



一致双曲之外无类物理行为和远离熵公式测度的点集的拓扑熵

献给文兰教授 80 寿辰

侯晓博, 林万山, 田学廷*

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: 20110180003@fudan.edu.cn, 21110180014@m.fudan.edu.cn, xuetingtian@fudan.edu.cn

收稿日期: 2024-09-29; 接受日期: 2025-02-14; 网络出版日期: 2025-02-28; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12401231, 124B2010 和 12471182) 资助项目

摘要 本文在一致双曲之外的微分动力系统中研究无类物理行为和远离熵公式测度的点集的拓扑熵. 一方面, 针对中心多个一维的部分双曲系统, 本文证明该点集的拓扑熵大于等于所有双曲测度的测度熵的上确界, 并证明对于 Mañé 微分同胚, 该点集的拓扑熵等于整个系统的拓扑熵. 另一方面, 针对遍历的类物理测度和满足熵公式的测度个数是可数的且每个遍历的类物理测度和满足熵公式的测度都是双曲的微分动力系统, 本文证明该点集的拓扑熵等于整个系统的拓扑熵, 并给出该结论的应用. 最后, 本文对 C^1 通有的保体积微分同胚证明该点集的拓扑熵大于等于体积测度的测度熵.

关键词 部分双曲 类物理行为 熵公式 拓扑熵

MSC (2020) 主题分类 37C05, 37C50, 37D25, 37D30

1 引言

微分动力系统研究微分流形上的微分同胚或流. 1967 年, Smale^[37] 发现了同宿轨产生复杂现象背后的几何机制, 即同宿轨附近存在 Smale 马蹄. 随后, 一致双曲系统的概念被提出, Smale, Anosov 和 Sinai 等发展了谱分解、Markov 分割、Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) 测度及平衡态的存在唯一性、周期轨的分布、遍历测度的稠密性等一致双曲系统的核心理论 (读者可以从 Bowen 的书 [10] 中读到这些结论及相关的历史). 一致双曲系统的结构稳定性告诉我们, 一致双曲的微分同胚在全体微分同胚中形成一个开集 (参见文献 [44]). 而 Newhouse^[32] 证明了一致双曲的微分同胚在全体微分同胚中并不一定是稠密的, 这说明一致双曲之外还有大量的系统. 非一致双曲系统^[6, 38] 和部分双曲系统^[33] 是一致双曲之外被人们深入研究的两类系统. 称一个测度是双曲的, 如果它有正 Lyapunov 指数和负 Lyapunov 指数, 没有零 Lyapunov 指数. 称一个系统为非一致双曲系统, 如果其具有一个双曲遍历测度. 部分双

英文引用格式: Hou X B, Lin W S, Tian X T. Topological entropy of the set of points without physical-like behaviour and away from measures satisfying the entropy formula beyond uniform hyperbolicity (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 507–520, doi: 10.1360/SSM-2024-0302

曲是在一致双曲的基础上存在中心方向. 自从 Sinai^[36], Ruelle^[34] 和 Bowen^[8] 在一致双曲系统中得到 SRB 测度的存在唯一性, 以及 Ledrappier 和 Strelcyn^[24] 及 Ledrappier 和 Young^[25, 26] 对 C^2 的微分同胚证明了一个有正 Lyapunov 指数的不变测度是 SRB 测度当且仅当其满足 Pesin 熵公式之后, 寻找 SRB 测度以及相关的满足 Pesin 熵公式的测度、物理测度等逐步发展成为微分动力系统的核心问题之一. 在文献 [12] 中, 一个较弱的概念被提出, 称之为类物理测度, 这样的测度被证明总是存在的, 并且对 Lebesgue 测度几乎处处的点, 其经验测度的极限都是类物理测度. 因此类物理测度成为寻找 SRB 测度和物理测度的出发点 (参见文献 [11, 42]). 文献 [14] 对一致双曲系统研究了无类物理行为的点, 即经验测度的极限都不是类物理测度的点. 这样的点构成的集合在 Lebesgue 测度的意义下是平凡的, 但文献 [14] 证明了这样的点构成一个满拓扑熵的集合. 更进一步地, 在文献 [14] 的基础上, 基于文献 [15] 中对各种轨道结构的分布混沌的研究及文献 [20] 中对双曲周期点的横截同宿类的强分布混沌 (强于 1- 型分布混沌 DC1 (distributional chaos of type 1)) 的研究, 文献 [21] 中对双曲周期点的横截同宿类的非正则点集的拓扑熵的研究, 以及文献 [18] 中对逐点涌现的研究, 文献 [19] 同样针对一致双曲系统, 证明了对于无类物理行为且远离熵公式测度的点集, 如果按照逐点涌现的表现对其进行分层, 则每一层次都具有强分布混沌和满拓扑熵. 更多轨道分层结构的研究还有很多, 可参见文献 [17, 22, 41]. 本文在非一致双曲系统和部分双曲系统中研究无类物理行为和远离熵公式测度的点集的拓扑熵.

设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, 给定 $r \geq 1$, 记 $\text{Diff}^r(M)$ 是 M 上的 C^r 微分同胚空间. 令 $f \in \text{Diff}^r(M)$. 用 $\mathcal{M}(M)$, $\mathcal{M}(f, M)$ 和 $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M)$ 分别表示概率测度、 f - 不变测度和 f - 遍历测度组成的空间, 赋予弱 $*$ 拓扑, 令 ρ 是一个与 $\mathcal{M}(M)$ 上的弱 $*$ 拓扑相容的度量. 固定 $x \in M$, 其经验测度序列为 $\{\sigma_{n,x}\}_{n \geq 1}$, 其中

$$\sigma_{n,x} := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}.$$

x 的 pw_f - 极限集为

$$p\omega(x) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(M) : \text{存在 } n_j \rightarrow +\infty \text{ 使得 } \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(\sigma_{n_j,x}, \mu) = 0 \right\} \subset \mathcal{M}(f, M).$$

对于 $\mu \in \mathcal{M}(M)$, 称

$$G_\mu := \{x \in M : pw_f(x) = \{\mu\}\}$$

为 μ 的通有点集; 对于 $\varepsilon > 0$, 称

$$G_\mu(\varepsilon) := \{x \in M : \rho(pw_f(x), \mu) < \varepsilon\}$$

为 μ 的 ε - 通有点集. 对于 $\mathcal{M}(M)$ 中的测度 μ , 如果 G_μ 有正的 Lebesgue 测度, 则称 μ 为物理测度; 如果 $G_\mu(\varepsilon)$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 都有正的 Lebesgue 测度, 则称 μ 为类物理测度. 用 $\mathcal{O}_f$ 表示 f 的所有类物理测度组成的集合, 用 $\mathcal{P}_f$ 表示 f 的所有物理测度组成的集合. 显然, $\mathcal{P}_f \subset \mathcal{O}_f$. 用如下集合表示无类物理行为的点集:

$$\Gamma_f = \{x \in M : pw_f(x) \cap \mathcal{O}_f = \emptyset\}.$$

文献 [14] 对传递的 Anosov 系统证明了 Γ_f 具有满的拓扑熵. 本文在一致双曲之外的系统中研究 Γ_f 的拓扑熵. 同时本文还考虑远离熵公式测度的点集的拓扑熵. 具体地, 用如下集合表示远离熵公式测度的点集:

$$\Xi_f = \{x \in M : pw_f(x) \cap PE_f = \emptyset\},$$

其中, PE_f 表示满足 Pesin 熵公式的测度的集合, 具体定义可参见第 2.2 小节.

