义一列 SG 的逼近点集 V_n, $n\geqslant 0$. 首先, $V_0=\{p_0,p_1,p_2\}$; 接着对 $n\geqslant 1$, 我们递归地定义 $V_n=\bigcup_{i=0}^2\Psi_i(V_{n-1})$.

记 $x\sim_n y$, 如果 $x,y\in V_n$, 并且以 x 和 y 为顶点的长度为 2^{-n} 的线段包含在 SG 内, 则关系 "$\sim_n$" 自然地诱导了 V_n 上的一个图结构. 图 2 展示了 V_0, V_1 和 V_2 以及其上的图结构. 在每个 V_n 上, 引入

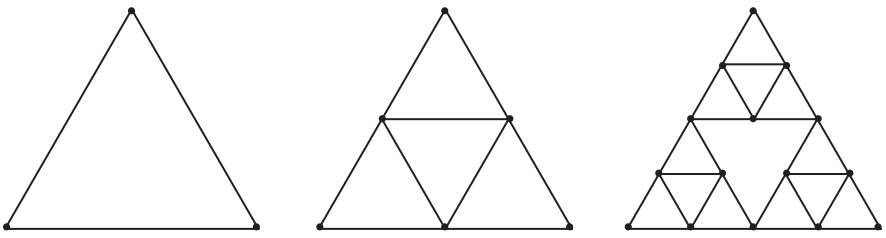


图 2 SG 的逼近图 V_0, V_1 和 V_2

电阻型

$$\mathcal{E}_n(f,g)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n\sum_{x,y\in V_n:x\sim_n y}(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)),\quad f,g\in l(V_n).$$

令 f 是 V_1 上的函数, 并且 f 在 $V_1\setminus V_0$ 上调和 (依电阻型 $\mathcal{E}_1$). 则 f 在 $V_1\setminus V_0$ 上的取值由 $f|_{V_0}$ 唯一决定, 如图 3 所示.

通过计算, 可以看到 $\mathcal{E}_1(f,f)=\mathcal{E}_0(f|_{V_0},f|_{V_0})$. 这表明 $\mathcal{E}_1|_{V_0}=\mathcal{E}_0$. 更一般地, 由自相似性, 可以看到 $\mathcal{E}_n|_{V_{n-1}}=\mathcal{E}_{n-1}$ 对 $n\geqslant 1$ 成立. Kigami [80] 称 (V_n,Δ_n) 为相容序列 (compatible sequence), 其中 Δ_n 是 $\mathcal{E}_n$ 对应的 Laplace 算子. 记 $C(\mathrm{SG})$ 为 SG 上全体连续函数构成的集合, 可以看到对于相容序列, 有

$$\mathcal{E}_0(f|_{V_0},f|_{V_0})\leqslant\mathcal{E}_1(f|_{V_1},f|_{V_1})\leqslant\mathcal{E}_2(f|_{V_2},f|_{V_2})\leqslant\cdots,\quad \text{对所有 } f\in C(\mathrm{SG}),$$

其中, 每个 "=" 成立当且仅当 $f|_{V_n}$ 是 $f|_{V_{n-1}}$ 在 V_n 上的调和扩张. 进一步地, 定义 SG 上的能量型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 为 $\mathcal{E}_n$ 的极限:

$$\mathcal{E}(f,g):=\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_n(f,g),\quad \text{对任意 } f,g\in\mathcal{F}:=\Big\{f\in C(\mathrm{SG}):\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_n(f,f)<\infty\Big\}.\tag{3.1}$$

称 $(\mathcal{X},d,\mu)$ 是一个局部紧的度量测度空间, 是指 $(\mathcal{X},d)$ 是一个局部紧的可分度量空间, μ 是一个支撑在 $\mathcal{X}$ 上的 Radon 测度, 即 μ 是 $\mathcal{X}$ 上的关于紧集有限、非空开集取正值的 Borel 测度. 以下记 $C_c(\mathcal{X})$ 为 $\mathcal{X}$ 上紧支撑的连续函数的全体, $L^2(\mathcal{X},\mu)$ 为 $\mathcal{X}$ 上关于测度 μ 的平方可积函数的全体. 对于 $L^2(\mathcal{X},\mu)$ 上的一个稠定的对称双线性型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$, 称 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是闭的是指 $\mathcal{F}$ 关于范数 $\sqrt{\mathcal{E}(\cdot,\cdot)+\|\cdot\|^2_{L^2(\mathcal{X},\mu)}}$ 完备.

定义 3.1 设 $(\mathcal{X},d,\mu)$ 是一个局部紧的度量测度空间. 称 $L^2(\mathcal{X},\mu)$ 上的一个非负稠定的对称双线性型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 $L^2(\mathcal{X},\mu)$ 上的 Dirichlet 型, 如果 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是闭的, 并且满足 Markov 性, 即对所有 $f\in\mathcal{F}$, 有

$$(0\vee f)\wedge 1\in\mathcal{F}\quad \text{并且}\quad \mathcal{E}((0\vee f)\wedge 1,(0\vee f)\wedge 1)\leqslant\mathcal{E}(f,f).$$

进一步地, 有如下定义:

(a) 称 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是正则 (regular) 的, 若 $\mathcal{F}\cap C_c(\mathcal{X})$ 在 $C_c(\mathcal{X})$ 中关于一致范数稠密, 并且在 $\mathcal{F}$ 中关于范数 $\sqrt{\mathcal{E}(\cdot,\cdot)+\|\cdot\|^2_{L^2(\mathcal{X},\mu)}}$ 也稠密.

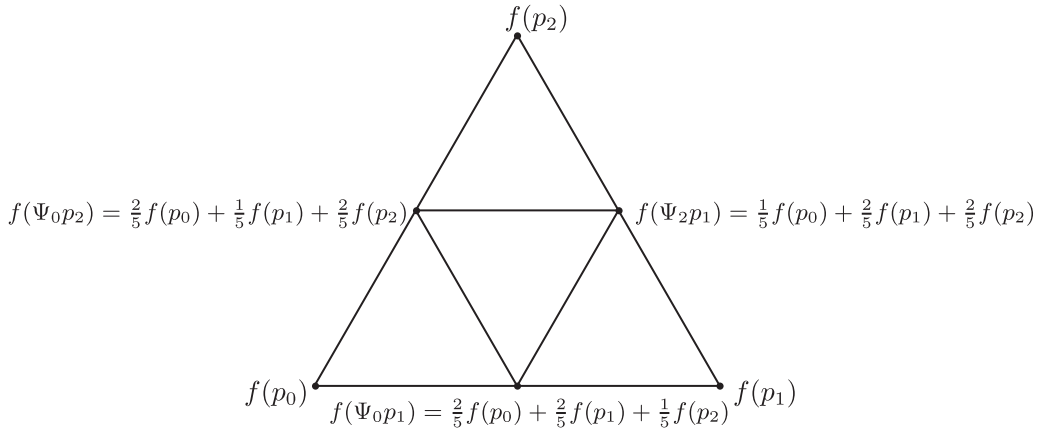


图 3 V_1 上的调和函数 f

(b) 称 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是局部 (local) 的, 若 $\mathcal{E}(f,g)=0$, 只需要 $\mathrm{supp}f\cap\mathrm{supp}g=\emptyset$; 称 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是强局部的, 若 $\mathcal{E}(f,g)=0$, 只需要 f 在 $\mathrm{supp}g$ 的某邻域上是常数, 其中 $\mathrm{supp}f$ 表示函数 f 的支撑集.

定理 3.1 [77] 对 SG 上的任一 Radon 测度 μ, (3.1) 中的 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 $L^2(\mathrm{SG},\mu)$ 上的强局部、正则 Dirichlet 型.

更一般地, 1993 年 Kigami [78,80] 引入了后临界有限自相似集.

定义 3.2 设 (K,d) 是一个度量空间, S 是一个有限集, $\#S\geqslant 2$, 并且对每个 $i\in S$, Ψ_i 是一个从 K 到 K 的连续单射. 称 $\mathcal{L}=(K,S,\{\Psi_i\}_{i\in S})$ 是一个自相似结构, 如果存在一个从符号空间 $\Sigma:=S^{\mathbb{N}}$ 到 K 上的连续满射 $\pi:\Sigma\to K$ 使得 $\Psi_i\circ\pi=\pi\circ\sigma_i$ 对每个 $i\in S$ 成立, 其中 $\sigma_i:\Sigma\to\Sigma$ 定义为 $\sigma_i(\omega_1\omega_2\cdots)=i\omega_1\omega_2\cdots$.

定义 3.3 对一个自相似结构 $\mathcal{L}=(K,S,\{\Psi_i\}_{i\in S})$, 定义

$$C_{\mathcal{L},K}=\bigcup_{i,j\in S,i\neq j}(\Psi_i(K)\cap\Psi_j(K)),\quad \mathcal{C}_{\mathcal{L}}=\pi^{-1}(C_{\mathcal{L},K})\quad 和\quad \mathcal{P}_{\mathcal{L}}=\bigcup_{n\geqslant 1}\sigma^n(\mathcal{C}_{\mathcal{L}}),$$

其中 $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ 为左移位算子, 定义为 $\sigma(\omega_1\omega_2\cdots)=\omega_2\omega_3\cdots$. 称 $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ 为 $\mathcal{L}$ 的临界集, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ 为 $\mathcal{L}$ 的后临界集. 若 $\#\mathcal{P}_{\mathcal{L}}<\infty$, 则称 $\mathcal{L}=(K,S,\{\Psi_i\}_{i\in S})$ 为后临界有限 (p.c.f.) 自相似结构, K 为 p.c.f. 自相似集.

