中国科学: 数学　2026 年　第 56 卷　第 5 期: 949～974
SCIENTIA SINICA Mathematica
论　文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates

离散型多线性极大算子及其分数次情形的端点正则性

张代清[1*], 刘凤[2]

1. 福建理工大学计算机科学与数学学院, 福州 350118;
2. 山东科技大学数学与系统科学学院, 青岛 266590
E-mail: zhangdaiqing2011@163.com, fliu@sdust.edu.cn

收稿日期: 2024-04-10; 接受日期: 2024-09-22; 网络出版日期: 2024-12-26; * 通信作者
福建省自然科学基金 (批准号: 2023J01956)、山东省自然科学基金 (批准号: ZR2023MA022) 和国家自然科学基金 (批准号: 12326371) 资助项目

摘要　本文研究了由凸集或各边平行于坐标轴的方体所生成的离散型多线性极大算子及其分数次情形的端点正则性, 证明了上述各类极大函数的导数有界性与连续性.

关键词　离散型多线性极大算子　分数次情形　凸集　正则性　有界性与连续性

MSC (2020) 主题分类　42B25, 46E35, 26A45, 39A12

1　引言

1.1　经典 Hardy-Littlewood 极大算子

设 $d\geqslant 1$, $f\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$. 中心型 Hardy-Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 定义为

$$\mathcal{M}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}|f(y)|dy,\quad x\in\mathbb{R}^d,$$

其中 $B_r(x)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上以 x 为中心、以 r 为半径的球, $|B_r(x)|$ 表示球 $B_r(x)$ 的体积. 非中心型 Hardy-Littlewood 极大算子 $\widetilde{\mathcal{M}}f$ 定义如下:

$$\widetilde{\mathcal{M}}f(x)=\sup_{x\in B_r(z)}\frac{1}{|B_r(z)|}\int_{B_r(z)}|f(y)|dy,\quad x\in\mathbb{R}^d.$$

由经典的 Hardy-Littlewood-Wiener 定理知, 当 $1<p\leqslant\infty$ 时, $\mathcal{M}$ 是强 (p,p) 有界的, 同时 $\mathcal{M}$ 不是强 $(1,1)$ 型的, 而是弱 $(1,1)$ 型有界算子 (参见文献 [16,38]). 同样的结论对于 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 也成立.

众所周知, Hardy-Littlewood 极大算子一直是现代调和分析的核心内容之一, 在偏微分方程、遍历理论、概率论等众多数学领域得到了广泛的应用. 特别地, Hardy-Littlewood 极大算子可用来证

英文引用格式: Zhang D Q, Liu F. Endpoint regularity for discrete multilinear maximal operators and their fractional variants (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 949–974, doi: 10.1360/SSM-2024-0110

© 2024《中国科学》杂志社　www.scichina.com　mathcn.scichina.com

明 Lebesgue 微分定理、Rademacher 微分定理和 Fatou 定理等著名定理. 近年来, 极大算子的正则性研究引起了学者的广泛关注, 一个大家比较感兴趣的问题是, 极大算子 $\mathcal{M}$ 能否保持函数的光滑性? 即著名的极大算子正则性问题. Kinnunen [18] 首次研究了上述问题并证明了当 $1 < p \leqslant \infty$ 时, $\mathcal{M}: W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 是有界的. 随后, Kinnunen 的结果被许多学者推广到其局部情形、分数次情形以及多线性情形 (参见文献 [9,19,20,25]). 另外, 由于 $\mathcal{M}f$ 的导数不满足次线性性质, 因此当 $p > 1$ 时, 映射 $\mathcal{M}: W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 的连续性也是一个非平凡的问题. 该问题最早由 Hajłasz 和 Onninen 在文献 [15, 问题 3] 中提出, 并由 Luiro [30] 解决. 随后上述连续性结果也得到了一系列的推广, 参见文献 [9, 24, 31].

由于 $\mathcal{M}: L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$ 不是有界的, 2004 年, Hajłasz 和 Onninen [15] 提出如下问题:

问题 1.1 [15] 算子 $f \mapsto |\nabla \mathcal{M}f|$ 是从 $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 有界的吗?

对于一维情形, 上述问题已经得到了解决 (参见文献 [1,21,36]). Tanaka [36] 证明了当 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ 时, 函数 $\widetilde{\mathcal{M}}f$ 是弱可微的且弱导数满足

$$\|(\widetilde{\mathcal{M}}f)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant 2\|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{1.1}$$

注意到, 一阶 Sobolev 空间 $W^{1,1}(\mathbb{R})$ 是有界变差函数空间的真子空间, Aldaz 和 Pérez Lázaro [1] 建立了一个更一般的结果: 当 f 是 $\mathbb{R}$ 上的有界变差函数时, $\widetilde{\mathcal{M}}f$ 是绝对连续的并且满足

$$\mathrm{Var}(\widetilde{\mathcal{M}}f) \leqslant \mathrm{Var}(f), \tag{1.2}$$

其中 $\mathrm{Var}(f)$ 表示 f 的全变差. 作为上述结果的直接推论, 当 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ 时, 有

$$\|(\widetilde{\mathcal{M}}f)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}, \tag{1.3}$$

同时 (1.2) 和 (1.3) 是尖锐的.