1.1 中心一维的部分双曲系统中 $\Gamma_f \cap \Xi_f$ 的拓扑熵

首先在中心一维的部分双曲系统中考虑 $\Gamma_f \cap \Xi_f$ 的拓扑熵. 令 $f \in \text{Diff}^1(M)$, 称一个丛 $E \subset TM$ 为 Df -不变的, 如果对任意的 $x \in M$, 有 $Df(E(x)) = E(f(x))$. 对两个 Df -不变的丛 $E, F \subset TM$, 称 E 控制 F 或者 F 被 E 控制, 如果存在常数 $C > 0$ 和 $\lambda \in (0, 1)$ 使得对任意的点 $x \in M$ 和任意的 $n \in \mathbb{N}$, 其中 $\mathbb{N}$ 为非负整数集, 有

$$\|Df^n|_{F(x)}\| \cdot \|Df^{-n}|_{E(f^n(x))}\| \leq C\lambda^n.$$

用 $E \oplus_\succ F$ 来表示 E 控制 F . 称一个 Df -不变的丛 F 被 Df 一致压缩, 如果存在常数 $C > 0$ 和 $\lambda \in (0, 1)$ 使得对任意的点 $x \in M$, 有

$$\|Df^n|_{F(x)}\| \leq C\lambda^n.$$

称一个 Df -不变的丛 F 被 Df 一致扩张, 如果 F 被 Df^{-1} 一致压缩. 称 f 为部分双曲的微分同胚, 如果存在 Df -不变的分解

$$TM = E^u \oplus_\succ E^c \oplus_\succ E^s$$

使得 E^u 被一致扩张, E^s 被一致压缩, E^u 或者 E^s 可以平凡但不能同时平凡. 中心多个一维的部分双曲系统指 f 在 M 上存在 Df -不变的分解

$$TM = E^u \oplus_\succ E_1^c \oplus_\succ \cdots \oplus_\succ E_k^c \oplus_\succ E^s$$

使得 E^u 被一致扩张, E^s 被一致压缩, E^u 或者 E^s 可以平凡但不能同时平凡, $\dim E_i^c = 1$ 对任意的 $1 \leq i \leq k$ 成立. 用 H_f^c 表示所有的双曲的 f -遍历测度所组成的集合. 给定 $\mu \in \mathcal{M}(f, M)$, 用 $h_\mu(f)$ 表示 μ 的测度熵. 给定 $Z \subset M$, 用 $h_{\text{top}}(f, Z)$ 表示其 (Bowen) 拓扑熵 (测度熵和拓扑熵的定义参见第 2.1 小节). 约定 $\sup \emptyset = -\infty$, 下面陈述本文的第一个主要结论.

定理 1.1 设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^1(M)$ 在 M 上具有部分双曲分解

$$TM = E^u \oplus_\succ E_1^c \oplus_\succ \cdots \oplus_\succ E_k^c \oplus_\succ E^s,$$

其中 $\dim E_i^c = 1$ 对任意的 $1 \leq i \leq k$ 成立, 则

$$h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f) \geq \sup_{\mu \in H_f^c} h_\mu(f).$$

注 1.1 部分双曲系统天然具有正熵 (参见文献 [13, 定理 2.14]). 在定理 1.1 的假设下, 如果 $\dim E^u \geq 1$ 且 (M, f) 有一个双曲的类物理测度 μ_0 , 则由引理 2.3 知 $h_{\mu_0}(f) > 0$, 由遍历分解定理知 (M, f) 具有一个正熵的双曲遍历测度, 从而由定理 1.1 有

$$h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f) > 0.$$

注 1.2 文献 [39] 证明了控制分解条件下绝对连续于 Lebesgue 测度的不变测度满足熵公式. 特别地, 保体积控制分解系统满足熵公式, 但目前控制分解条件或非一致双曲系统中不能确定满足熵公式的测度都与类物理测度有关.

注 1.3 正如前文提到的文献 [19] 对一致双曲系统中的 $\Gamma_f \cap \Xi_f$ 是否具有强分布混沌的研究, 也可以按照类似的研究思路, 在文献 [20] 的基础之上, 对具有正熵双曲遍历测度的中心多个一维的部分双曲微分同胚, 即定理 1.1 中的系统, 证明 $\Gamma_f \cap \Xi_f$ 具有强分布混沌.

接下来, 利用定理 1.1 来证明两类中心一维的部分双曲系统中 $\Gamma_f \cap \Xi_f$ 具有满的拓扑熵. 一类是 Mañé 微分同胚, 该微分同胚是由 Mañé^[31] 通过对一个双曲环面自同构 f_A 进行 C^0 扰动得到的部分双曲系统 $f_M : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ ($d \geq 3$). Mañé 微分同胚是持续传递的非 Anosov 系统, 其具有一个部分双曲分解 $T\mathbb{T}^d = E^u \oplus_{\prec} E^c \oplus_{\succ} E^s$, 其中 $\dim E^c = 1$. Mañé 微分同胚的构造中需要控制两个参数 $\rho, r > 0$. 记 $\mathcal{F}_{\rho, r}$ 为满足下列条件的 f_M :

- (i) f_A 有一个不动点 q 使得 $f_M = f_A$ 在 $\mathbb{T}^d \setminus B(q, \rho)$ 中成立;
- (ii) 如果一个轨道在 $B(q, \rho)$ 之外的时间占比大于 r , 则这个轨道上的 E^c 中的向量被压缩.

f_M 的充分小 C^1 邻域中的 g 也是满足 (ii) 的部分双曲系统. 用 $\mathcal{U}_{\rho, r}$ 表示这样的 g 组成的 C^1 开集. 记 h 为 f_A 的拓扑熵, L 为依赖 f_A 与 $\sup_{g \in \mathcal{U}_{\rho, r}} d_{C^0}(g, f_A)$ 的一个常数, $H(r) = -r \log r - (1-r) \log(1-r)$. 具体的细节可参见文献 [16].

推论 1.1 令 $g \in \mathcal{U}_{\rho, r}$. 如果

$$r(h + \log L) + H(2r) < h_{\text{top}}(g, \mathbb{T}^d),$$

则 $h_{\text{top}}(g, \Gamma_g \cap \Xi_g) = h_{\text{top}}(g, \mathbb{T}^d)$.

1.2 类物理测度和满足 Pesin 熵公式的测度可数且双曲的系统中 $\Gamma_f \cap \Xi_f$ 的拓扑熵

接下来, 研究 f -遍历的类物理测度和满足 Pesin 熵公式的测度可数且双曲的微分动力系统, 以下为本文的第二个主要结论.