作为最简单的例子, 可以验证 $\mathcal{L}=(\mathrm{SG},\{0,1,2\},\{\Psi_i\}_{i=0}^2)$ 是一个 p.c.f. 自相似结构. 首先, 定义 $\pi:\Sigma=\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to\mathrm{SG}$ 为 $\pi(\omega_1\omega_2\cdots)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Psi_{\omega_1}\circ\Psi_{\omega_2}\circ\cdots\circ\Psi_{\omega_n}(\mathrm{SG})$, 容易验证 $\Psi_i\circ\pi=\pi\circ\sigma_i$. 其次, 可以看到 $C_{\mathcal{L},K}=\{\Psi_0p_1,\Psi_1p_2,\Psi_2p_0\}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}=\{0\dot{1},1\dot{0},1\dot{2},2\dot{1},2\dot{0},0\dot{2}\}$ 和 $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2}\}$. 更多的例子参见文献 [9,80,115].

类似于 SG, 任一 p.c.f. 自相似集 K 上有自然的逼近点集列 V_n, $n\geqslant 0$. 令

$$\begin{aligned}&V_0=\pi(\mathcal{P}_{\mathcal{L}}),\\&V_n=\bigcup_{i\in S}\Psi_i(V_{n-1}),\quad n\geqslant 1.\end{aligned}$$

仍可以通过图能量的极限定义 p.c.f. 自相似集上的能量型. 这里, 对 V_0 上的一个电阻型 $\mathcal{E}_0$ 和一个给定 $\#S$ 维正向量 $\boldsymbol{r}\in(0,\infty)^S$, 定义 V_n 上的电阻型 $\mathcal{E}_n$ 如下:

$$\mathcal{E}_n(f,g)=\sum_{i\in S}r_i^{-1}\mathcal{E}_{n-1}(f\circ\Psi_i,g\circ\Psi_i),\quad f,g\in l(V_n).\tag{3.2}$$

称 $(D,\boldsymbol{r})$ 是一个调和结构, 如果 $\mathcal{E}_1|_{V_0}=\mathcal{E}_0$, 其中 D 是 $\mathcal{E}_0$ 对应的 Laplace 算子. 进一步地, 称 $(D,\boldsymbol{r})$ 是正则的, 如果对每个 $i\in S$ 有 $r_i<1$.

定理 3.2 [78,80] 设 $\mathcal{L}=(K,S,\{\Psi_i\}_{i\in S})$ 是一个 p.c.f. 自相似结构, μ 是 K 上的 Radon 测度. 如果 $(D,\boldsymbol{r})$ 是一个正则调和结构, 则 (3.2) 和 (3.1) 定义了 $L^2(K,\mu)$ 上的一个强局部、正则 Dirichlet 型.

注 3.1 容易验证, 上述定理中获得的 Dirichlet 型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 满足自相似性, 即

$$\mathcal{E}(f,g)=\sum_{i\in S}r_i^{-1}\mathcal{E}(f\circ\Psi_i,g\circ\Psi_i),\quad f,g\in\mathcal{F}.$$

更一般地, 如果 $(D,\boldsymbol{r})$ 是调和结构, 但非正则, 对于足够好的 Radon 测度 μ, 仍可以通过 $\mathcal{E}_n$ 的极限构造 $L^2(K,\mu)$ 上的强局部、正则 Dirichlet 型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$. 读者可以在文献 [87] 和 [80, 第 3.4 小节] 中找到具体方法.

可以看到, p.c.f. 自相似集上的自相似 Dirichlet 型的存在性问题、唯一性问题可以转化为调和结构的存在性问题、唯一性问题. 在嵌套分形 (nested fractal, 一类具有高度对称性的 Euclid 空间中的 p.c.f. 自相似集) 上, 1990 年, Lindstrøm[91] 证明了全对称的自相似能量型的存在性. 1997 年, Sabot[108] 给出了一般性的 p.c.f. 自相似集上调和结构存在性或唯一性的充分条件, 并据此获得了嵌套分形上全对称自相似能量型的唯一性. 值得提及的是, 嵌套分形 Vicsek 集上的调和结构不唯一 (参见文献 [92]). Metz[93–95] 和 Peirone[98–100,102] 给出了 Sabot 结果的推广, 并且给出了不同的证明方法. 另外, Cao 等[28] 也给出了嵌套分形上自相似能量型存在的一个简单证明, 并推广到了当前研究活跃的 p- 能量型情形. 最后, 我们指出 2019 年 Peirone[101] 构造了一个 p.c.f. 自相似集, 其上不存在自相似能量型.

基于相同的思想, p.c.f. 自相似集上能量型的分析构造有一些推广: 包括 Julia 集[29,50]、拉伸的 Sierpiński 垫片[5]、黄金比例 Sierpiński 垫片[39]、带额外旋转三角形的 Sierpiński 垫片[25] 和有限型的有限分支的图递归集[32,63] 等非严格自相似集上的情形. 一般地, Teplyaev[119] 研究了具有有限分支 (finitely ramified) 胞腔结构的分形上的能量型的分析构造.

4 Sierpiński 地毯上的 Dirichlet 型

无限分支 (infinitely ramified) 自相似集上的分析要比有限分支情形困难许多. 本节取 $F_0=[0,1]^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的单位方块, $d\geqslant 2$.

4.1 广义 Sierpiński 地毯

设 $k\geqslant 3$, 将 F_0 沿平行坐标轴方向均匀分割成 k^d 个边长为 k^{-1} 的小方块, 再以某种方式从中选择一些方块的并组成 F_1; 对每一个小方块继续以同样的方式分割并选出边长为 k^{-2} 的小方块, 它们的并组成 F_2; 重复上述过程得到一个渐缩集列 F_n, $n\geqslant 0$, 记 $F:=\bigcap_{n\geqslant 0}F_n$. 将 F_0 沿平行坐标轴方向均匀分割出的边长为 k^{-n} 的小方块的全体记为 $\mathcal{Q}_n$, $n\geqslant 0$. 对 $A\subset F_0$, 记

$$\mathcal{Q}_n(A):=\{Q\in\mathcal{Q}_n: A\cap \mathrm{int}(Q)\neq\emptyset\},$$

其中 $\mathrm{int}(Q)$ 表示方块 Q 的内部. 对每个 $Q\in\mathcal{Q}_1(F_1)$, 将从 F_0 到 Q 的保持方向的相似压缩映射记为 Ψ_Q. 容易验证, F 是由迭代函数系统 $\{\Psi_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}_1(F_1)}$ 决定的自相似集, 即 F 是满足

$$F=\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}_1(F_1)}\Psi_Q(F)$$

的唯一非空紧集. 特别地, F 的 Hausdorff 维数为 $d_f:=\frac{\log \#\mathcal{Q}_1(F_1)}{\log k}$.

定义 4.1 设 $k\geqslant 3$, F_0 和 F_1 以及自相似集 F 由上述构造产生, 并且假设:

(对称性) F_1 满足 F_0 上的所有对称性;

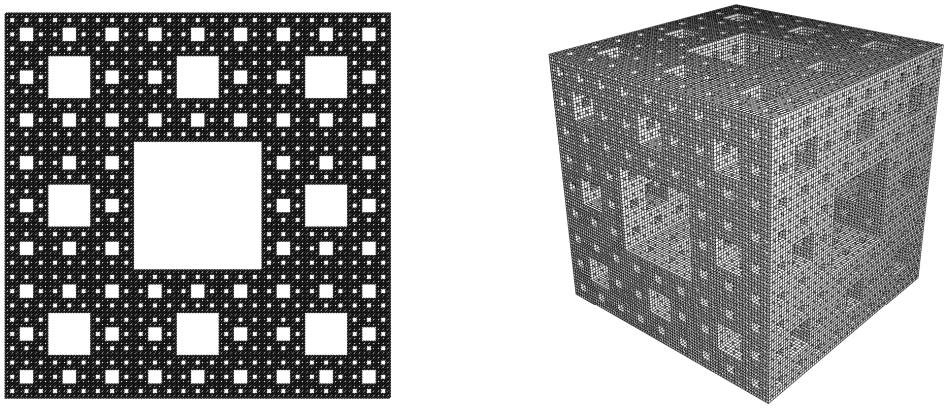
(连通性) F_1 是连通的;

(非对角性) 若 B 是一个由 $\mathcal{Q}_1$ 中 2^d 个小方块的并组成的方块, 则 $\mathrm{int}(B\cap F_1)$ 是空的或者连通的;

(包含边界线) F_1 包含边界线段 $\{x: 0\leqslant x_1\leqslant 1, x_2=\cdots=x_d=0\}$,

则称 F 是一个广义 Sierpiński 地毯 (generalized Sierpiński carpet, GSC), 见图 4.

作为经典的无限分支的自相似集, GSC 在分形上的分析中有重要地位. 1989 年, Barlow 和 Bass[11] 首次在平面 GSC 上构造了 Brown 运动, 并且在后续的工作中结合 Harnack 不等式[11] 和电阻估计



(a) (b)

图 4 广义 Sierpiński 地毯. (a) 2 维情形; (b) 3 维情形

(resistance estimates) [12] 给出了次 Gauss 型热核估计 [13]. 由于 Harnack 不等式在高维情形下较难验证, 在多年后, Barlow 和 Bass [14] 才给出了高维 GSC 上的 Brown 运动的存在性.

Barlow 和 Bass 的构造是纯概率的. 他们证明了 GSC 的自然的逼近域 F_n, $n \geqslant 0$ (见图 5) 上的常时间变换后的反射 Brown 运动有子序列弱极限, 并且将该极限定义为 GSC 上的 Brown 运动. 2010 年, Barlow 等 [15] 证明了 GSC 上 Brown 运动的唯一性, 从中可以看到, 通过取合适的时间常数, 常时间变换后 F_n 上的反射 Brown 运动弱收敛. 最近, Cao 和 Chen [26] 解决了文献 [12] 中关于有效电阻估计的公开问题, 并且得到了如下的结论.