对于中心情形, Kurka [21] 证明了

$$\mathrm{Var}(\mathcal{M}f) \leqslant 240{,}004\mathrm{Var}(f),$$

其中 f 是 $\mathbb{R}$ 上的有界变差函数; 同时也证明了当 $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ 时 $\mathcal{M}f$ 是弱可导的, 当常数 $C = 240{,}004$ 时 (1.3) 对于算子 $\mathcal{M}$ 也成立. 最近, Carneiro 等 [8] 证明了算子 $f \mapsto (\widetilde{\mathcal{M}}f)'$ 是从 $W^{1,1}(\mathbb{R})$ 到 $L^1(\mathbb{R})$ 连续的. González-Riquelme [13] 证明了 $f \mapsto (\mathcal{M}f)'$ 是从 $W^{1,1}(\mathbb{R})$ 到 $L^1(\mathbb{R})$ 连续的. 对于高维的情形, Luiro [32] 证明了对于径向 $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ 函数, (1.1) 成立. 相关进展可参见文献 [5, 7, 10, 33].

1.2 离散型极大算子

近年来, 离散型算子的正则性问题引起了广大学者的关注 (参见文献 [2, 6, 7, 23, 26, 27, 34, 37]). 为了叙述简便, 首先给出一些记号和定义.

设 $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, $|\vec{n}| = (\sum_{i=1}^d |n_i|^2)^{1/2}$. 当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时, 定义离散函数 $f: \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ 的 $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ 范数为 $\|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} = (\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} |f(\vec{n})|^p)^{1/p}$, $\|f\|_{\ell^\infty(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} |f(\vec{n})|$. 设 $A \subset \mathbb{R}^d$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 记 $\|f\|_{\ell^p(A)} = \|f\chi_A\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}$.

定义 1.1 (离散型 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\mathbb{Z}^d)$) 设 $\vec{e}_l = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $l = 1, 2, \ldots, d$ 为第 l 个分量是 1 的单位向量. 离散函数 f 的梯度 ∇f 定义为 $\nabla f(\vec{n}) = (D_1 f(\vec{n}), D_2 f(\vec{n}), \ldots, D_d f(\vec{n}))$, 其中 $D_l f(\vec{n})$ 是 f 的偏导且 $D_l f(\vec{n}) = f(\vec{n} + \vec{e}_l) - f(\vec{n})$. 离散型 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\mathbb{Z}^d)$ 定义为

$$W^{1,p}(\mathbb{Z}^d) := \{f: \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{1,p} = \|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} + \|\nabla f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} < \infty\}.$$

注意到

$$\|\nabla f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)} \leqslant (2d+1)\|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^d)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \tag{1.4}$$

且

$$W^{1,p}(\mathbb{Z}^d) = \ell^p(\mathbb{R}^d), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{1.5}$$

本文首先研究由一般凸集生成的离散型多线性极大算子及其分数次情形的端点正则性. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 表示具有 Lipschitz 边界的有界开凸集. 假定 $\vec{0} \in \mathrm{int}(\Omega)$ 且 $\pm\vec{e}_i \in \overline{\Omega}$, $1 \leqslant i \leqslant d$. 设 $r \geqslant 0$, 记 $\overline{\Omega}_0(\vec{x}_0) = \{x_0\}$ 表示中心在 $\vec{x}_0$、半径为 r 的球, 且

$$\overline{\Omega}_r(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{Z}^d; r^{-1}(\vec{x} - \vec{x}_0) \in \overline{\Omega}\}, \quad r > 0.$$

当 $\vec{x}_0 = \vec{0}$ 时, 记 $\overline{\Omega}_r = \overline{\Omega}_r(\vec{0})$. ℓ^p- 球 $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d; |\vec{x}|_p < 1\}$, 其中 $|\vec{x}|_p = (\sum_{i=1}^d |x_i|^p)^{1/p}$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. 当 $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ 时, 也记 $|\vec{x}| = |\vec{x}|_2$.

定义 1.2 (由凸集 Ω 生成的离散型多线性分数次极大算子) 设 $m \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha < md$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, 其中 $f_j : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, 定义离散型中心型和非中心型 m- 次线性分数次极大算子 $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}$ 和 $\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}$ 分别为

$$\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}) = \sup_{r>0} \frac{1}{N(r)^{m-\frac{\alpha}{d}}} \prod_{j=1}^m \sum_{\vec{k} \in \overline{\Omega}_r} |f_j(\vec{n} + \vec{k})|$$

和

$$\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}) = \sup_{\vec{n} \in \overline{\Omega}_r(\vec{x}_0)} \frac{1}{N(\vec{x}_0, r)^{m-\frac{\alpha}{d}}} \prod_{j=1}^m \sum_{\vec{k} \in \overline{\Omega}_r(\vec{x}_0)} |f_j(\vec{k})|,$$

其中 $N(\vec{x}, r)$ 为 $\overline{\Omega}_r(\vec{x})$ 中的格点数 (记 $N(r) := N(\vec{0}, r)$).