定理 1.2 设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^{1+\alpha}(M)$, 其中 $\alpha > 0$.

(1) 如果 $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap \mathcal{O}_f$ 为一个有限集或者可数无限集, 且每个 $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap \mathcal{O}_f$ 都是双曲的, 则

$$h_{\text{top}}(f, \Gamma_f) = h_{\text{top}}(f, M);$$

(2) 如果 $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap PE_f$ 为一个有限集或者可数无限集, 且每个 $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap PE_f$ 都是双曲的, 则

$$h_{\text{top}}(f, \Xi_f) = h_{\text{top}}(f, M);$$

(3) 如果 $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap (\mathcal{O}_f \cup PE_f)$ 为一个有限集或者可数无限集, 且每个 $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap (\mathcal{O}_f \cup PE_f)$ 都是双曲的, 则

$$h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f) = h_{\text{top}}(f, M).$$

下面列举一些遍历类物理测度个数有限且都双曲的系统, 利用定理 1.2 可以得到这些系统中无类物理行为的点具有满的拓扑熵. 用 $\text{Leb}(A)$ 表示集合 A 的 Lebesgue 测度. 由文献 [12, 定理 1.6] 知 $\mathcal{O}_f$ 有限当且仅当 $\mathcal{P}_f$ 有限且 $\text{Leb}(\bigcup_{\mu \in \mathcal{P}_f} G_\mu) = 1$, 这种情形下 $\mathcal{O}_f = \mathcal{P}_f$. 利用这个事实, 可以得到下列系统中 $\mathcal{O}_f$ 的有限性.

(1) 文献 [1, 2] 考虑中心方向弱扩张的部分双曲系统, 即系统具有部分双曲分解 $TM = E^{cu} \oplus_{\prec} E^s$, 其中 $E^{cu} = E^u \oplus_{\prec} E^c$, 且存在 $\varepsilon > 0$ 使得 Lebesgue 几乎处处的点 x 满足

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \|Df^{-1}|_{E_{f^i(x)}^{cu}}\| < -\varepsilon.$$

文献 [1, 2] 证明了这样的系统具有有限个遍历双曲的物理测度 $\mu_1, \dots, \mu_k$ 使得

$$\text{Leb}\left(\bigcup_{i=1}^k G_{\mu_i}\right) = 1.$$

(2) 文献 [42] 考虑具有部分双曲分解 $TM = E^{cu} \oplus_{\succ} E^s$ 且任意的类物理测度 μ 沿着 E^{cu} 具有正的可积 Lyapunov 指数的系统, 即

$$\int \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log m(Df^n|_{E^{cu}(x)}) d\mu > 0.$$

文献 [42] 证明了这样的系统具有有限个遍历双曲的物理测度 $\mu_1, \dots, \mu_k$ 使得 $\text{Leb}(\bigcup_{i=1}^k G_{\mu_i}) = 1$.

(3) 文献 [7] 考虑中心方向几乎收缩的部分双曲系统, 即系统具有部分双曲分解 $TM = E^u \oplus_{\succ} E^c$, 且每个 Gibbs u - 态沿着中心方向的 Lyapunov 指数都小于 0. 文献 [7] 证明了这样的系统具有有限个遍历双曲的物理测度 $\mu_1, \dots, \mu_k$ 使得 $\text{Leb}(\bigcup_{i=1}^k G_{\mu_i}) = 1$.

(4) 文献 [3] 考虑中心方向几乎扩张的部分双曲系统, 即系统具有部分双曲分解

$$TM = E^u \oplus_{\succ} E^c \oplus_{\succ} E^s,$$

且每个 Gibbs u - 态沿着中心方向的 Lyapunov 指数都大于 0. 文献 [3] 证明了这样的系统具有有限个双曲的物理测度 $\mu_1, \dots, \mu_k$ 使得 $\text{Leb}(\bigcup_{i=1}^k G_{\mu_i}) = 1$.

1.3 保体积微分同胚中 $\Gamma_f \cap \Xi_f$ 的拓扑熵

设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, 记 $\text{Diff}_{\text{vol}}^1(M)$ 为 M 上的 C^1 保体积微分同胚空间. 文献 [5] 证明了存在一个 C^1 - 通有的集合 $\mathcal{R} \subset \text{Diff}_{\text{vol}}^1(M)$ 使得对任意的 $f \in \mathcal{R}$, 如果其具有正熵, 则体积测度 m 是 f - 遍历的双曲测度, 且 m 的支撑集具有一个对应于 Oseledets 分解的稳定/不稳定子丛的控制分解. 对于 $f \in \mathcal{R}$, 可以得到如下结论:

定理 1.3 设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, 则存在一个 C^1 - 通有的集合 $\mathcal{R} \subset \text{Diff}_{\text{vol}}^1(M)$ 使得对任意的 $f \in \mathcal{R}$, 有

$$h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f) \geq h_m(f).$$

注 1.4 对任意的 $f \in \text{Diff}_{\text{vol}}^1(M)$, 体积测度 m 不一定遍历, 即使对于 Anosov 微分同胚也仍然是一个问题 (参见文献 [4]). 如果假设 m 几乎处处的点 x 的 Lyapunov 指数非零且 x 轨道上有一个对应于 Oseledets 分解的稳定/不稳定子丛的控制分解, 则对 m 的遍历分解 $m = \int m_x dm$ 存在一个可测集 $D \subset M$ 使得 $m(D) = 1$ 且对任意的 $x \in D$, m_x 是一个双曲遍历测度且 m_x 几乎处处的点的轨道上有一个对应于 Oseledets 分解的稳定/不稳定子丛的控制分解. 从而由推论 3.1 得到

$$h_{\text{top}}(f, \Xi_f) \geq \sup_{x \in D} h_{m_x}(f).$$

本文余下内容的结构如下. 第 2 节介绍本文所需的一些基础知识. 第 3 节给出定理 1.1、推论 1.1、定理 1.2 和 1.3 的证明.

2 预备知识

2.1 测度熵和拓扑熵的定义及性质

首先回顾测度熵的定义. 称 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为一个概率空间, 如果 $\mathcal{B}$ 是 X 上一个 Borel σ -代数, μ 是 X 上一个概率测度. 对概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 的一个有限可测剖分 $\xi = \{A_1, \dots, A_n\}$, 定义

$$H_\mu(\xi) = - \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \log \mu(A_i).$$

令 $f: X \rightarrow X$ 为一个保持测度 μ 的连续映射. 用 $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\xi$ 表示剖分 $\{\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}A_{j_i} : 1 \leq j_i \leq n\}$. 于是下列极限存在:

$$h_\mu(f, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\xi\right).$$

μ 的测度熵定义为 $h_\mu(f) := \sup\{h_\mu(f, \xi) : \xi \text{ 是 } X \text{ 的有限可测剖分}\}$.