定理 4.1 [26] 设 $k \geqslant 3$, F 是一个 GSC, F_n, $n \geqslant 0$ 是 F 的逼近域. 记 $X_t^{(F)}$ 为 F 上的 Brown 运动, $W_t^{(F_n)}$ 为 F_n 上的反射 Brown 运动, d_w 为 F 的游动维数 (walk dimension).

存在常数 $c_0 > 0$ 使得对所有满足 $x_n \to x$ 的点 $x \in F$ 以及点列 $x_n \in F_n$, $n \geqslant 0$, 从 x_n 出发的过程 $(W^{(F_n)}_{k^{(d_w-2)n}t})_{t>0}$ 在空间 $C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ 中弱收敛到从 x 出发的过程 $(X^{(F)}_{t/c_0})_{t>0}$.

相较于 Barlow 和 Bass 的概率构造, 1992 年, Kusuoka 和 Zhou [89] 通过 "分析为主" 的方法构造了平面 GSC 上的自相似 Dirichlet 型. 注意到, 根据唯一性定理 [15], 两种不同的构造是等价的: Kusuoka 和 Zhou 的 Dirichlet 型对应了 Barlow 和 Bass 的 Brown 运动.

Kusuoka 和 Zhou 引入了一系列图电阻型. 对 $n \geqslant 1$, 注意到每个方块 $Q \in \mathcal{Q}_n(F)$ 对应了 F 的一个胞腔 $F_Q := F \cap Q$, 我们将 $\mathcal{Q}_n(F)$ 看作图的顶点集, 并且约定 $Q, Q' \in \mathcal{Q}_n(F)$ 之间有一条边 (记为 $Q \sim_n Q'$) 当且仅当 $Q \cap Q'$ 是 $d-1$ 维的非空集合, 见图 6. 定义

$$E_n(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{Q,Q' \in \mathcal{Q}_n(F): Q \sim_n Q'} (u(Q) - u(Q'))(v(Q) - v(Q')), \quad u, v \in l(\mathcal{Q}_n(F)) \tag{4.1}$$

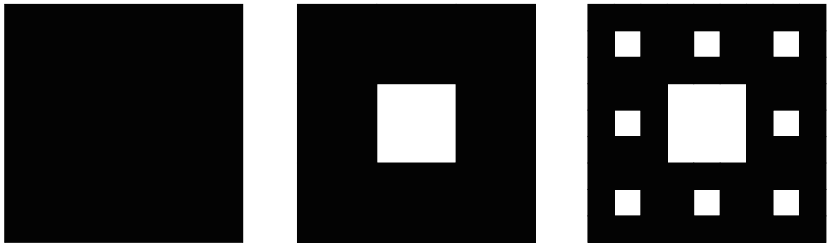


图 5 Sierpiński 地毯的逼近域 F_0, F_1 和 F_2

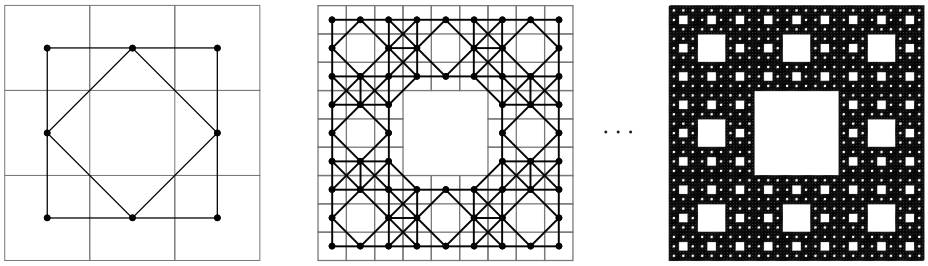


图 6 Sierpiński 地毯的逼近图

为第 n 层逼近图电阻型.

作为构造的最重要步骤, Kusuoka 和 Zhou 证明了存在常数 $C>0$, $\eta>0$ 使得

$$E_n(P_nf,P_nf)\geqslant C\eta^{m-n}E_m(P_mf,P_mf),\quad \text{对任意 } n\geqslant m \text{ 和 } f\in L^2(F,\mu) \text{ 成立,} \tag{4.2}$$

并且对所有 $m\geqslant 1$ 和 $Q\in\mathcal{Q}_m(F)$, 存在 $f\in L^2(F,\mu)$, 使得

$$\sup_{n\geqslant 0}\eta^nE_n(P_nf,P_nf)<\eta^m,\quad f|_{F_Q}=1,\quad \text{并且 } f|_{F_{Q'}}=0 \text{ 对任意 } Q'\not\sim_m Q \text{ 成立,} \tag{4.3}$$

其中 μ 是 F 上的归一化的 d_f- 维 Hausdorff 测度, $P_nf\in l(\mathcal{Q}_n(F))$ 由 $P_nf(Q)=\frac{1}{\mu(F_Q)}\int_{F_Q}f d\mu$, $Q\in\mathcal{Q}_n(F)$ 定义.

公式 (4.2) 和 (4.3) 可以看作 p.c.f. 情形时相容序列条件的弱化版本. 利用它们, 可以证明能量型 $\eta^nE_n(P_n\cdot,P_n\cdot)$, $n\geqslant 1$ 按 Mosco 意义收敛到某个 $L^2(F,\mu)$ 上的非负二次型 $\overline{\mathcal{E}}$, 并且可以证明 $\overline{\mathcal{E}}$ 对应了一个正则 Dirichlet 型 $(\overline{\mathcal{E}},\mathcal{F})$. 最后, Kusuoka 和 Zhou 将 $(\overline{\mathcal{E}},\mathcal{F})$ 改造成一个新的自相似 Dirichlet 型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$, 它是序列 $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{Q\in\mathcal{Q}_m(F)}\eta^m\overline{\mathcal{E}}(\cdot\circ\Psi_Q,\cdot\circ\Psi_Q)$, $n\geqslant 1$ 的子序列逐点极限.

综合 Barlow 和 Bass [11,14], Barlow 等 [15], Kusuoka 和 Zhou [89] 的工作, 我们有如下定理:

定理 4.2 [11,14,15,89] 每一个 GSC 上唯一地存在一个全对称、强局部、正则、自相似、满足次 Gauss 型热核估计的 Dirichlet 型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

注 4.1 我们将上述 Dirichlet 型称为 GSC 上的标准 Dirichlet 型.

4.2 无约束 Sierpiński 地毯及其推广

在 Kusuoka 和 Zhou 的工作中, 关键步骤 (4.2) 和 (4.3) 的证明本质借助了 Barlow 和 Bass 的 "骑士移动" 概率方法. 自然地, 如何利用纯分析工具来构造 GSC 上的标准 Dirichlet 型成为了非 p.c.f. 情形下最受关注的问题. 最近, 在低维的情形, Cao 和 Qiu [38,40] 发现可以利用能量有限函数的 Hölder 连续性 "纯分析地" 证明 (4.2) 和 (4.3), 并且发展出新的拼砌小能量函数的技术 (building-brick), 证明了比平面 GSC 更广泛的一类对称自相似集上标准 Dirichlet 型的存在性与唯一性.

定义 4.2 设 $k\geqslant 3$, $4(k-1)\leqslant N\leqslant k^2-1$, 以及 $\{\Psi_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 是平面上一组压缩率为 k^{-1} 的保持方向的相似压缩映射, 满足 $\Psi_i(F_0)\subset F_0$. 设 F 是一个满足 $F=\bigcup_{i=1}^N\Psi_i(F)$ 的非空紧集. 假设下面 4 个条件成立:

(对称性) $\bigcup_{i=1}^N\Psi_i(F_0)$ 满足 F_0 上的所有对称性;

(连通性) $\bigcup_{i=1}^N\Psi_i(F_0)$ 是连通的;

(无重叠性) $\Psi_i(F_0)\cap\Psi_j(F_0)$, $1\leqslant i\neq j\leqslant N$ 的面积是 0;

(包含边界线) $\bigcup_{i=1}^{N}\Psi_i(F_0)$ 包含边界线段 $\{x:0\leqslant x_1\leqslant 1, x_2=0\}$.

则称 F 是一个无约束 Sierpiński 地毯 (unconstrained Sierpiński carpet, USC), 见图 7.

定理 4.3 [38,40] 每一个平面 USC 上唯一地存在一个标准 Dirichlet 型.

可以看到, 相较 GSC 情形, USC 允许两个胞腔的交是一条长度为无理数的边. 在这样的自相似集上, 可以存在无穷多种胞腔相交方式 (即两个胞腔相交的相对边长有无限多种可能的情形). 按照 Kigami [81] 的分类, 这样的分形属于无理分支 (irrationally ramified) 的自相似集. 相对地, 如果 USC 中两两胞腔之间的交只有有理长度, 则容易验证胞腔相交的方式仅有有限多种, 这样的分形属于有理分支 (rationally ramified) 的自相似集. 特别地, GSC 中的分形都是有理分支自相似集.

更进一步地, 在定义地毯类分形时, 我们开始考虑压缩率不一致的情形.

定义 4.3 设 $N\geqslant 8$, $\{\rho_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 满足 $0<\rho_i<1$, $\sum_{i=1}^{N}\rho_i^2<1$, 以及 $\{\Psi_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 是平面上一组压缩率为 ρ_i 的保持方向的相似压缩映射, 满足 $\Psi_i(F_0)\subset F_0$. 设 F 是 $\{\Psi_i\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 决定的自相似集, 满足定义 4.2 中的 4 个条件. 则称 F 是一个 Sierpiński 地毯状分形 (Sierpiński carpet like fractal, LSC), 见图 8.