为了简便, 当 $m = 1$ 时, 记 $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha} = M_{\Omega,\alpha}$, $\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha} = \widetilde{M}_{\Omega,\alpha}$. 当 $\alpha = 0$ 时, 记 $M_{\Omega,\alpha} = M_\Omega$, $\widetilde{M}_{\Omega,\alpha} = \widetilde{M}_\Omega$. 特别地, 当 $d = 1$, $\Omega = (-1, 1)$ 时, 算子 M_Ω (或 $\widetilde{M}_\Omega$) 就是经典的离散型中心型 (或非中心型) Hardy-Littlewood 极大算子 M (或 $\widetilde{M}$).

设 $0 \leqslant \alpha < md$, $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, 规定当 $\alpha > 0$ 时, 每个 $\alpha_j > 0$; 当 $\alpha = 0$ 时, 每个 $\alpha_j = 0$. 显然

$$\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}) \leqslant \prod_{j=1}^m M_{\Omega,\alpha_j} f_j(\vec{n}). \tag{1.6}$$

文献 [7] 证明了当 $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < d/p$, $q = dp/(d - \alpha p)$ 时, $M_{\Omega,\alpha}$ 是从 $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 有界的. 结合 (1.6) 知, 当 $1 < p_1, \ldots, p_m \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ 以及 $\alpha = 0$ 时, 或者当 $1 < p_1, \ldots, p_m < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$ 以及 $0 < \alpha < md$, $1/q = 1/p_1 + \cdots + 1/p_m - \alpha/d$ 时, $\|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} \leqslant C \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z}^d)}$.

2012 年, Bober 等 [2] 首次研究了离散型极大算子的正则性. 他们证明了

$$\|(\widetilde{M}f)'\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leqslant \|f'\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \tag{1.7}$$

和

$$\|(Mf)'\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leqslant \left(2 + \frac{146}{315}\right)\|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}, \tag{1.8}$$

并指出 (1.7) 是尖锐的, 但是 (1.8) 不是尖锐的. 随后 Madrid [34] 证明了 (1.8) 成立且最优常数 $C=2$. 对于 M, Temur [37] 证明了 (1.7) 也是成立的 (其中常数 $C=294{,}912{,}004$). Carneiro 和 Madrid [7] 及 Liu [23] 将 (1.7) 和 (1.8) 推广到分数次情形. 其他相关结果可参见文献 [8,35]. 对于高维情形, Carneiro 和 Hughes [6] 证明了算子 $f\mapsto|\nabla M_\Omega f|$ 和 $f\mapsto|\nabla\widetilde{M}_\Omega f|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 有界且连续的. 随后, Carneiro 和 Madrid [7] 将文献 [6] 中的结果推广到分数次情形. 具体地, 他们证明了如下定理.

定理 A [7] (i) 设 $0\leqslant\alpha<d$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, $f\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, $q\geqslant1$ 且满足 $q>d/(d-\alpha+\beta)$, 则存在常数 $C=C(d,\Omega,\alpha,\beta,q)>0$, 使得

$$\|\nabla M_{\Omega,\alpha}f\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\leqslant C\|\nabla f\|^{1-\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\|f\|^{\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.$$

进一步地, 算子 $f\mapsto|\nabla M_{\Omega,\alpha}f|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 连续的.

(ii) 设 $1\leqslant\alpha<d$, $0\leqslant\beta<1$, $f\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 且满足 $q=d/(d-\alpha+\beta)$, 则存在常数 $C=C(d,\Omega,\alpha,\beta)>0$, 使得

$$\|\nabla M_{\Omega,\alpha}f\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\leqslant C\|\nabla f\|^{1-\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\|f\|^{\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.$$

进一步地, 算子 $f\mapsto|\nabla M_{\Omega,\alpha}f|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 连续的. 上述结果对于 $\widetilde{M}_{\Omega,\alpha}$ 也成立.

当 $\Omega=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^d;|\vec{x}|<1\}$ 时, 算子 $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}$ (或 $\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}$) 就是由球体生成的经典的离散型中心型 (或非中心型) 多线性分数次极大算子 $\mathfrak{M}_\alpha$ (或 $\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha$). Liu 和 Wu [26] 建立了如下正则性.

定理 B [26] 设 $d\geqslant1$, $0\leqslant\alpha<md-d$, 则 $\vec{f}\mapsto|\nabla\mathfrak{M}_\alpha(\vec{f})|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)\times\cdots\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 的有界连续算子.

基于上述结论, 一个自然的问题是, 由一般凸集 Ω 生成的离散型多线性极大算子及其分数次情形是否有与 $\mathfrak{M}_\alpha$ 类似的正则性. 我们的回答是肯定的. 具体地, 我们将建立如下结果.

定理 1.1 设 $0\leqslant\alpha<md$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, $q\geqslant1$ 且满足 $q>d/(md-\alpha+\beta)$, 则存在常数 $C=C(\alpha,d,m,\Omega,\beta,q)>0$, 使得

$$\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\leqslant C\sum_{\mu=1}^{m}(\|f_\mu\|^{\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\|\nabla f_\mu\|^{1-\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)})\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq\mu}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)},\tag{1.9}$$

其中 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$, 且每个 $f_j\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$. 进一步地, 算子 $\vec{f}\mapsto|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)\times\cdots\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 连续的. 上述结果对于 $\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}$ 也成立.