Bowen^[9] 定义了非紧集的拓扑熵. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$ 之间的 d_n -距离定义为

$$d_n(x, y) := \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\}.$$

中心为 x 的 (n, ε) -球定义为 $B_n(x, \varepsilon) := \{y \in M : d_n(x, y) < \varepsilon\}$. 对一般的集合 $Z \subseteq X$ 、正整数 $N \in \mathbb{N}^+$ 和 $\varepsilon > 0$, 令 $\mathcal{G}_N(Z, \varepsilon)$ 为 Z 的形如 $B_u(x, \varepsilon)$ 的有限或可数开覆盖全体, 其中 $u \geq N$. 对任意 $s \geq 0$, 令

$$C(Z; s, N, \varepsilon, f) := \inf_{\mathcal{C} \in \mathcal{G}_N(Z, \varepsilon)} \sum_{B_u(x, \varepsilon) \in \mathcal{C}} e^{-su},$$

$$C(Z; s, \varepsilon, f) := \lim_{N \rightarrow \infty} C(Z; s, N, \varepsilon, f).$$

记 $h_{\text{top}}(Z; \varepsilon, f) := \inf\{s : C(Z; s, \varepsilon, f) = 0\} = \sup\{s : C(Z; s, \varepsilon, f) = \infty\}$. Z 的 (Bowen) 拓扑熵定义为

$$h_{\text{top}}(f, Z) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\text{top}}(Z; \varepsilon, f).$$

Bowen^[9] 证明了如下结论.

引理 2.1 (参见文献 [9, 定理 3]) 设 M 是一个紧度量空间, $f: M \rightarrow M$ 为一个连续映射. 对任意的 f -遍历测度 μ , 有

$$h_{\text{top}}(f, G_\mu) = h_\mu(f).$$

2.2 Lyapunov 指数与测度熵的关系

设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^1(M)$. 对任意的 $\mu \in \mathcal{M}(f, M)$, μ -a.e. $x \in M$ 是正则的 (参见文献 [6, 定理 5.4.1]). 记 x 的 Lyapunov 指数为

$$\chi_1(x) \geq \chi_2(x) \geq \dots \geq \chi_{\dim M}(x).$$

引理 2.2^[35] 对任意的 $f \in \text{Diff}^1(M)$ 和任意的 $\mu \in \mathcal{M}(f, M)$, 有

$$h_\mu(f) \leq \int \sum_{\chi_i(x) \geq 0} \chi_i(x) d\mu,$$

其中 $h_\mu(f)$ 表示 μ 的测度熵.

定义 2.1 设 $f \in \text{Diff}^1(M)$. 令 $\mu \in \mathcal{M}(f, M)$. 称 μ 满足 Pesin 熵公式, 如果

$$h_\mu(f) = \int \sum_{\chi_i(x) \geq 0} \chi_i(x) d\mu.$$

记 $PE_f := \{\mu \in \mathcal{M}(f, M) : \mu \text{ 满足 Pesin 熵公式}\}$.

注 2.1 称一个不变测度 μ 为 SRB 测度, 如果 μ 有正的 Lyapunov 指数且 μ 在不稳定流形上的条件测度相对于不稳定流形上的 Lebesgue 测度是绝对连续的. 对于 C^2 的微分同胚, 一个有正 Lyapunov 指数的不变测度是 SRB 测度当且仅当其满足 Pesin 熵公式^[24–26], 且双曲遍历的 SRB 测度是物理测度^[45]. 对于随机动力系统^[24–26] 中的结论有对应的结论, 可参见文献 [30]. 对非同胚的情形, 文献 [28] 得到了与折叠熵有关的类似结论. 但对于 C^1 的微分同胚, SRB 测度、物理测度和满足 Pesin 熵公式的测度这三者没有直接的包含关系.

引理 2.3 (参见文献 [11, 定理 1]) 设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^1(M)$ 在 M 上具有控制分解 $TM = E \oplus_\gamma F$. 令 $\mu \in \mathcal{M}(f, M)$ 为一个类物理测度, 则

$$h_\mu(f) \geq \int \sum_{i=1}^{\dim E} \chi_i(x) d\mu.$$

2.3 平衡态的定义

设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^1(M)$, $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ 为一个连续函数. 令 $\Lambda \subset M$ 为一个 f -不变的紧集. 定义

$$p_{f|\Lambda}(\psi|\Lambda) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f, \Lambda)} \left(h_\mu(f) + \int \psi d\mu \right).$$

记

$$ES_{f|\Lambda}(\psi|\Lambda) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(f, \Lambda) : h_\mu(f) + \int \psi d\mu = p_{f|\Lambda}(\psi|\Lambda) \right\}.$$

$ES_{f|\Lambda}(\psi|\Lambda)$ 中的测度被称为 f 在 Λ 上关于 ψ 的平衡态.

2.4 一致双曲集的定义及性质

称一个 f -不变的紧集 $\Lambda \subset M$ 为一致双曲的, 如果对任意的 $x \in \Lambda$, 切空间 $T_x M$ 有直和分解

$$T_x M = E^u(x) \oplus E^s(x),$$

作为子空间族在 Df 下不变:

$$Df(E^s(x)) = E^s(f(x)), \quad Df(E^u(x)) = E^u(f(x)),$$

并且存在两个常数 $C \geq 1$ 和 $0 < \lambda < 1$, 使得

$$\begin{aligned} |Df^n(v)| &\leq C\lambda^n|v|, \quad \forall x \in \Lambda, \quad v \in E^s(x), \quad n \geq 0, \\ |Df^{-n}(v)| &\leq C\lambda^n|v|, \quad \forall x \in \Lambda, \quad v \in E^u(x), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

(更多细节可参见文献 [44, 第四章]). 称 $\Lambda \subset M$ 为拓扑传递的, 如果对任意两个非空开集 $U, V \subset \Lambda$ 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $U \cap f^{-n}V \neq \emptyset$; 称其为局部最大的, 如果存在开集 $U \supseteq \Lambda$ 使得 $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$. 称一个拓扑传递的局部最大双曲集为基本集. 由文献 [44, 定理 4.14 和 4.24] 或者 [23, 推论 6.4.10 和定理 18.1.2] 知每个基本集是可扩的且具有伪轨跟踪性质. 从而可得基本集具有如下性质.

引理 2.4 设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^1(M)$. 令 $\Lambda \subseteq M$ 为一个基本集, 则 Λ 满足下列性质:

(1) (参见文献 [43, 定理 8.2]) 熵函数 $\mu \rightarrow h_\mu(f)$ 在 $\mathcal{M}(f, \Lambda)$ 中上半连续, 从而对任意的连续函数 $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$, $ES_{f|\Lambda}(\psi|_\Lambda)$ 是闭的;

(2) (参见文献 [27, 定理 B]) 对任意的 $\mu \in \mathcal{M}(f, \Lambda)$ 和 $\varepsilon, \eta > 0$, 存在 $\nu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, \Lambda)$ 使得 $\rho(\mu, \nu) < \varepsilon$ 且 $h_\nu(f) > h_\mu(f) - \eta$;

(3) (参见文献 [27, 推论 C(2)]) 对任意的 $0 \leq h < h_{\text{top}}(f, \Lambda)$, $\{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, \Lambda) : h_\mu(f) = h\}$ 在 $\{\mu \in \mathcal{M}(f, \Lambda) : h_\mu(f) \geq h\}$ 中形成一个稠密的 G_δ 型子集, 从而对任意的 $0 \leq h < h_{\text{top}}(f, \Lambda)$, 存在 $\mu_h \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, \Lambda)$ 使得 $h_{\mu_h}(f) = h$.