Kigami [81] 引入的 Sierpiński 十字地毯 (Sierpiński cross, 见图 8(a)) 是一个有理分支 LSC 的特例. 最近, 对于大于 Ahlfors 正则共形维数的指标 p, Kigami [84] 给出了 Sierpiński 十字地毯上的自相似 p-能量的构造. 一般地, 由于允许压缩率不同, LSC 往往都是无理分支的自相似集. Cao 等 [42] 考虑了一类更广的 LSC, 空心地毯状分形 (hollow carpets, 见图 8(b)), 在压缩率满足一定条件 (顶角胞腔压缩率至少是相邻胞腔压缩率的两倍) 下证明了标准自相似 Dirichlet 型的存在性. 值得注意的是, Cao 和 Qiu [35] 找到了一个非空心的 LSC (见图 8(c)), 其上不存在标准 Dirichlet 型. 关于平面自相似集, Cao 等 [42] 还讨论了多边形地毯状分形上标准 Dirichlet 型的存在性.

上述基于 Kusuoka 和 Zhou 的框架的分析方法目前只对低维分形有效. 对于高维分形, 仍然存在至少两点本质上的困难.

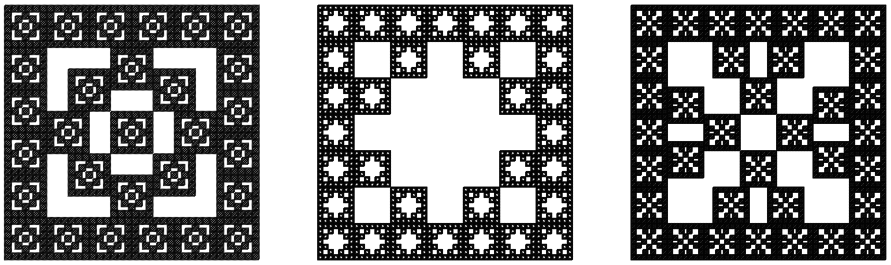
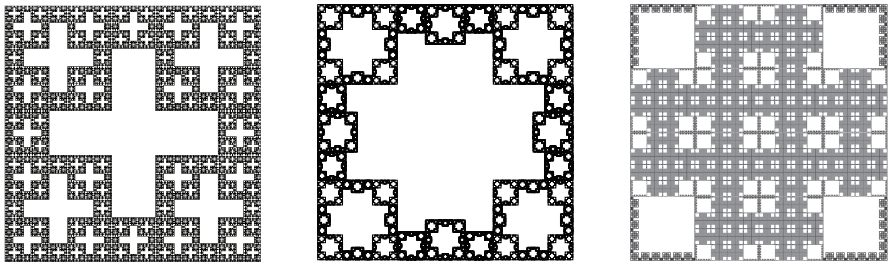


图 7 一些 USC 的例子



(a) (b) (c)

图 8 Sierpiński 地毯状分形. (a) 十字地毯; (b) 空心地毯; (c) 非空心地毯

首先, 我们缺少一个推导出 Harnack 不等式的简单分析条件. 目前, 对于电阻型 (对于有次 Gauss 型热核估计的 Dirichlet 型, 这等价于游动维数大于 Hausdorff 维数), 我们知道, 电阻估计可以直接推导出热核估计 [83]. 但是, 对于非电阻型的 Dirichlet 型, 目前分析上仅仅知道截断 Sobolev 不等式 [6, 55] 加上 Poincaré 不等式能够推导出热核估计. 这一结果最重要的应用是 Harnack 不等式的稳定性 (参见文献 [16, 17]). 但是, 截断 Sobolev 不等式的表达式较为复杂, 难以验证. 人们猜想, 球电阻估计加上 Poincaré 不等式等价于次 Gauss 型热核估计. 这一猜想称为电阻猜想 (resistance conjecture), 是目前分形上分析领域中最为重要的猜想. 最近, Murugan 和 Shimizu [96] 在低维图上证明了这一猜想, 事实上他们证明了更强的结论: 电阻估计可以推导出 Harnack 不等式. 他们利用电阻估计得到了平面 GSC 上自相似 p- 能量的存在性对任意指标 $p>1$ 成立. Cao 和 Qiu [36] 也利用这一想法将 USC 上标准 Dirichlet 型的存在性推广到了 3 维情形.

其次, 对于较差的分形, 电阻估计也难以验证. 在 Kusuoka 和 Zhou 最初的工作中, 他们引入了一系列 Poincaré 常数. 为了叙述方便, 我们回到 GSC 情形. 对照 (4.1), 对于 $A\subset F$, 记

$$E_{n,A}(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{Q,Q'\in\mathcal{Q}_n(A):Q\sim_n Q'}(u(Q)-u(Q'))(v(Q)-v(Q')),\quad u,v\in l(\mathcal{Q}_n(A)),\quad n\geqslant 1.$$

定义 4.4 (Poincaré 常数 [89]) 对于给定的一个 GSC, 对 $n\geqslant 1$, 定义如下常数:

$$\begin{aligned}
\lambda_n&:=\sup\left\{\frac{\sum_{Q\in\mathcal{Q}_n(F)}(P_nf(F_Q)-P_0f(F))^2}{E_n(P_nf,P_nf)}:f\in L^2(F,d\mu)\right\},\\
\sigma_n&:=\sup\left\{\frac{N^n\cdot|P_mf(F_Q)-P_mf(F_{Q'})|^2}{E_{n+m,Q\cup Q'}(P_{n+m}f,P_{n+m}f)}:m\in\mathbb{N},Q\sim_m Q'\in\mathcal{Q}_m(F),f\in L^2(F,d\mu)\right\},\\
\lambda_n^{(D)}&:=\sup\left\{\frac{N^n\cdot(P_0f(F))^2}{E_n(P_nf,P_nf)}:P_nf(F_Q)=0\text{ 对 }Q\cap\{x:x_i=0\text{ 或 }1,\text{对某 }i\}\neq\emptyset,\right.\\
&\qquad\left.\text{其中 }Q\in\mathcal{Q}_n(F),f\in L^2(F,d\mu)\right\}.
\end{aligned}$$

定义 4.5 (电阻常数 [89]) 对于给定的一个 GSC, 对 $n\geqslant 1$, 定义

$$\begin{aligned}
R_n:=\inf\{&(E_{n+m}(P_{n+m}f,P_{n+m}f))^{-1}:f|_{F_Q}=1,\text{并且 }f|_{F_{Q'}}=0\text{ 对任意 }Q'\not\sim_m Q,\\
&\text{其中 }Q\in\mathcal{Q}_m(F),m\geqslant 1,f\in L^2(F,d\mu)\}.
\end{aligned}$$

为了证明 Poincaré 常数与电阻常数互相控制, Kusuoka 和 Zhou [89] 引入了如下 (B1) 和 (B2) 条件:

(B1) 存在常数 $C>0$, $k\in\mathbb{N}$, 使得 $\sigma_n\leqslant C\cdot\lambda_{n+k}^{(D)}$ 对 $n\geqslant 1$ 成立.

(B2) 存在常数 $\gamma>0$, 使得 $0<\inf\gamma^{-n}\lambda_n\leqslant\sup\gamma^{-n}\lambda_n<\infty$.

对于平面 GSC, Kusuoka 和 Zhou [89] 借助了概率方法证明了 (B1) 和 (B2). 对于平面 USC, Cao 和 Qiu [38] 将 (B1) 和 (B2) 条件合并为 (B) 条件:

(B) 存在常数 $C>0$, 使得 $R_n\geqslant C\cdot\sigma_n$ 对 $n\geqslant 1$ 成立,

并且利用了低维 USC 电阻型的特性 "分析地" 证明了这一条件. Kigami [84] 在推广 Dirichlet 型到 p- 能量型时, 将 (B) 条件称为 p- 电导同质性 (p-conductive homogeneity). 目前, 除了一些低维情形的特殊分形, 我们仍然不知道如何验证 p- 电导同质性.

5 相关问题

最后, 简要介绍分形分析领域中的一些其他相关的重要问题.

5.1 p- 能量型

分形上 p- 能量是一个最近非常活跃的课题. 这方面最早的工作可以回溯到 2004 年 Herman 等 [66] 在 SG 上 p- 能量的构造. 这一工作基于 p.c.f. 分形逼近图上寻找相容序列的想法. 对照 $p=2$ 的情形, 他们考虑了有限集 V 上满足如下性质的 p- 能量泛函 A_p:

(1) $A_p(f+C)=A_p(f)$, 对所有 $f\in l(V)$ 和常值函数 C 成立;

(2) (p- 齐性) $A_p(Cf)=|C|^pA_p(f)$, 对所有 $f\in l(V)$ 和常数 C 成立;

(3) (Markov 性) $A_p((0\vee f)\wedge 1)\leqslant A_p(f)$, 对所有函数 $f\in l(V)$ 成立;

(4) (凸性) $A_p(cf+(1-c)g)\leqslant c\,A_p(f)+(1-c)A_p(g)$, 对所有 $f,g\in l(V)$ 和常数 $c\in(0,1)$ 成立;

(5) (非负性) $A_p(f)\geqslant 0$, 并且 $A_p(f)=0$ 当且仅当 f 是一个常值函数.

当 $p=2$ 时, 这些条件等价于 A_p 是电阻型; 当 $p\neq 2$ 时, A_p 不总是有形式

$$A_p(f)=\sum_{x,y\in V}c_{x,y}|f(x)-f(y)|^p.$$

对于 SG, 他们证明了存在 $r_p\in(0,1)$ 以及满足上述条件的 A_p 使得 $\mathcal{E}_n^{(p)}:l(V_n)\to\mathbb{R}$, $n\geqslant 0$ 是一个相容序列, 其中 $\mathcal{E}_0^{(p)}=A_p$ 以及 $\mathcal{E}_n^{(p)}(\cdot)=\sum_{i=0}^2 r_p^{-1}\mathcal{E}_{n-1}^{(p)}(\cdot\circ\Psi_i)$, $n\geqslant 1$. 由此可以通过 $\mathcal{E}_n^{(p)}$ 的极限定义 SG 上的 p- 能量.