定理 1.2 设 $d\geqslant2$, $0\leqslant\beta_i<1$ $(\forall\,1\leqslant i\leqslant m)$, $\max\{1,(m-1)(d-1)+\sum_{i=1}^m\beta_i\}\leqslant\alpha<\min\{md,m(d-1)+\sum_{i=1}^m\beta_i+1\}$ 且满足 $q=d(m(d-1)+\sum_{i=1}^m\beta_i-\alpha+1)^{-1}$, 则存在常数 $C=C(\alpha,d,m,\Omega,\beta_1,\dots,\beta_m)>0$, 使得

$$\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\leqslant C\prod_{i=1}^{m}(\|\nabla f_i\|^{1-\beta_i}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\|f_i\|^{\beta_i}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}),\tag{1.10}$$

其中 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$, $f_j\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$. 而且算子 $\vec{f}\mapsto|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)\times\cdots\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 连续的. 上述结果对于 $\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}$ 也成立.

由定理 1.1, 可以直接得到如下推论.

推论 1.1 设 $0\leqslant\alpha<md-d+1$, $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$, 且每个 $f_j\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, 则存在常数 $C=C(\alpha,d,m,\Omega)>0$, 使得

$$\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\leqslant C\prod_{1\leqslant j\leqslant m}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.$$

进一步地, 算子 $\vec{f}\mapsto|\nabla \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)\times\cdots\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 连续的. 上述结果对于 $\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}$ 也成立.

注 1.1 (i) (1.9) 成立的前提条件是 $q\geqslant d/(md-\alpha+\beta)$. 例如, 设 $\Omega=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^d;|\vec{x}|<1\}$, l 是一个整数且满足 $l\geqslant 8\sqrt{d}$. 取 $f_j(\vec{n})=\chi_{\{|\vec{n}|\leqslant l\}}(\vec{n})$, $\forall\, 1\leqslant j\leqslant m$, 则

$$\frac{\|\nabla \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}}{\sum_{\mu=1}^m(\|f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{\beta}\|\nabla f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{1-\beta})\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq\mu}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}}\gtrsim_{\alpha,m,d,\beta,q} l^{\frac{d}{q}+\alpha-md-\beta}.$$

当 $l\to\infty$, $q\geqslant d/(md-\alpha+\beta)$ 时, 由上式可得 (1.9).

(ii) 定理 1.1 和 1.2 将定理 A 推广到多线性情形. 推论 1.1 将定理 B 推广到一般凸集情形.

(iii) 显然

$$|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g})(\vec{n})|\leqslant\sum_{j=1}^m \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{F}_j)(\vec{n}),\quad \vec{n}\in\mathbb{Z}^d,$$

其中 $\vec{F}_j=(f_1,\dots,f_{j-1},f_j-g_j,g_{j+1},\dots,g_m)$. 上式表明

$$\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}: W^{1,p_1}(\mathbb{Z}^d)\times\cdots\times W^{1,p_m}(\mathbb{Z}^d)\to W^{1,q}(\mathbb{Z}^d)$$

是连续的.

作为多参数算子的典型代表, 由各边平行于坐标轴的方体生成的强极大算子 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ 的有界性研究也受到了广泛关注. 1935 年, Jessen 等 [17] 最早研究了强极大算子 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ 并且证明了 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ 不是弱 $(1,1)$ 型算子, 但是是从 $L(\log^+L)(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 有界的 (也可参见文献 [11]). García-Cuerva 和 Rubio de Francia 在文献 [12, 第 452 页] 中证明了 $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^d)$ $(\forall\, 1<p<\infty)$ 有界的. 2011 年, Grafakos 等 [14] 引出并建立了多线性强极大算子的加权强型估计和端点弱型估计. 随后, Cao 等 [4] 引入多线性分数次强极大算子并建立其加权强型估计和端点弱型估计. Liu 等 [28, 29] 研究了多线性强极大算子及其分数次情形的 Sobolev 正则性.

接下来将研究由各边平行于坐标轴的方体生成的离散型多线性强极大算子及其分数次情形的端点正则性问题.

定义 1.3 (由方体生成的离散型多线性分数次强极大算子) 设 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$, 每个 f_j 都是离散函数. 设 $0\leqslant\alpha<md$, 定义离散型多线性分数次强极大算子 $\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}$ 为

$$\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(\vec{n})=\sup_{\substack{R\ni\vec{n}\\ R\in\mathcal{R}}}\prod_{i=1}^m\frac{1}{N(R(\vec{n}))^{1-\frac{\alpha}{md}}}\sum_{\vec{k}\in R(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d}|f_i(\vec{k})|,$$

其中 $N(R(\vec{n}))$ 表示 $R(\vec{n})\cap\mathbb{Z}^d$ 中元素的个数.