注 2.2 文献 [29] 进一步证明了引理 2.4(3) 中 μ_h 还可以是满支撑的且满足限制性的遍历优化的相关结论.

给定一个双曲的 f -遍历测度 μ , 则存在正整数 l 和 s , 使得对于 μ -a.e. $x \in M$, 其 Lyapunov 指数和相应的 Oseledets 分解分别为

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_l < 0 < \lambda_{l+1} < \lambda_{l+2} < \cdots < \lambda_{l+s}$$

和

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_l \oplus E_{l+1} \oplus E_{l+2} \oplus \cdots \oplus E_{l+s}.$$

记 $E^- = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_l$ 和 $E^+ = E_{l+1} \oplus E_{l+2} \oplus \cdots \oplus E_{l+s}$. 称 μ 的支撑集

$$S_\mu := \{x \in M : \text{对任意的 } x \text{ 的邻域 } U, \text{ 有 } \mu(U) > 0\}$$

具有一个对应于 Oseledets 分解的稳定/不稳定子丛的控制分解 $E \oplus_\gamma F$, 如果对于 μ -a.e. $x \in S_\mu$, 有 $F(x) = E^-(x)$ 和 $E(x) = E^+(x)$.

引理 2.5 ^[40] 设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^1(M)$. 给定一个双曲的 f -遍历测度 μ , 如果 $h_\mu(f) > 0$ 且 S_μ 具有一个对应于 Oseledets 分解的稳定/不稳定子丛的控制分解, 则对任意的 $0 < \eta < h_\mu(f)$, 存在一个基本集 $\Lambda \subset M$ 满足 $h_{\text{top}}(f, \Lambda) > \eta$.

由引理 2.5, 有如下引理.

引理 2.6 设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^1(M)$ 在 M 上具有部分双曲分解 $TM = E^u \oplus_\gamma E_1^c \oplus_\gamma \cdots \oplus_\gamma E_k^c \oplus_\gamma E^s$, 其中 $\dim E_i^c = 1$ 对任意的 $1 \leq i \leq k$ 成立, 如果

$$H_f^c \cap \{\mu \in \mathcal{M}(f, M) : h_\mu(f) > 0\} \neq \emptyset,$$

则

$$\sup_{\mu \in H_f^c} h_\mu(f) = \sup_{\Lambda \subseteq M \text{ 是基本集}} h_{\text{top}}(f, \Lambda).$$

证明 一方面, 给定一个基本集 $\Lambda \subset M$ 满足 $h_{\text{top}}(f, \Lambda) > 0$, 则由引理 2.2, 有

$$\{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, \Lambda) : h_\mu(f) > 0\} \subset H_f^c,$$

从而

$$H_f^c \cap \{\mu \in \mathcal{M}(f, M) : h_\mu(f) > 0\} \neq \emptyset,$$

因此

$$\sup_{\mu \in H_f^c} h_\mu(f) \geq \sup_{\Lambda \subseteq M \text{ 是基本集}} h_{\text{top}}(f, \Lambda). \quad (2.1)$$

另一方面, 给定 $\mu \in H_f^c$ 满足 $h_\mu(f) > 0$, 则由于 (M, f) 为中心多个一维的部分双曲系统, 故 S_μ 具有一个对应于 Oseledets 分解的稳定/不稳定子丛的控制分解. 由引理 2.5, 有

$$h_\mu(f) \leq \sup_{\Lambda \subseteq M \text{ 是基本集}} h_{\text{top}}(f, \Lambda),$$

从而

$$\sup_{\mu \in H_f^c} h_\mu(f) \leq \sup_{\Lambda \subseteq M \text{ 是基本集}} h_{\text{top}}(f, \Lambda). \quad (2.2)$$

最后, 结合 (2.1) 和 (2.2), 完成了该引理的证明. $\square$

3 主定理的证明

首先给出如下两个引理.

引理 3.1 设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^1(M)$, $\Lambda \subseteq M$ 为 f 的一个基本集. 于是

$$h_{\text{top}}(f, \Xi_f \cap \Lambda) = h_{\text{top}}(f, \Lambda).$$

进一步地, 如果 $C \subset \mathcal{M}(f, M)$ 为一个满足 $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap C$ 有限或可数无限的测度集, 则

$$h_{\text{top}}(f, H_C \cap \Xi_f \cap \Lambda) = h_{\text{top}}(f, \Lambda),$$

其中 $H_C = \{x \in M : pw_f(x) \cap C = \emptyset\}$.

证明 设 Λ 的双曲分解为 $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. 对任意的 $x \in \Lambda$, 记 $\psi(x) = -\log |\det Df|_{E^u(x)}|$. 则对任意的 $\mu \in \mathcal{M}(f, \Lambda)$, 有 $\int \sum_{i=1}^{\dim E^u} \chi_i(x) d\mu = -\int \psi d\mu$. 由引理 2.2, 对任意的 $\mu \in \mathcal{M}(f, M)$, 有

$$h_\mu(f) \leq \int \sum_{\chi_i(x) \geq 0} \chi_i(x) d\mu.$$

于是 $p_{f|_\Lambda}(\psi) \leq 0$ 且 $PE_f \cap \mathcal{M}(f, \Lambda) = ES_{f|_\Lambda}(\psi)$. 由引理 2.4(3) 可知, 存在 $\mu_0 \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, \Lambda)$ 使得 $h_{\mu_0}(f) = 0$. 又因为 $\int \psi d\mu_0 < 0$, 所以 $\mu_0 \notin ES_{f|_\Lambda}(\psi)$. 固定 $\eta > 0$. 由熵的变分原理 (参见文献 [43, 定理 8.6]) 知, 存在 $\mu_1 \in \mathcal{M}(f, \Lambda)$ 使得 $h_{\mu_1}(f) > h_{\text{top}}(f, \Lambda) - \eta$. 由熵函数 $\mu \mapsto h_\mu(f)$ 的仿射性, 可取 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$h_{\mu_\theta}(f) > h_{\mu_1}(f) - \eta, \quad (3.1)$$

其中

$$\mu_\theta = (1 - \theta)\mu_0 + \theta\mu_1.$$

因为 $\mu_0 \notin ES_{f|_\Lambda}(\psi)$, 所以 $\mu_\theta \notin ES_{f|_\Lambda}(\psi)$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(ES_{f|_\Lambda}(\psi), \mu_\theta)$. 由引理 2.4(1) 知 $ES_{f|_\Lambda}(\psi)$ 是非空闭集, 从而 $\varepsilon > 0$. 再由引理 2.4(3) 可知, 存在 $\nu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, \Lambda)$ 使得 $\rho(\mu_\theta, \nu) < \varepsilon$ 且 $h_\nu(f) = h_{\mu_\theta}(f)$. 于是 $\nu \notin ES_{f|_\Lambda}(\psi)$ 且

$$h_\nu(f) = h_{\mu_\theta}(f) > h_{\mu_1}(f) - \eta > h_{\text{top}}(f, \Lambda) - 2\eta.$$