对于一般的 p.c.f. 自相似集, 2022 年, Cao 等 [28] 基于 Kusuoka 和 Zhou 的思想给出了 p- 能量型的一般性构造方法. 事实上, 针对一个 p.c.f. 自相似结构 $\mathcal{L}=(K,S,\{\Psi_i\}_{i\in S})$, 对于一组预设的重整化因子 r_i, $i\in S$, 我们只需要证明 p- 能量序列 $E_0^{(p)}(f)=\frac{1}{2}\sum_{x,y\in V}|f(x)-f(y)|^p$ 以及 $E_n^{(p)}(f)=\sum_{i\in S}r_i^{-1}E_{n-1}^{(p)}(f)$, $n\geqslant 1$ 满足, 存在正常数 C 和 C_n, $n\geqslant 1$ 使得

$$C^{-1}C_nE_0^{(p)}(f)\leqslant E_n^{(p)}|_{V_0}(f)\leqslant CC_nE_0^{(p)}(f),\quad \text{对任意 } f\in l(V_0),n\geqslant 1 \text{ 成立.}$$

那么, 由 Fekete 引理, 可以证明 $C_n\asymp\lambda^n$ 对某个 $\lambda>0$ 成立. 利用 Kusuoka 和 Zhou 的思想, 可以在分形 K 上定义能量域

$$\mathcal{F}^{(p)}=\Big\{f\in C(K):\sup_{n\geqslant 0}\lambda^{-n}E_n^{(p)}(f)<\infty\Big\},$$

并且定义能量泛函 $\mathcal{E}^{(p)}$ 为 $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^n\lambda^{-m}E_m^{(p)}(\cdot|_{V_m})$ 的子序列逐点极限. 利用这一方法, 我们给出了嵌套分形上的自相似 p- 能量的存在性的证明, 并且将 Sabot [108] 的针对 2- 能量型存在性的判定准则推广到 p- 能量情形.

定理 5.1 [28] 对任意 $p>1$, 每一个嵌套分形上存在一个全对称、强局部、正则、自相似的 p- 能量型 $(\mathcal{E}^{(p)},\mathcal{F}^{(p)})$.

在最近的工作中, Kajino 和 Shimizu [75,76] 进一步研究了 p.c.f. 自相似集上 p- 能量型的性质. 首先, 他们给出了一般集合上 p- 电阻型的定义 [76], 并且证明了我们的 p.c.f. 自相似集上的 p- 能量型是 p- 电阻型. 相较于 $p=2$ 的情形, 在 p- 电阻型的构造中 Markov 条件被替换为更强的广义压缩条件. 另外, 在正在进行中的工作中, Kajino 和 Shimizu [1)] 证明了一类 p.c.f. 自相似集上 p- 能量的唯一性.

1) Kajino N, Shimizu R. Strong comparison principle for p-harmonic functions and uniqueness of symmetry-invariant p-energy forms on p.c.f. self-similar sets. In preparation

另外, 在 Sierpiński 地毯类分形上构造 p- 能量的方法, 包括 Kigami[84], Shimizu[112] 以及 Murugan 和 Shimizu[96] 的构造, 同样基于 Kusuoka 和 Zhou 的工作. 在这一方向上, 存在两个自然的公开问题. 第一个问题是高维 GSC 上对所有 $p>1$, p- 能量的存在性问题; 第二个问题是 GSC 上 p- 能量的唯一性问题. 目前为止, 即使对低维情形, 仍然缺少唯一性的证明.

5.2 Laplace 算子的谱分析

由标准 Dirichlet 型理论, 前述在自相似集 K 上构造的 Dirichlet 型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 由

$$\mathcal{E}(f,g)=(-\Delta_N f,g)_\mu,\quad \text{对任意 } g\in L^2(K,\mu) \text{ 成立}$$

决定了 $L^2(K,\mu)$ 上的一个非正定的自伴算子 Δ_N, 称作 K 上的 Neumann-Laplace 算子, 其中 $(\cdot,\cdot)_\mu$ 表示 $L^2(K,\mu)$ 上的标准内积. 取 $\mathcal{F}_0=\{f\in\mathcal{F}: f|_{V_0}=0\}$, $(\mathcal{E},\mathcal{F}_0)$ 也是 $L^2(K,\mu)$ 上的一个局部、正则的 Dirichlet 型, 它同样决定了一个非正定的自伴算子 Δ_D, 称作 K 上的 Dirichlet-Laplace 算子. 这两个算子都有紧预解, 根据标准理论, 对于 $b=D$ 或 N, 存在 $-\Delta_b$ 的特征值序列 $\{\lambda_i^b\}_{i\geqslant 1}$, 以及特征函数序列 $\{\varphi_i^b\}_{i\geqslant 1}$, 满足

$$\begin{aligned}&-\Delta_b\varphi_i^b=\lambda_i^b\varphi_i^b,\quad i\geqslant 1,\\ &0\leqslant\lambda_1^b\leqslant\cdots\leqslant\lambda_i^b\leqslant\lambda_{i+1}^b\leqslant\cdots,\end{aligned}$$

并且每个 λ_i^b 对应的特征空间都是有限维的, $+\infty$ 是 $\{\lambda_i^b\}_{i\geqslant 1}$ 的唯一聚点, $\{\varphi_i^b\}_{i\geqslant 1}$ 是 $L^2(K,\mu)$ 上的一组标准正交基. 对照经典情形下 Weyl[121] 的谱渐近定理以及 Weyl[120] 和 Berry[21] 的二阶项猜测, 特征值计数函数 $\rho_b(x):=\max\{k:\lambda_k^b\leqslant x\}$ 当 $x\to+\infty$ 时的渐近性分析成为了分形上 Laplace 算子谱理论的研究重心.

这方面的工作源于 20 世纪 80 年代物理学家 Alexander 和 Orbach[1] 以及 Rammal 和 Toulouse[106] 对 SG 的逼近图序列上的积分态密度 (integrated density of states) 的研究, 以及 20 世纪 90 年初 Shima[110], Fukushima 和 Shima[52] 发现的谱提取 (spectral decimation) 对 SG 的特征函数与特征值的精确刻画. 这些工作揭示了 p.c.f. 分形上局部支撑特征函数的存在性和积分态密度的不连续性, 参见文献 [7,8,30,41,45,47,48,111,114,117,118,122] 运用谱提取方法在强对称 p.c.f. 结构分形或分形图序列上的谱分析, 以及一些应用 (参见文献 [46,64,104,105,123]).

利用谱提取方法可以获得 Laplace 算子谱的全部信息, 但是对分形有很强对称性的要求, 不能推广到一般的 p.c.f. 自相似集上. 1993 年, Kigami 和 Lapidus[85] 借助更新定理, 利用 Dirichlet-Neumann 交叉 (bracketing) 方法获得了一般 p.c.f. 自相似集上特征值计数函数 $\rho_b(x)$ 的主项估计.

定理 5.2[85] 设 K 是一个带有正则调和结构 $(D,\boldsymbol{r})$ 的 p.c.f. 自相似集, μ 是 K 上权重为 $\{\mu_i\}_{i\in S}$ 的自相似测度. 记 $\gamma_i=\sqrt{r_i\mu_i}$, d_S 是满足 $\sum_{i\in S}\gamma_i^d=1$ 的唯一实数 d, 则对于 $b=D$ 或 N, 有

$$0<\liminf\rho_b(x)/x^{d_S/2}\leqslant\limsup\rho_b(x)/x^{d_S/2}<\infty.$$

进一步地, 当 $\sum_{i\in S}\mathbb{Z}\log\gamma_i$ 是 $\mathbb{R}$ 中离散子群 (晶格情形) 时, 有

$$\rho_b(x)=G(\log x/2)x^{d_S/2}+o(x^{d_S/2}),$$

其中 G 是一个满足 $0<\inf G(x)\leqslant\sup G(x)<\infty$ 的右连续周期函数; 反之, $\lim_{x\to\infty}\rho_b(x)/x^{d_S/2}$ 存在.

晶格情形的主项估计揭示了, 与经典情形不一样, 归咎于局部特征函数的存在, 特征值计数函数 $\rho_b(x)$ 会产生不规则振荡. 对于嵌套分形, Kigami[79] 证明了局部特征函数的特征值计数函数与 $\rho_b(x)$

服从同样阶数的渐近分布. 此外, 对于 γ_i 全部相等的晶格情形, 使用更精细的更新定理, 可以进一步得到余项估计 $\rho_b(x)=G(\log x/2)x^{d_S/2}+O(1)$. 借助谱提取方法, Strichartz[116] 获得了 SG 上 $\rho_b(x)$ 关于几乎处处的 x 的精确公式. 为了讨论具有分形边界的分形区域上 $\rho_b(x)$ 的二阶项估计, 2019 年, Qiu[104] 得到了 SG 去掉下底边产生的区域上 Laplace 算子的精确谱刻画, 结果预示了对应于分形边界几何的二阶估计项的存在. 最近, Gu 和 Qiu [2)] 对于满足边界图递归 (boundary graph-directed, BGD) 条件的嵌套分形子区域, 得到了特征值计数函数 $\rho_b(x)$ 的显式二阶项估计.