当 $\alpha=0$ 时, 算子 $\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}$ 就是离散型多线性强极大算子 $\mathbb{M}_{\mathcal{R}}$. 当 $m=1$ 时, 算子 $\mathbb{M}_{\mathcal{R}}$ (或 $\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}$) 就是离散型强极大算子 $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ (或分数次极大算子 $\mathrm{M}_{\alpha,\mathcal{R}}$). 注意到, 当 $d=1$ 时, $\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}=\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha$ 且 $\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha(\vec{f})(\vec{n})\lesssim_{\alpha,m,d}\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(\vec{n})$, $\forall\,\vec{n}\in\mathbb{Z}^d$. 但是, 当 $d\geqslant 2$ 时, 不存在常数 $C>0$, 使得 $\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(\vec{n})\leqslant C\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha(\vec{f})(\vec{n})$, $\forall\,\vec{n}\in\mathbb{Z}^d$.

接下来将证明如下结果:

定理 1.3 设 $d\geqslant 1$, $0\leqslant\alpha<md$, $q\geqslant 1$ 且满足 $q>d/(md-\alpha)$. 对于 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$, 且每个 $f_j\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, 有

$$\|\nabla\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\lesssim_{\alpha,m,d}\sum_{l=1}^m\|\nabla f_l\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq l}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.\tag{1.11}$$

进一步地, 算子 $\vec{f}\mapsto|\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)\times\cdots\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 连续的.

注 1.2 (i) 当 $q\leqslant d/(md-\alpha)$ 时, (1.11) 不成立. 例如, 令 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$, 其中每个 $f_j(\vec{n})=\chi_{\{\vec{0}\}}(\vec{n})$. 显然 $\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}=1$ 且 $\|\nabla f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}=d+\sqrt{d}$, 但是 $\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(\vec{n})=\prod_{i=1}^d(2|n_i|+1)^{\frac{\alpha}{d}-m}$, $\forall\,\vec{n}=(n_1,n_2,\dots,n_d)\in\mathbb{Z}^d$, 即 $\|\nabla\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}f\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}<\infty$ 当且仅当 $q>d/(md-\alpha)$.

(ii) 文献 [26] 指出, 当 $d=1$, $0\leqslant\alpha<m$ 时, 算子 $\vec{f}\mapsto\nabla\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})$ 从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)\times\cdots\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 有界且连续. 由定理 1.3 知, 当 $d\geqslant2$, $m\geqslant2$, $0\leqslant\alpha<md-d$ 时, 算子 $\vec{f}\mapsto|\nabla\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})|$ 从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)\times\cdots\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 有界且连续. 但是, 上述结论当 $d\geqslant2$, $md-d\leqslant\alpha<md$ 时不成立.

由注 1.2 和定理 1.3 可知如下推论成立.

推论 1.2 设 $d\geqslant2$, $m\geqslant2$, $md-d<\alpha<md$, 则 $\vec{f}\mapsto|\nabla\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z})\times\cdots\times\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 有界且连续的当且仅当 $q>d/(md-\alpha)$.

推论 1.3 设 $d\geqslant1$, $0\leqslant\alpha<d$, $q>d/(d-\alpha)$, $f\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, 则

$$\|\nabla\mathrm{M}_{\alpha,\mathcal{R}}f\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\lesssim_{\alpha,p,d}\|\nabla f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.$$

进一步地, 算子 $f\mapsto|\nabla\mathrm{M}_{\alpha,\mathcal{R}}f|$ 是从 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 连续的.

注 1.3 需要指出, 我们虽然是受文献 [6,7,26] 的启发, 但是我们在证明过程中用到的方法和技巧比文献 [6,7,26] 中的更简单和直接. 具体如下:

(i) 在文献 [6,7,26] 中, 连续性的证明依赖于 Brezis-Lieb 引理 (参见文献 [3]) 和 Luiro 引理 (参见文献 [6, 引理 3 和 4] 和 [7, 引理 4 和 5]) 的离散形式, 但是在我们的证明中不需要这些引理.

(ii) 在文献 [26] 中, 主要结果的证明工具是通过离散型多线性极大函数的局部极大值序列和极小值序列的精细求和估计得到 (参见文献 [26, 引理 2.1 和 2.2]). 但是, 我们的证明不需要这些工具. 事实上, 我们的证明方法更简单, 与文献 [26] 中的证明方法有所不同.

本文用 C 表示一个大于零的常数, 在不同的地方可能数值不一样, 但是都与主要变量无关. 若存在一个仅依赖于 ϑ 的常数 $c>0$, 使得 $A\leqslant cB$, 记 $A\lesssim_\vartheta B$ 或者 $B\gtrsim_\vartheta A$; 若 $A\lesssim_\vartheta B\lesssim_\vartheta A$, 记 $A\sim_\vartheta B$. 对于集合 $E\subset\mathbb{R}^d$, 令 $E^c=\{x\in\mathbb{R}^d;x\notin E\}$. 规定 $\prod_{i\in\emptyset}a_i=1$, $\sum_{i\in\emptyset}a_i=0$.

2 记号和引理

首先, 介绍一些记号并建立一个更精细的求和引理, 它将在本文的证明中起到关键性的作用.