这意味着 $\nu \in \mathcal{M}(f, \Lambda) \setminus PE_f$. 因此 $G_\nu \subset \Xi_f$. 又由引理 2.1 知 $h_{\text{top}}(f, G_\nu) = h_\nu(f)$. 所以

$$h_{\text{top}}(f, \Xi_f \cap \Lambda) \geq h_{\text{top}}(f, G_\nu) = h_\nu(f) > h_{\text{top}}(f, \Lambda) - 2\eta.$$

最后, 令 $\eta \rightarrow 0$, 得到 $h_{\text{top}}(f, \Xi_f \cap \Lambda) = h_{\text{top}}(f, \Lambda)$.

进一步地, 若 $C \subset \mathcal{M}(f, M)$ 为一个满足 $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap C$ 有限或可数无限的测度集, 则 $\{h_\mu(f) : \mu \in C\}$ 为一个至多可数集. 而 $\{h_{\mu_\theta}(f) : \mu_\theta = (1-\theta)\mu_0 + \theta\mu_1, \theta \in (0, 1)\}$ 不可数. 于是可取 $\theta \in (0, 1)$ 使得不仅 (3.1) 成立, 而且 $h_{\mu_\theta}(f) \notin \{h_\mu(f) : \mu \in C\}$. 于是 $h_\nu(f) = h_{\mu_\theta}(f) \notin \{h_\mu(f) : \mu \in C\}$. 所以 ν 不仅满足 $\nu \notin ES_{f|_\Lambda}(\psi)$, 而且 $\nu \notin C$. 因此 $G_\nu \subset \Xi_f \cap H_C$. 所以

$$h_{\text{top}}(f, H_C \cap \Xi_f \cap \Lambda) \geq h_{\text{top}}(f, G_\nu) = h_\nu(f) > h_{\text{top}}(f, \Lambda) - 2\eta.$$

最后, 令 $\eta \rightarrow 0$, 得到 $h_{\text{top}}(f, H_C \cap \Xi_f \cap \Lambda) = h_{\text{top}}(f, \Lambda)$. $\square$

记 $H_f^{e, \text{dom}} = \{\mu \in H_f^e : S_\mu \text{ 具有一个对应于 Oseledets 分解的稳定/不稳定子丛的控制分解}\}$. 结合引理 3.1 和 2.5 可以得到如下推论.

推论 3.1 设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^1(M)$. 于是

$$h_{\text{top}}(f, \Xi_f) \geq \sup_{\mu \in H_f^{e, \text{dom}}} h_\mu(f).$$

引理 3.2 设 M 是一个紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \text{Diff}^{1+\alpha}(M)$, 其中 $\alpha > 0$. 令 $C \subset \mathcal{M}(f, M)$ 为一个测度集. 如果 $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap C$ 为一个有限集或者可数无限集, 且每个 $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap C$ 都是双曲的, 则

$$h_{\text{top}}(f, H_C) = h_{\text{top}}(f, M),$$

其中 $H_C = \{x \in M : pw_f(x) \cap C = \emptyset\}$.

证明 由熵的变分原理 (参见文献 [43, 推论 8.6.1]) 知 $h_{\text{top}}(f, M) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M)} h_\mu(f)$. 下面分两种情形讨论:

(1) 当 $\sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap C} h_\mu(f) < h_{\text{top}}(f, M)$ 时, 对于充分小的 $\eta > 0$, 存在 $\mu_\eta \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \setminus C$ 使得 $h_{\mu_\eta}(f) > h_{\text{top}}(f, M) - \eta$. 于是 $G_{\mu_\eta} \subset H_C$ 且由引理 2.1 知 $h_{\text{top}}(f, G_{\mu_\eta}) = h_{\mu_\eta}(f)$. 从而

$$h_{\text{top}}(f, H_C) \geq h_{\text{top}}(f, G_{\mu_\eta}) > h_{\text{top}}(f, M) - \eta.$$

最后, 令 $\eta \rightarrow 0$, 得到 $h_{\text{top}}(f, H_C) = h_{\text{top}}(f, M)$.

(2) 当 $\sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap C} h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f, M)$ 时, 对任意的 $\eta > 0$, 存在 $\nu_\eta \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f, M) \cap C$ 使得 $h_{\nu_\eta}(f) > h_{\text{top}}(f, M) - \eta$. 由假设条件知 ν_η 双曲. 于是由文献 [23, 定理 S.5.9] 知, 存在一个基本集 $\Lambda \subset M$ 使得 $h_{\text{top}}(f, \Lambda) > h_{\nu_\eta}(f) - \eta$. 由引理 3.1 得到 $h_{\text{top}}(f, H_C \cap \Lambda) = h_{\text{top}}(f, \Lambda)$, 从而

$$h_{\text{top}}(f, H_C) \geq h_{\text{top}}(f, \Lambda) > h_{\nu_\eta}(f) - \eta > h_{\text{top}}(f, M) - 2\eta.$$

最后, 令 $\eta \rightarrow 0$, 得到 $h_{\text{top}}(f, H_C) = h_{\text{top}}(f, M)$. $\square$

3.1 定理 1.1 的证明

设 $f \in \text{Diff}^r(M)$ 具有部分双曲分解 $TM = E^u \oplus_{\succ} E_1^c \oplus_{\succ} \cdots \oplus_{\succ} E_k^c \oplus_{\succ} E^s$, 其中 $\dim E_i^c = 1$ 对任意的 $1 \leq i \leq k$ 成立. 如果

$$H_f^c \cap \{\mu \in \mathcal{M}(f, M) : h_\mu(f) > 0\} = \emptyset,$$

则有

$$h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f) \geq \sup_{\mu \in H_f^c} h_\mu(f).$$

下面考虑 $H_f^c \cap \{\mu \in \mathcal{M}(f, M) : h_\mu(f) > 0\} \neq \emptyset$ 的情形, 则由引理 2.6, 只需要证明

$$h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f) \geq \sup_{\Lambda \subseteq M \text{ 是基本集}} h_{\text{top}}(f, \Lambda).$$

令 $\Lambda \subseteq M$ 为一个满足 $h_{\text{top}}(f, \Lambda) > 0$ 的基本集, 其双曲分解为 $T_\Lambda M = \tilde{E}^u \oplus \tilde{E}^s$. 于是存在 $1 \leq l \leq k$, 使得对任意的 $x \in \Lambda$, 有

$$\tilde{E}^u(x) = E^u(x) \oplus_{\succ} E_1^c(x) \oplus_{\succ} \cdots \oplus_{\succ} E_l^c(x), \quad \tilde{E}^s(x) = E_{l+1}^c(x) \oplus_{\succ} \cdots \oplus_{\succ} E_k^c(x) \oplus_{\succ} E^s(x).$$