关于 Sierpiński 地毯类分形上的谱渐近分析要更加困难. 目前已知的结果是针对特征值计数函数 $\rho_b(x)$ 的 Laplace-Stieltjes 变换, 谱配分函数 (spectral partition function) $Z_b(t):=\mathrm{tr}(\mathrm{e}^{t\Delta_b})$, Kajino[72, 73] 借助热核估计获得了 GSC 上当 $t\to 0$ 时形如 $Z_b(t)=\sum_{k=0}^{d}t^{-c_k/d_w}G_k(-\log t)+O(\exp(-ct^{-\frac{1}{d_w-1}}))$ 的对数周期渐近展开公式, 其中 d_w 是游动维数, G_k 是连续周期函数, $\{c_k\}_{k=0}^{d}$ 是严格递减正数, $c_d=0$, d 是空间维数. 这一结果改进了 Hambly[61] 的工作, 并且对 p.c.f. 自相似集也成立 (此时 $d=1$). 但是, 对于即使是标准 SC, $\rho_b(x)$ 的二阶项估计是否存在仍是未知的.

5.3 函数空间

自相似集上的 Sobolev 空间和 Besov 空间有着不同版本的定义. 设 $\mathcal{L}=(K,S,\{\Psi_i\}_{i\in S})$ 是一个带有正则调和结构 $(D,\boldsymbol{r})$ 的 p.c.f. 自相似结构, 记 d_H 是 K 在关于 $(D,\boldsymbol{r})$ 诱导的电阻距离 R 下的 Hausdorff 维数, 即 d_H 是满足等式 $\sum_{i\in S}r_i^{d_H}=1$ 的唯一解. 设 μ 是 K 上权重因子为 $\mu_i=r_i^{d_H}$, $i\in S$ 的自相似测度. 此时总有 $\mu(B_R(x,t))\asymp t^{d_H}$ 对 $t<\mathrm{diam}_R(K)$ 成立, 其中 $B_R(x,t)$ 表示在距离 R 下以 x 为球心、t 为半径的球, $\mathrm{diam}_R(K)$ 表示在距离 R 下 K 的直径. 对于 $1<p,q<\infty$, $s>0$ 可以通过积分定义一类 Besov 空间:

$$\Lambda^s_{p,q}(K):=\left\{f\in L^p(K,\mu):\left(\int_0^\infty\left(\int_K t^{-d_H}\int_{B_R(x,r)}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{t^{sp}}d\mu(y)d\mu(x)\right)^{q/p}\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty\right\}.$$

对于自相似集 K 上的一个强局部、正则的 Dirichlet 型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$, 注意到其对应于 K 上的 Neumann-Laplace 算子 Δ_N, 能量域 $\mathcal{F}$ 是非负自伴算子 $(-\Delta_N)^{1/2}$ 的定义域, 我们自然地可以将 $\mathcal{F}$ 看作 K 上的 Sobolev 空间 $W^{1,2}(K)$. 1996 年, 关于 SG 上的标准 Dirichlet 型, Jonsson[70] 证明了 $W^{1,2}(\mathrm{SG})=\Lambda^{d_W/2}_{2,\infty}(\mathrm{SG})$, 其中 $d_W=\frac{\log 5}{\log(5/3)}$. 一般地, 称 $d_W:=1+d_H$ 是自相似集 K 在电阻距离 R 下的游动维数. Jonsson 的工作被认为是分形上函数空间研究的起点, 随后被 Pietruska-Pałuba[103] 推广到嵌套分形的标准 Dirichlet 型上, 被 Hu 和 Wang[68] 推广到由正则调和结构诱导的一般 p.c.f. 自相似集的 Dirichlet 型上. 特别地, Grigor'yan 等[54] 针对一般度量测度空间上的 Dirichlet 型, 假定热核估计, 同样得到了类似的能量域刻画. 关于 SC, Grigor'yan 和 Yang[57] 证明了 SC 上的局部 Dirichlet 型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 可以被非局部 Dirichlet 型按照 Mosco 收敛意义逼近. 作为推论, $W^{1,2}(\mathrm{SC})$ 是 $\Lambda^s_{2,2}$ 型空间的临界极限.

对于 $1<p<\infty$, $s>0$, 可以定义分数阶 Sobolev 空间 $H^s_p(K):=(\mathrm{id}-\Delta_N)^{-s/2}L^p(K,d\mu)$ 为分数阶 Laplace 算子 $\Delta_N^{s/2}$ 的 L^p- 定义域 (参见文献 [113]). 特别地, 有 $H^1_2(K)=W^{1,2}(K)$, $H^s_p(K)$ 是复插值稳定的: $H^{\eta s}_p(K)=[L^p(K,d\mu),H^s_p(K)]_\eta$ 对 $0<\eta<1$ 成立. 这里指出, Rogers 等[107] 对于 p.c.f. 自相似集证明了次 Gauss 型热核估计可以推导出光滑鼓包函数 (即 $\bigcap_{s>0}H^s_2(K)$ 中的鼓包函数) 的存在性; 对于一般度量测度空间, 假定热核估计, Hu 和 Zähle[69] 证明了 $H^s_2(K)=\Lambda^{sd_W/2}_{2,2}(K)$ 对 $0<s<1$ 成立. 类似地, 还可以定义对应于 Dirichlet-Laplace 算子 Δ_D 的 Sobolev 空间 $H^s_{p,D}(K)$[113]. Cao 和

2) Gu Q, Qiu H. BGD domains in p.c.f. self-similar sets II: Spectral asymptotics for Laplacians. In preparation

Qiu[33,34] 给出了 $H_2^s(K)$ 和 $H_{2,D}^s(K)$ 的另一种离散型的等价范数, 并讨论了两类空间的比较关系、原子分解、临界指数和插值稳定性.

更一般地, 可以通过对 $H_p^s(K)$ 的实插值引入另一类 Besov 空间: 对 $s>0$, $0<\eta<1$ 以及 $1\leqslant q\leqslant\infty$, 定义

$$B_{p,q}^{\eta s}(K):=(L^p(K,d\mu),H_p^s(K))_{\eta,q}.$$

等价地, 有

$$B_{p,q}^s(K):=\left\{f\in L^p(K,\mu):\left(\int_0^\infty(t^{-s/2}\|(t\Delta_N)^kP_tf\|_{L^p(K,\mu)})^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty\right\},$$

其中 k 为大于 $\frac{s}{2}$ 的任意整数, $\{P_t:=\mathrm{e}^{t\Delta_N}\}_{t>0}$ 是 Δ_N 对应的热半群. 一个自然的问题是 (参见文献 [103]): $B_{p,q}^s(K)$ 和 $\Lambda_{p,q}^{sd_W/2}(K)$ 这两类 Besov 空间是否等价? 对于一般度量测度空间, 在 Gauss 型热核估计的情形下 (此时 $d_W=2$), Cao 和 Grigor'yan[23] 对一定范围内 (满足某种最佳意义) 的指标 s, p 和 q 证明了 $B_{p,q}^s(K)=\Lambda_{p,q}^s(K)$. Cao 和 Qiu[37] 对于一般的 p.c.f. 自相似集 (此时满足次 Gauss 型热核估计), 对任意指标 p 和 q, 给出了 $B_{p,q}^s(K)=\Lambda_{p,q}^{sd_W/2}(K)$ 成立时光滑性指标的 s 的恰当取值范围. 对于满足次 Gauss 型热核估计的一般度量测度空间, 目前这一问题还没有一般性结论.

最后, 我们指出分形上还有许多其他的函数空间 (参见文献 [2–4, 19, 20, 24, 56]). 在最近活跃的 p-能量型的研究中, Kigami[84] 将 p- 能量域称为 $W^{1,p}$ 空间. 在更早的研究中, Hajłasz[60], Cheeger[43] 和 Shanmugalingam[109] 通过引入上梯度或类似结构构造了其他版本的 Sobolev 空间. 这些空间之间的关系仍然在研究之中.

5.4 边值问题和迹定理

设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是一个度量测度空间 $(\mathcal{X},d,\mu)$ 上的正则 Dirichlet 型, $\partial\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{X}$ 的边界集. 在一般的 Dirichlet 型理论中 (参见文献 [44, 51]), 称 $(\check{\mathcal{E}},\check{\mathcal{F}}_e=\mathcal{F}_e|_{\partial\mathcal{X}})$ 为迹 Dirichlet 空间, 其中 $\mathcal{F}_e$ 是延伸 Dirichlet 空间, $\check{\mathcal{E}}(f,f)=\mathcal{E}(\mathcal{H}f,\mathcal{H}f)$, $\mathcal{H}f$ 是 f 在 $\mathcal{X}$ 上的调和扩张.

迹 Dirichlet 型有着重要的意义. 从概率意义上, 如果 σ 是拟支撑集 (quasi support) 为 $\partial\mathcal{X}$ 的光滑测度, $(\check{\mathcal{E}},\check{\mathcal{F}}_e\cap L^2(\partial K,\sigma))$ 对应了一个 $\mathcal{X}$ 上扩散运动的时间变换. 从分析意义上, 迹 Dirichlet 型对应的 Laplace 算子可以理解为 Dirichlet-to-Neumann 算子. 最后, 仅从函数空间意义出发, 理解能量域在边界上的行为也是重要的. Hino 和 Kumagai[67] 利用函数空间的迹定理 (trace theorem) 构造了分形场 (fractal fields) 上的扩散过程. 文献 [26] 中证明的一个主要步骤是利用迹定理构造 GSC 逼近域上的函数.

Jonsson[71] 首先研究了分形上的迹定理: 他证明了 $W^{1,2}(\mathrm{SG})|_L=\Lambda_{2,2}^\beta(L)$, 其中 L 是 SG 的下底边, $\beta=\frac{\log 5}{\log 4}-(\frac{\log 3}{\log 2}-1)/2$. 这一结果由 Hino 和 Kumagai[67] 推广到一大类地毯类分形 GSC 上 $W^{1,2}$ 空间在自相似边界上的迹. 最近, Cai 等[22] 研究了 SG 和 SC 上 $W^{1,2}$ 空间在直线和分形的交上的迹, Gu 和 Qiu[58] 研究了一般 p.c.f. 自相似区域上 $W^{1,2}$ 空间在具有图递归结构的边界上的迹.