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 是具有 Lipschitz 边界的有界开凸集. 由文献 [22] 第六章第二节的定理 2 可知

$$N(\vec{x},r)=C_\Omega r^d+O(r^{d-1}),\quad r\to\infty,\tag{2.1}$$

其中 $C_\Omega=m(\Omega)$ 是 Ω 的体积, O 部分的常数依赖于维数 d 和集合 Ω (例如, 若 Ω 是 ℓ^∞- 球, 则 $N(r)=(2[r]+1)^d$). 由 (2.1) 可知, 存在一个仅依赖于维数 d 和集合 Ω 常数 c_1, 使得

$$N(\vec{x},r)\leqslant C_\Omega(r+c_1)^d\tag{2.2}$$

和

$$N(\vec{x},r)\geqslant\max\{C_\Omega\max\{(r-c_1)^d,0\},1\}.\tag{2.3}$$

取常数 c_2 满足 $c_2>c_1$ 且

$$C_\Omega(c_2-c_1)^d=1.\tag{2.4}$$

定义函数 $F(r):[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 为 $F(r)=C_\Omega(r-c_1)^d\chi_{\{r\geqslant c_2\}}(r)+\chi_{\{0\leqslant r<c_2\}}(r)$. 由 (2.2)–(2.4) 可知

$$F(r)\leqslant N(\vec{x},r)\leqslant F(r+c_1+c_2),\quad \vec{x}\in\mathbb{R}^d,\quad r\geqslant 0. \tag{2.5}$$

下面证明对于任意的 $r>0$, $\gamma\geqslant 1$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^d$, 有

$$N(\vec{x},r+1)^\gamma-N(\vec{x},r)^\gamma\lesssim_{\gamma,d,\Omega} F(r)^{\gamma-\frac{1}{d}}. \tag{2.6}$$

当 $r\geqslant c_2$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^d$ 时, 由 (2.2), (2.3) 和微分中值定理可知

$$N(\vec{x},r+1)^\gamma-N(\vec{x},r)^\gamma\leqslant C_\Omega^\gamma((r+1+c_1)^{\gamma d}-(r-c_1)^{\gamma d})\leqslant C_\Omega^\gamma(r+1+c_1)^{\gamma d-1}\lesssim_{\gamma,d,\Omega} F(r)^{\gamma-\frac{1}{d}}. \tag{2.7}$$

又当 $0<r<c_2$ 时, 由 (2.2) 知 $N(\vec{x},r+1)^\gamma-N(\vec{x},r)^\gamma\leqslant C_\Omega^\gamma(c_1+c_2+1)^{\gamma d}$, 上式连同 (2.7) 可得 (2.6).

由假设可知, 存在一个仅依赖 Ω 的常数 $\lambda\geqslant 1$, 使得

$$|\vec{x}-\vec{x}_0|\leqslant\lambda r,\quad \vec{x}\in\overline{\Omega}_r(\vec{x}_0). \tag{2.8}$$

下面给出求和引理, 它是证明定理 1.1 的基础.

引理 2.1 设 $R>\sqrt{d}$, $\gamma>d$, 则有

$$\sum_{\substack{|\vec{n}|\geqslant R\\ \vec{n}\in\mathbb{Z}^d}}|\vec{n}|^{-\gamma}\lesssim_{d,\gamma} R^{d-\gamma}.$$

证明 设 $\vec{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{Z}^d$, $Q(\vec{n})=\{x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d:-1/2<x_i-n_i\leqslant 1/2,\ 1\leqslant i\leqslant d\}$. 则当 $\vec{n}\neq\vec{l}$ 时, 有 $Q(\vec{n})\cap Q(\vec{l})=\emptyset$ 并且

$$\bigcup_{\substack{|\vec{n}|\geqslant R\\ \vec{n}\in\mathbb{Z}^d}}Q(\vec{n})\subset\left\{x\in\mathbb{R}^d:|x|\geqslant\frac{R}{2}\right\}.$$

又对于 $\vec{x}\in Q(\vec{n})$, $|\vec{n}|\geqslant R$, 有 $|\vec{x}|\leqslant|\vec{x}-\vec{n}|+|\vec{n}|\leqslant\frac{\sqrt{d}}{2}+|\vec{n}|\leqslant 2|\vec{n}|$, 所以

$$\sum_{\substack{|\vec{n}|\geqslant R\\ \vec{n}\in\mathbb{Z}^d}}|\vec{n}|^{-\gamma}\leqslant\sum_{\substack{|\vec{n}|\geqslant R\\ \vec{n}\in\mathbb{Z}^d}}\int_{Q(\vec{n})}2^\gamma|x|^{-\gamma}dx\leqslant\int_{|x|\geqslant\frac{R}{2}}2^\gamma|x|^{-\gamma}dx\lesssim_{d,\gamma}R^{d-\gamma}.$$

引理证毕. □

3 定理 1.1 和 1.2 的证明

设 Ω 为凸集, C_Ω, c_1, c_2 和 λ 是 (2.1), (2.2), (2.4) 和 (2.8) 中提到的常数. 设 $0\leqslant\beta\leqslant 1$, $q\geqslant 1$ 且满足 $q>\frac{d}{md-\alpha+\beta}$. 又设 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$, 其中每个 $f_j\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$. 因为 $|\nabla|f_j|(\vec{n})|\leqslant|\nabla f_j(\vec{n})|$, 所以不失一般性, 假设所有的 $f_j\geqslant 0$, 则 $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})=\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f}_1)$ (或 $\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})=\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{g})$), 其中 $\vec{g}=(|f_1|,|f_2|,\dots,|f_m|)$. 当 $r>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ 时, $N(B_r(\vec{x}))$ 表示集合 $B_r(\vec{x})$ 中的格点数.