记

$$E := E^u \oplus_{\succ} E_1^c \oplus_{\succ} \cdots \oplus_{\succ} E_l^c, \quad F := E_{l+1}^c \oplus_{\succ} \cdots \oplus_{\succ} E_k^c \oplus_{\succ} E^s,$$

则 $TM = E \oplus_{\succ} F$, 且对任意的 $\mu \in \mathcal{M}(f, \Lambda)$ 和 μ -a.e. $x \in \Lambda$, 有

$$\chi_{\dim E}(x) > 0 > \chi_{\dim E+1}(x). \quad (3.2)$$

由引理 2.3 知, 对任意的 $\mu \in \mathcal{O}_f$, 有

$$h_\mu(f) \geq \int \sum_{i=1}^{\dim E} \chi_i(x) d\mu. \quad (3.3)$$

由引理 2.2 知, 对任意的 $\mu \in \mathcal{M}(f, M)$, 有

$$h_\mu(f) \leq \int \sum_{\chi_i(x) \geq 0} \chi_i(x) d\mu. \quad (3.4)$$

于是由 (3.2)–(3.4) 可知, 当 $\mu \in \mathcal{M}(f, \Lambda) \cap \mathcal{O}_f$ 时, $h_\mu(f) = \int \sum_{\chi_i(x) \geq 0} \chi_i(x) d\mu$, 即 $\mathcal{M}(f, \Lambda) \cap \mathcal{O}_f \subset PE_f$. 这意味着 $\Xi_f \cap \Lambda \subset \Gamma_f$. 从而由引理 3.1 得到

$$h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f) \geq h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f \cap \Lambda) = h_{\text{top}}(f, \Xi_f \cap \Lambda) = h_{\text{top}}(f, \Lambda).$$

3.2 推论 1.1 的证明

令 $g \in \mathcal{U}_{\rho, r}$. 假设 $r(h + \log L) + H(2r) < h_{\text{top}}(g, \mathbb{T}^d)$. 我们不加解释地引用文献 [16] 中的符号来证明. 由文献 [16, 定理 3.3 和 5.8] 可以得到 $h(\mathcal{C}, g) \leq r(h + \log L) + H(2r)$, 其中 $h(\mathcal{C}, g)$ 的定义可以参考文献 [16, 第 3.3 小节]. 结合假设条件, 有 $h(\mathcal{C}, g) < h_{\text{top}}(g, \mathbb{T}^d)$. 令 $0 < \eta < h_{\text{top}}(g, \mathbb{T}^d) - h(\mathcal{C}, g)$. 由熵的

变分原理 (参见文献 [43, 定理 8.6]) 知, 存在 $\mu_\eta \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(g, \mathbb{T}^d)$ 使得 $h_{\mu_\eta}(g) > h_{\text{top}}(g, \mathbb{T}^d) - \eta > h(\mathcal{C}, g)$. 于是由文献 [16, 引理 3.5] 有 $\mu_\eta(A^+) = 0$, 其中

$$A^+ = \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \text{存在 } K(x) \text{ 使得 } \frac{1}{n} S_n^g \chi(x) < r \text{ 对任意的 } n > K(x) \text{ 成立} \right\}.$$

从而对 μ_η -a.e. x , 存在一系列递增的正整数 $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 使得 $\frac{1}{n_i} S_{n_i}^g \chi(x) \geq r$ 对任意的 i 成立. 结合文献 [16, (4.1)], 这意味着存在 $0 < \theta_r(g) < 1$, 使得 $\|Dg^{n_i}|_{E^{cs}(x)}\| \leq (\theta_r(g))^{n_i}$ 对任意的 $i \in \mathbb{N}$ 成立, 其中 $E^{cs} = E^c \oplus_\gamma E^s$. 所以对 μ_η -a.e. x , 其在 $E^{cs}(x)$ 上的 Lyapunov 指数均小于 0. 因此 μ_η 是一个双曲的 g -遍历测度, 即 $\mu_\eta \in H_g^e$. 这意味着 $\sup_{\mu \in H_g^e} h_\mu(g) = h_{\text{top}}(g, \mathbb{T}^d)$. 最后, 结合定理 1.1, 得到 $h_{\text{top}}(g, \Gamma_g \cap \Xi_g) = h_{\text{top}}(g, \mathbb{T}^d)$.

3.3 定理 1.2 的证明

注意 $\Gamma_f \cap \Xi_f = \{x \in M : pw_f(x) \cap (\mathcal{O}_f \cup PE_f) = \emptyset\}$. 于是由引理 3.2 得到定理 1.2.

3.4 定理 1.3 的证明

由文献 [5] 知, 存在一个 C^1 -通有的集合 $\mathcal{R} \subset \text{Diff}_{\text{vol}}^1(M)$ 使得对任意的 $f \in \mathcal{R}$, 如果其具有正熵, 则体积测度 m 是 f -遍历的双曲测度, 且 m 的支撑集具有一个对应于 Oseledets 分解的稳定/不稳定子丛的控制分解. 令 $f \in \mathcal{R}$. 如果 $h_m(f) = 0$, 则显然有 $h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f) \geq h_m(f)$. 如果 $h_m(f) > 0$, 则由引理 2.5 可知, 对任意的 $0 < \eta < h_m(f)$, 存在一个基本集 $\Lambda \subset M$ 满足 $h_{\text{top}}(f, \Lambda) > \eta$. 因为 m 是 f -遍历的双曲测度, 所以 $m(G_m) = 1$. 从而 $\mathcal{P}_f = \{m\}$. 于是由文献 [12, 定理 1.6] 知 $\mathcal{O}_f = \mathcal{P}_f = \{m\}$. 由引理 3.1 得到 $h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f \cap \Lambda) = h_{\text{top}}(f, \Lambda)$. 从而 $h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f) \geq h_{\text{top}}(f, \Lambda) > \eta$. 由 η 的任意性得到 $h_{\text{top}}(f, \Gamma_f \cap \Xi_f) \geq h_m(f)$.

注 3.1 由文献 [39, 定理 2.3] 知, 存在一个 C^1 -通有的集合 $\tilde{\mathcal{R}} \subset \text{Diff}_{\text{vol}}^1(M)$ 使得对任意的 $f \in \tilde{\mathcal{R}}$, 体积测度 m 满足熵公式. 考虑 $f \in \mathcal{R} \cap \tilde{\mathcal{R}}$, 如果进一步有 $h_m(f) > 0$, 则 $\mathcal{O}_f = \mathcal{P}_f = \{m\} \subset PE_f$.