对于更加精细的迹 Dirichlet 型的刻画, Owen 和 Strichartz[97] 计算了 SG 在下底边的迹 Dirichlet 型; Li 和 Strichartz[90] 计算了 SG 在中线的迹 Dirichlet 型; Guo 等[59] 计算了 SG 在和水平线的交上的迹 Dirichlet 型; Cao 和 Qiu[31] 将前述结果推广到 SG_l, $l\geqslant 3$ 上. 最近, Kajino 和 Murugan[74], 以及 Cao 和 Chen[27] 研究了一般一致域上有次 Gauss 分布的 Dirichlet 型在边界上的迹.

最后, 通过迹 Dirichlet 型, 可构造一些非局部 Dirichlet 型的例子. Kigami[82] 研究了一类无穷树上随机游走在边界上的迹 Dirichlet 型. Kong 等[86] 研究了双曲图上随机游走在边界上的迹 Dirichlet 型.

参考文献

1 Alexander S, Orbach R. Density of states on fractals: "Fractons". J Physique Lett, 1982, 43: 625–631
2 Alonso-Ruiz P, Baudoin F, Chen L, et al. Besov class via heat semigroup on Dirichlet spaces II: BV functions and Gaussian heat kernel estimates. Calc Var Partial Differential Equations, 2020, 59: 103
3 Alonso-Ruiz P, Baudoin F, Chen L, et al. Besov class via heat semigroup on Dirichlet spaces I: Sobolev type inequalities. J Funct Anal, 2020, 278: 108459
4 Alonso-Ruiz P, Baudoin F, Chen L, et al. Besov class via heat semigroup on Dirichlet spaces III: BV functions and sub-Gaussian heat kernel estimates. Calc Var Partial Differential Equations, 2021, 60: 170
5 Alonso-Ruiz P, Freiberg U R, Kigami J. Completely symmetric resistance forms on the stretched Sierpiński gasket. J Fractal Geom, 2018, 5: 227–277
6 Andres S, Barlow M T. Energy inequalities for cutoff functions and some applications. J Reine Angew Math, 2015, 699: 183–215
7 Bajorin N, Chen T, Dagan A, et al. Vibration modes of $3n$-gaskets and other fractals. J Phys A, 2007, 41: 015101
8 Bajorin N, Chen T, Dagan A, et al. Vibration spectra of finitely ramified, symmetric fractals. Fractals, 2008, 16: 243–258
9 Barlow M T. Diffusions on fractals. In: Lectures on Probability Theory and Statistics (Saint-Flour, 1995). Lecture Notes in Mathematics, vol. 1690. Berlin: Springer, 1998, 1–121
10 Barlow M T. Random Walks and Heat Kernels on Graphs. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 438. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2017
11 Barlow M T, Bass R F. The construction of Brownian motion on the Sierpinski carpet. Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat, 1989, 25: 225–257
12 Barlow M T, Bass R F. On the resistance of the Sierpiński carpet. Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Sci, 1990, 431: 345–360
13 Barlow M T, Bass R F. Transition densities for Brownian motion on the Sierpinski carpet. Probab Theory Related Fields, 1992, 91: 307–330
14 Barlow M T, Bass R F. Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets. Canad J Math, 1999, 51: 673–744
15 Barlow M T, Bass R F, Kumagai T, et al. Uniqueness of Brownian motion on Sierpinski carpets. J Eur Math Soc (JEMS), 2010, 12: 655–701
16 Barlow M T, Chen Z Q, Murugan M. Stability of EHI and regularity of MMD spaces. arXiv:2008.05152, 2020
17 Barlow M T, Murugan M. Stability of the elliptic Harnack inequality. Ann of Math (2), 2018, 187: 777–823
18 Barlow M T, Perkins E A. Brownian motion on the Sierpinski gasket. Probab Theory Related Fields, 1988, 79: 543–623
19 Baudoin F. Korevaar-Schoen-Sobolev spaces and critical exponents in metric measure spaces. Ann Fennici Math, 2024, 49: 487–527
20 Baudoin F, Chen L. Sobolev spaces and Poincaré inequalities on the Vicsek fractal. Ann Fenn Math, 2023, 48: 3–26
21 Berry M V. Distribution of modes in fractal resonators. In: Structural Stability in Physics. Springer Series in Synergetics, vol. 4. Berlin: Springer, 1979, 51–53
22 Cai J, Qiu H, Wang Y. A uniform trace theorem for Dirichlet forms on Sierpinski fractals. J Funct Anal, 2024, 286: 110367
23 Cao J, Grigor'yan A. Heat kernels and Besov spaces associated with second order divergence form elliptic operators. J Fourier Anal Appl, 2020, 26: 3
24 Cao J, Grigor'yan A. Heat kernels and Besov spaces on metric measure spaces. J Anal Math, 2022, 148: 637–680
25 Cao S. Convergence of energy forms on Sierpinski gaskets with added rotated triangle. Potential Anal, 2023, 59: 1793–1825
26 Cao S, Chen Z Q. Convergence of resistances on generalized Sierpiński carpets. arXiv:2402.01949, 2024
27 Cao S, Chen Z Q. Boundary trace theorems for symmetric reflected diffusions. arXiv:2410.19201, 2024
28 Cao S, Gu Q, Qiu H. p-energies on p.c.f. self-similar sets. Adv Math, 2022, 405: 108517
29 Cao S, Haßler M S, Qiu H, et al. Existence and uniqueness of diffusions on the Julia sets of Misiurewicz-Sierpinski maps. Adv Math, 2021, 389: 107922
30 Cao S, Huang Y, Qiu H, et al. Spectral analysis beyond ℓ^2 on Sierpinski lattices. J Fourier Anal Appl, 2021, 27: 55
31 Cao S, Qiu H. Boundary value problems for harmonic functions on domains in Sierpinski gaskets. Commun Pure Appl Anal, 2020, 19: 1147–1179
32 Cao S, Qiu H. Resistance forms on self-similar sets with finite ramification of finite type. Potential Anal, 2021, 54: 581–606
33 Cao S, Qiu H. Sobolev spaces on p.c.f. self-similar sets II: Boundary behavior and interpolation theorems. Forum

Math, 2022, 34: 749–779
34 Cao S, Qiu H. Sobolev spaces on p.c.f. self-similar sets I: Critical orders and atomic decompositions. J Funct Anal, 2022, 282: 109331
35 Cao S, Qiu H. A Sierpinski carpet like fractal without standard self-similar energy. Proc Amer Math Soc, 2023, 151: 1087–1102
36 Cao S, Qiu H. Dirichlet forms on unconstrained Sierpinski carpets in $\mathbb{R}^3$. arXiv:2305.09292, 2023
37 Cao S, Qiu H. Equivalence of Besov spaces on p.c.f. self-similar sets. Canad J Math, 2024, 76: 1109–1143
38 Cao S, Qiu H. Dirichlet forms on unconstrained Sierpinski carpets. Probab Theory Related Fields, 2024, 189: 613–657
39 Cao S, Qiu H. Brownian motion on the golden ratio Sierpinski gasket. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2024, 154: 699–726
40 Cao S, Qiu H. Uniqueness and convergence of resistance forms on unconstrained Sierpinski carpets. arXiv:2403.17311, 2024
41 Cao S, Qiu H, Tian H, et al. Spectral decimation for a graph-directed fractal pair. Sci China Math, 2022, 65: 2503–2520
42 Cao S, Qiu H, Wang Y. Self-similar Dirichlet forms on polygon carpets. arXiv:2206.00040, 2022
43 Cheeger J. Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces. Geom Funct Anal, 1999, 9: 428–517
44 Chen Z Q, Fukushima M. Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory. Princeton: Princeton Univ Press, 2012
45 Constantin S, Strichartz R S, Wheeler M. Analysis of the Laplacian and spectral operators on the Vicsek set. Commun Pure Appl Anal, 2011, 10: 1–44
46 Dalrymple K, Strichartz R S, Vinson J P. Fractal differential equations on the Sierpinski gasket. J Fourier Anal Appl, 1999, 5: 203–284
47 Drenning S, Strichartz R S. Spectral decimation on Hambly's homogeneous hierarchical gaskets. Illinois J Math, 2009, 53: 915–937
48 Fang S, King D A, Lee E B, et al. Spectral decimation for families of self-similar symmetric Laplacians on the Sierpiński gasket. J Fractal Geom, 2020, 7: 1–62
49 Fitzsimmons P J, Hambly B M, Kumagai T. Transition density estimates for Brownian motion on affine nested fractals. Comm Math Phys, 1994, 165: 595–620
50 Flock T C, Strichartz R S. Laplacians on a family of quadratic Julia sets I. Trans Amer Math Soc, 2012, 364: 3915–3965
51 Fukushima M, Oshima Y, Takeda M. Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, 2nd ed. De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 19. Berlin: Walter de Gruyter, 2011
52 Fukushima M, Shima T. On a spectral analysis for the Sierpinski gasket. Potential Anal, 1992, 1: 1–35
53 Goldstein S. Random walks and diffusions on fractals. In: Percolation Theory and Ergodic Theory of Infinite Particle Systems. The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, vol. 8. New York: Springer, 1987, 121–129
54 Grigor'yan A, Hu J, Lau K S. Heat kernels on metric measure spaces and an application to semilinear elliptic equations. Trans Amer Math Soc, 2003, 355: 2065–2095
55 Grigor'yan A, Hu J, Lau K S. Generalized capacity, Harnack inequality and heat kernels of Dirichlet forms on metric measure spaces. J Math Soc Japan, 2015, 67: 1485–1549
56 Grigor'yan A, Liu L. Heat kernel and Lipschitz-Besov spaces. Forum Math, 2015, 27: 3567–3613
57 Grigor'yan A, Yang M. Local and non-local Dirichlet forms on the Sierpiński carpet. Trans Amer Math Soc, 2019, 372: 3985–4030
58 Gu Q, Qiu H. BGD domains in p.c.f. self-similar sets I: Boundary value problems for harmonic functions. arXiv: 2409.01623, 2024
59 Guo Z, Kogan R, Qiu H, et al. Boundary value problems for a family of domains in the Sierpinski gasket. Illinois J Math, 2014, 58: 497–519
60 Hajłasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric space. Potential Anal, 1996, 5: 403–415
61 Hambly B M. Asymptotics for functions associated with heat flow on the Sierpinski carpet. Canad J Math, 2011, 63: 153–180
62 Hambly B M, Kumagai T. Transition density estimates for diffusion processes on post critically finite self-similar fractals. Proc Lond Math Soc (3), 1999, 78: 431–458
63 Hambly B M, Nyberg S O G. Finitely ramified graph-directed fractals, spectral asymptotics and the multidimensional renewal theorem. Proc Edinb Math Soc (2), 2003, 46: 1–34
64 Hare K E, Steinhurst B A, Teplyaev A, et al. Disconnected Julia sets and gaps in the spectrum of Laplacians on symmetric finitely ramified fractals. Math Res Lett, 2012, 19: 537–553
65 Havlin S, Ben-Avraham D. Diffusion in disordered media. Adv Phys, 1987, 36: 695–798