3.1 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明分为如下两部分.

3.1.1 中心情形

首先证明有界性部分. 为了证明 (1.9), 只需要证明对于每个 $1\leqslant l\leqslant d$, 有

$$\|D_l\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}^q\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\lambda,c_2,\beta,q}\sum_{\mu=1}^m(\|D_lf_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{q(1-\beta)}\|f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{q\beta})\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq\mu}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^q. \tag{3.1}$$

我们只需要证明当 $l=d$ 时 (3.1) 成立, 其他情形类似可证.

令

$$\begin{aligned}X_+&=\{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d:\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)<\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})\},\\ X_-&=\{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d:\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)>\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})\},\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\|D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}^q&=\sum_{\vec{n}\in X_+}(\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d))^q\\ &\quad\sum_{\vec{n}\in X_-}(\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}))^q\\ &=:A_1+A_2.\end{aligned}$$

为了证明当 $l=d$ 时 (3.1) 成立, 只需要证明对于每个 $i=1,2$, 有

$$A_i\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\lambda,c_2,\beta,q}\sum_{\mu=1}^m(\|D_df_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{q(1-\beta)}\|f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{q\beta})\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq\mu}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^q. \tag{3.2}$$

下面只给出当 $i=1$ 时 (3.2) 的证明, 当 $i=2$ 时的证明类似. 对于任意的 $f_j\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, $\vec{n}\in X_+$, 存在 $r_{\vec{n}}\geqslant 0$, 使得

$$\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})=\mathrm{A}_{r_{\vec{n}}}(\vec{f})(\vec{n}):=\frac{1}{N(r_{\vec{n}})^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^m\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}f_j(\vec{n}+\vec{k}).$$

又因为 Ω 是凸集, $-\vec{e}_d\in\overline{\Omega}$, 所以 $\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}\subset\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}+1}+\vec{e}_d$. 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)&\geqslant\frac{1}{N(r_{\vec{n}}+1)^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^m\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}+1}}f_j(\vec{n}+\vec{e}_d+\vec{k})\\ &\geqslant\frac{1}{N(r_{\vec{n}}+1)^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^m\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}f_j(\vec{n}+\vec{k})\\ &\geqslant\frac{N(r_{\vec{n}})^{m-\frac{\alpha}{d}}}{N(r_{\vec{n}}+1)^{m-\frac{\alpha}{d}}}\mathrm{A}_{r_{\vec{n}}}(\vec{f})(\vec{n})\\ &\geqslant\frac{N(r_{\vec{n}})^m}{N(r_{\vec{n}}+1)^m}\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}).\end{aligned} \tag{3.3}$$

由 (3.3), (2.5) 和 (2.6) 可得

$$\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)\leqslant\left(1-\frac{N(r_{\vec{n}})^m}{N(r_{\vec{n}}+1)^m}\right)\frac{1}{N(r_{\vec{n}})^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^m\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}f_j(\vec{n}+\vec{k})$$

$$\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega} F(r_{\vec{n}})^{\frac{\alpha-1}{d}-m}\prod_{j=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}} f_j(\vec{n}+\vec{k}). \tag{3.4}$$

另外, 由 (2.5) 可知

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)&\leqslant \mathrm{A}_{r_{\vec{n}}}(\vec{f})(\vec{n})-\mathrm{A}_{r_{\vec{n}}}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)\\&=\frac{1}{N(r_{\vec{n}})^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}} f_j(\vec{n}+\vec{k})-\frac{1}{N(r_{\vec{n}})^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}} f_j(\vec{n}+\vec{e}_d+\vec{k})\\&\leqslant F(r_{\vec{n}})^{\frac{\alpha}{d}-m}\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq\mu}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}|D_d f_\mu(\vec{n}+\vec{k})|.\end{aligned} \tag{3.5}$$

再由 (3.4) 和 (3.5), 有

$$\begin{aligned}&(\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d))^q\\&\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega}\left(F(r_{\vec{n}})^{\frac{\alpha}{d}-m}\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq\mu}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}|D_d f_\mu(\vec{n}+\vec{k})|\right)^{q(1-\beta)}\\&\quad\times\left(F(r_{\vec{n}})^{\frac{\alpha-1}{d}-m}\prod_{j=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}} f_j(\vec{n}+\vec{k})\right)^{q\beta}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

为了简便, 对于任意的 $1\leqslant\mu\leqslant m$, 令

$$B_\mu:=(\|D_d f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)(1-\beta)}\|f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)\beta})\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq\mu}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{q}.$$

由 (3.6) 可得

$$\begin{aligned}&(\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d))^q\\&\lesssim_{\alpha,d,m,\Omega}\sum_{\mu=1}^{m}B_\mu F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\left(\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}|D_d f_\mu(\vec{n}+\vec{k})|\right)^{(1-\beta)}\left(\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}} f_\mu(\vec{n}+\vec{k})\right)^{\beta}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