参考文献

- 1 Alves J F, Bonatti C, Viana M. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. *Invent Math*, 2000, 140: 351–398
- 2 Alves J F, Dias C L, Luzzatto S, et al. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is weakly expanding. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2017, 19: 2911–2946
- 3 Andersson M, Vázquez C H. On mostly expanding diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2018, 38: 2838–2859
- 4 Anosov D V. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Mat Inst Steklov*, 1967, 90: 3–210
- 5 Avila A, Crovisier S, Wilkinson A. Diffeomorphisms with positive metric entropy. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 2016, 124: 319–347
- 6 Barreira L M, Pesin Y B. *Nonuniform Hyperbolicity*. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2007
- 7 Bonatti C, Viana M. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. *Israel J Math*, 2000, 115: 157–193
- 8 Bowen R. Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms. *Trans Amer Math Soc*, 1971, 154: 377–397
- 9 Bowen R. Topological entropy for noncompact sets. *Trans Amer Math Soc*, 1973, 184: 125–136
- 10 Bowen R. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Berlin: Springer-Verlag, 1975

- 11 Catsigeras E, Cerminara M, Enrich H. The Pesin entropy formula for C^1 diffeomorphisms with dominated splitting. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2015, 35: 737–761
- 12 Catsigeras E, Enrich H. SRB-like measures for C^0 dynamics. *Bull Pol Acad Sci Math*, 2011, 59: 151–164
- 13 Catsigeras E, Tian X T. Dominated splitting, partial hyperbolicity and positive entropy. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2016, 36: 4739–4759
- 14 Catsigeras E, Tian X T, Vargas E. Topological entropy on points without physical-like behaviour. *Math Z*, 2019, 293: 1043–1055
- 15 Chen A N, Tian X T. Distributional chaos in multifractal analysis, recurrence and transitivity. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2021, 41: 349–378
- 16 Climenhaga V, Fisher T L, Thompson D J. Equilibrium states for Mañé diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2019, 39: 2433–2455
- 17 Dong Y W, Hou X B, Lin W S, et al. Different statistical behaviors of orbits. *arXiv:1701.01910v5*, 2025
- 18 Hou X B, Lin W S, Tian X T. High pointwise emergence via saturated sets. *Nonlinearity*, 2023, 36: 1928–1956
- 19 Hou X B, Lin W S, Tian X T, et al. Emergence behavior versus physical-like behavior. *Internat J Bifur Chaos*, 2024, 34: 2450054
- 20 Hou X B, Tian X T. Strongly distributional chaos of irregular orbits that are not uniformly hyperbolic. *arXiv:2111.06055*, 2021
- 21 Hou X B, Tian X T. Entropy of irregular points that are not uniformly hyperbolic. *arXiv:2111.08325*, 2021
- 22 Huang Y, Tian X T, Wang X Y. Transitively-saturated property, Banach recurrence and Lyapunov regularity. *Nonlinearity*, 2019, 32: 2721–2757
- 23 Katok A, Hasselblatt B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995
- 24 Ledrappier F, Strelcyn J M. A proof of the estimation from below in Pesin's entropy formula. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1982, 2: 203–219
- 25 Ledrappier F, Young L S. The metric entropy of diffeomorphisms: Part I: Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula. *Ann of Math (2)*, 1985, 122: 509–539
- 26 Ledrappier F, Young L S. The metric entropy of diffeomorphisms: Part II: Relations between entropy, exponents and dimension. *Ann of Math (2)*, 1985, 122: 540–574
- 27 Li J, Oprocha P. Properties of invariant measures in dynamical systems with the shadowing property. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2018, 38: 2257–2294
- 28 Liao G, Wang S R. Ruelle inequality of folding type for $C^{1+\alpha}$ maps. *Math Z*, 2018, 290: 509–519
- 29 Lin W S, Tian X T. Ergodic optimization restricted on certain subsets of invariant measures. *J Math Anal Appl*, 2024, 530: 127709
- 30 Liu P D, Qian M. *Smooth Ergodic Theory of Random Dynamical Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1995
- 31 Mañé R. Contributions to the stability conjecture. *Topology*, 1978, 17: 383–396
- 32 Newhouse S E. Nondensity of axiom $A(a)$ on S^2 . In: *Global Analysis. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. Providence: Amer Math Soc, 1970, 191–202
- 33 Pesin Y B. *Lectures on Partial Hyperbolicity and Stable Ergodicity*. Zürich: Eur Math Soc, 2004
- 34 Ruelle D P. A measure associated with axiom-A attractors. *Amer J Math*, 1976, 98: 619–654
- 35 Ruelle D P. An inequality for the entropy of differentiable maps. *Bol Soc Brasil Mat*, 1978, 9: 83–87
- 36 Sinai Y G. Gibbs measures in ergodic theory. *Russian Math Surveys*, 1972, 27: 21–69
- 37 Smale S. Differentiable dynamical systems. *Bull Amer Math Soc*, 1967, 73: 747–817
- 38 Sun W X. *Differentiable Ergodic Theory (in Chinese)*. Beijing: Peking Univ Press, 2022 [孙文祥. 微分遍历论. 北京: 北京大学出版社, 2022]
- 39 Sun W X, Tian X T. Dominated splitting and Pesin's entropy formula. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2012, 32: 1421–1434
- 40 Sun W X, Tian X T. Diffeomorphisms with Liao-Pesin set. *arXiv:1004.0486*, 2015
- 41 Tian X T. Different asymptotic behavior versus same dynamical complexity: Recurrence & (ir)regularity. *Adv Math*, 2016, 288: 464–526
- 42 Tian X T. When a physical-like measure is physical or SRB? *J Differential Equations*, 2018, 265: 3567–3586
- 43 Walters P. *An Introduction to Ergodic Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1982

- 44 Wen L. Differentiable Dynamical Systems (in Chinese). Beijing: Higher Ed Press, 2015 [文兰. 微分动力系统. 北京: 高等教育出版社, 2015]
- 45 Young L S. What are SRB measures, and which dynamical systems have them? J Stat Phys, 2002, 108: 733–754

Topological entropy of the set of points without physical-like behaviour and away from measures satisfying the entropy formula beyond uniform hyperbolicity

Xiaobo Hou, Wanshan Lin & Xueting Tian

Abstract We study the topological entropy of the set of points without physical-like behaviour and away from measures satisfying the entropy formula in differentiable dynamical systems beyond uniform hyperbolicity. On the one hand, for partially hyperbolic systems with multiple one-dimensional centers, we prove that the topological entropy of this set is greater than or equal to the supremum of the metric entropy of all hyperbolic measures. Additionally, for Mañé diffeomorphisms, we show that the topological entropy of this set is equal to the topological entropy of the entire system. On the other hand, for differentiable dynamical systems where the number of ergodic physical measures and ergodic measures satisfying the entropy formula is countable and each ergodic physical measure and ergodic measure satisfying the entropy formula is hyperbolic, we prove that the topological entropy of this set is equal to the topological entropy of the entire system, and we present applications of this result. Finally, we prove that for C^1 -generic volume-preserving diffeomorphisms, the topological entropy of this set is greater than or equal to the metric entropy of the volume measure.

Keywords partial hyperbolicity, physical-like behaviour, entropy formula, topological entropy

MSC(2020) 37C05, 37C50, 37D25, 37D30

doi: 10.1360/SSM-2024-0302