66 Herman P E, Peirone R, Strichartz R S. p-energy and p-harmonic functions on Sierpinski gasket type fractals. Potential Anal, 2004, 20: 125–148
67 Hino M, Kumagai T. A trace theorem for Dirichlet forms on fractals. J Funct Anal, 2006, 238: 578–611
68 Hu J, Wang X. Domains of Dirichlet forms and effective resistance estimates on p.c.f. fractals. Studia Math, 2006, 177: 153–172
69 Hu J, Zähle M. Potential spaces on fractals. Studia Math, 2005, 170: 259–281
70 Jonsson A. Brownian motion on fractals and function spaces. Math Z, 1996, 222: 495–504
71 Jonsson A. A trace theorem for the Dirichlet form on the Sierpinski gasket. Math Z, 2005, 250: 599–609
72 Kajino N. Spectral asymptotics for Laplacians on self-similar sets. J Funct Anal, 2010, 258: 1310–1360
73 Kajino N. Log-periodic asymptotic expansion of the spectral partition function for self-similar sets. Comm Math Phys, 2014, 328: 1341–1370
74 Kajino N, Murugan M. Heat kernel estimates for boundary traces of reflected diffusions on uniform domains. arXiv:2312.08546, 2023
75 Kajino N, Shimizu R. Korevaar-Schoen p-energy forms and associated p-energy measures on fractals. arXiv:2404.13435, 2024
76 Kajino N, Shimizu R. Contraction properties and differentiability of p-energy forms with applications to nonlinear potential theory on self-similar sets. arXiv:2404.13668, 2024
77 Kigami J. A harmonic calculus on the Sierpinski spaces. Jpn J Appl Math, 1989, 6: 259–290
78 Kigami J. A harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets. Trans Amer Math Soc, 1993, 335: 721–755
79 Kigami J. Distributions of localized eigenvalues of Laplacians on post critically finite self-similar sets. J Funct Anal, 1998, 156: 170–198
80 Kigami J. Analysis on Fractals. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 143. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2001
81 Kigami J. Volume doubling measures and heat kernel estimates on self-similar sets. Mem Amer Math Soc, 2009, 199: 932
82 Kigami J. Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees. Adv Math, 2010, 225: 2674–2730
83 Kigami J. Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates (English summary). Mem Amer Math Soc, 2012, 216: 1015
84 Kigami J. Conductive Homogeneity of Compact Metric Spaces and Construction of p-Energy. Memoirs of the European Mathematical Society, vol. 5. Berlin: Eur Math Soc, 2023
85 Kigami J, Lapidus M L. Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals. Comm Math Phys, 1993, 158: 93–125
86 Kong S L, Lau K S, Wong T K L. Random walks and induced Dirichlet forms on self-similar sets. Adv Math, 2017, 320: 1099–1134
87 Kumagai T. Regularity, closedness and spectral dimensions of the Dirichlet forms on p.c.f. self-similar sets. J Math Kyoto Univ, 1993, 33: 765–786
88 Kusuoka S. A diffusion process on a fractal. In: Probabilistic Methods in Mathematical Physics. Boston: Academic Press, 1987, 251–274
89 Kusuoka S, Zhou X. Dirichlet forms on fractals: Poincaré constant and resistance. Probab Theory Related Fields, 1992, 93: 169–196
90 Li W, Strichartz R S. Boundary value problems on a half Sierpinski gasket. J Fractal Geom, 2014, 1: 1–43
91 Lindstrøm T. Brownian motion on nested fractals. Mem Amer Math Soc, 1990, 83: 420
92 Metz V. How many diffusions exist on the Vicsek snowflake? Acta Appl Math, 1993, 32: 227–241
93 Metz V. Hilbert's projective metric on cones of Dirichlet forms. J Funct Anal, 1995, 127: 438–455
94 Metz V. Renormalization contracts on nested fractals. J Reine Angew Math, 1996, 480: 161–175
95 Metz V. The short-cut test. J Funct Anal, 2005, 220: 118–156
96 Murugan M, Shimizu R. First-order Sobolev spaces, self-similar energies and energy measures on the Sierpinski carpet. arXiv:2308.06232, 2023
97 Owen J, Strichartz R S. Boundary value problems for harmonic functions on a domain in the Sierpinski gasket. Indiana Univ Math J, 2012, 61: 319–335
98 Peirone R. Convergence and uniqueness problems for Dirichlet forms on fractals. Boll Unione Mat Ital Sez (8), 2000, 3: 431–460
99 Peirone R. Existence of self-similar energies on finitely ramified fractals. J Anal Math, 2014, 123: 35–94
100 Peirone R. Uniqueness of eigenforms on fractals. Math Nachr, 2014, 287: 453–471
101 Peirone R. A p.c.f. self-similar set with no self-similar energy. J Fractal Geom, 2019, 6: 393–404

102 Peirone R. Fixed points of anti-attracting maps and eigenforms on fractals. Math Nachr, 2021, 294: 1578–1594
103 Pietruska-Pałuba K. On function spaces related to fractional diffusions on d-sets. Stochastics Stochastic Rep, 2000, 70: 153–164
104 Qiu H. Exact spectrum of the Laplacian on a domain in the Sierpinski gasket. J Funct Anal, 2019, 277: 806–888
105 Qiu H, Tian H. Restrictions of Laplacian eigenfunctions to edges in the Sierpinski gasket. Constr Approx, 2019, 50: 243–269
106 Rammal R, Toulouse G. Random walks on fractal structures and percolation clusters. J Physique Lett, 1983, 44: 13–22
107 Rogers L G, Strichartz R S, Teplyaev A. Smooth bumps, a Borel theorem and partitions of smooth functions on p.c.f. fractals. Trans Amer Math Soc, 2009, 361: 1765–1790
108 Sabot C. Existence and uniqueness of diffusions on finitely ramified self-similar fractals. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 1997, 30: 605–673
109 Shanmugalingam N. Newtonian spaces: An extension of Sobolev spaces to metric measure spaces. Rev Mat Iberoam, 2000, 16: 243–279
110 Shima T. On eigenvalue problems for the random walks on the Sierpinski pre-gaskets. Jpn J Ind Appl Math, 1991, 8: 127–141
111 Shima T. On eigenvalue problems for Laplacians on p.c.f. self-similar sets. Jpn J Ind Appl Math, 1996, 13: 1–23
112 Shimizu R. Construction of p-energy and associated energy measures on Sierpiński carpets. Trans Amer Math Soc, 2024, 377: 951–1032
113 Strichartz R S. Function spaces on fractals. J Funct Anal, 2003, 198: 43–83
114 Strichartz R S. Fractafolds based on the Sierpinski gasket and their spectra. Trans Amer Math Soc, 2003, 355: 4019–4043
115 Strichartz R S. Differential Equations on Fractals: A Tutorial. Princeton: Princeton Univ Press, 2006
116 Strichartz R S. Exact spectral asymptotics on the Sierpinski gasket. Proc Amer Math Soc, 2012, 140: 1749–1755
117 Strichartz R S, Teplyaev A. Spectral analysis on infinite Sierpiński fractafolds. J Anal Math, 2012, 116: 255–297
118 Teplyaev A. Spectral analysis on infinite Sierpiński gaskets. J Funct Anal, 1998, 159: 537–567
119 Teplyaev A. Harmonic coordinates on fractals with finitely ramified cell structure. Canad J Math, 2008, 60: 457–480
120 Weyl H. Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran und deren Begrenzung. J Reine Angew Math, 1912, 141: 1–11
121 Weyl H. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). Math Ann, 1912, 71: 441–479
122 Zhou D. Spectral analysis of Laplacians on the Vicsek set. Pacific J Math, 2009, 241: 369–398
123 Zhou D. Criteria for spectral gaps of Laplacians on fractals. J Fourier Anal Appl, 2010, 16: 76–96

Energy forms on fractals

Shiping Cao & Hua Qiu

Abstract In this paper, we briefly introduce the research history, key issues, and recent significant advancements in the analysis on fractals. We first outline the resistance forms on finite graphs, and then review the analytic construction methods and research tools for energy forms on the Sierpiński gasket and the Sierpiński carpet, as well as some natural generalizations. Finally, we discuss the current active topics and research prospects in the field of analysis on fractals.

Keywords analysis on fractals, self-similar sets, Dirichlet forms, Laplacians, Sierpiński gasket, Sierpiński carpets

MSC(2020) 28A80, 31E05

doi: 10.1360/SSM-2024-0275