由 (3.7) 和 Hölder 不等式 (取 $p=\frac{1}{1-\beta}$, $p'=\frac{1}{\beta}$) 可得

$$\begin{aligned}A_1&\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega}\sum_{\mu=1}^{m}B_\mu\left(\sum_{\vec{n}\in X_+}F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}|D_d f_\mu(\vec{n}+\vec{k})|\right)^{1-\beta}\\&\quad\times\left(\sum_{\vec{n}\in X_+}F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}} f_\mu(\vec{n}+\vec{k})\right)^{\beta}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

又由 (2.8) 可知

$$\sum_{\vec{n}\in X_+}F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}|D_d f_\mu(\vec{n}+\vec{k})|\leqslant\sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^d}|D_d f_\mu(\vec{k})|\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|\leqslant\lambda r_{\vec{n}}\}}. \tag{3.9}$$

对于 $\vec{k}\in\mathbb{Z}^d$, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|\leqslant\lambda r_{\vec{n}}\}}\\
&\quad\leqslant \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|<2\lambda c_2\}}+\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\chi_{\{2\lambda c_2\leqslant|\vec{k}-\vec{n}|\leqslant\lambda r_{\vec{n}}\}}\\
&\quad\leqslant \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}\chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|<2\lambda c_2\}}+\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}\left(C_\Omega\left(\frac{|\vec{k}-\vec{n}|}{\lambda}-c_1\right)\right)^{-q(md-\alpha+\beta)}\chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|\geqslant 2\lambda c_2\}}.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

因为 $q(md-\alpha+\beta)>d$, 所以由引理 2.1 可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}\left(\frac{|\vec{k}-\vec{n}|}{\lambda}-c_1\right)^{-q(md-\alpha+\beta)}\chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|\geqslant 2\lambda c_2\}}\\
&\quad\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\beta,q}\sum_{\substack{|\vec{n}|\geqslant 2\lambda c_2\\ \vec{n}\in\mathbb{Z}^d}}|\vec{n}|^{-q(md-\alpha+\beta)}\\
&\quad\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\lambda,c_2,\beta,q} 1.
\end{aligned}\tag{3.11}$$

由 (3.10) 和 (3.11) 可得

$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|\leqslant\lambda r_{\vec{n}}\}}\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\lambda,c_2,\beta,q} 1.\tag{3.12}$$

结合 (3.12) 和 (3.9) 可知

$$\sum_{\vec{n}\in X_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}|D_d f_\mu(\vec{n}+\vec{k})|\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\lambda,c_2,\beta,q}\|D_d f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.\tag{3.13}$$

同理,

$$\sum_{\vec{n}\in X_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}|f_\mu(\vec{n}+\vec{k})|\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\lambda,c_2,\beta,q}\|f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.\tag{3.14}$$

因此, (3.8) 连同 (3.13) 和 (3.14) 可知, 当 $i=1$ 时 (3.2) 成立.

接下来证明连续性部分. 设 $\vec{g_i}=(g_{i,1},\dots,g_{i,m})$, 对于任意的 $1\leqslant j\leqslant m$, 都有

$$\lim_{i\to\infty}\|g_{i,j}-f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}=0.$$

因为 $||g_{i,j}|-|f_j||\leqslant|g_{i,j}-f_j|$, $\forall 1\leqslant j\leqslant d$, 所以不失一般性, 假设 $g_{i,j}\geqslant 0$, $f_j\geqslant 0$. 要证明连续性部分, 只需要证明对于任意的 $l=1,2,\dots,d$, 有

$$\lim_{i\to\infty}\|D_l\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})-D_l\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}=0.\tag{3.15}$$

我们只证明当 $l=d$ 时 (3.15) 成立, 其他情形类似可证. 对于任意的 $\epsilon\in(0,1)$, 总存在一个整数 $N_1=N_1(\epsilon,\vec{f})>0$, 当 $i\geqslant N_1$, $1\leqslant j\leqslant m$ 时, 有

$$\|g_{i,j}-f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}<\epsilon^q,\quad \|g_{i,j}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\leqslant\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}+1.\tag{3.16}$$

注意到 $D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\in\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ 并且 $d-q(md-\alpha+\beta)<0$, 则存在一个足够大的数 Λ, 使得 $\Lambda>\max\{2\lambda c_2,\sqrt{d}\}$, 并且

$$\max\left\{\|D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q((B_{3\Lambda}(\vec{0}))^c)},\sup_{1\leqslant j\leqslant m}\|f_j\|_{\ell^1((B_\Lambda(\vec{0}))^c)},\Lambda^{d-q(md-\alpha+\beta)}\right\}<\epsilon^q. \tag{3.17}$$

由 (3.16) 和 (3.17) 可知, 对于任意的 $i\geqslant N_1$, 有

$$\begin{aligned}\sup_{1\leqslant j\leqslant m}\|D_dg_{i,j}\|_{\ell^1((B_\Lambda(\vec{0}))^c)}&\leqslant 2\sup_{1\leqslant j\leqslant m}\|g_{i,j}\|_{\ell^1((B_\Lambda(\vec{0}))^c)}\\&\leqslant 2\sup_{1\leqslant j\leqslant m}(\|g_{i,j}-f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}+\|f_j\|_{\ell^1((B_\Lambda(\vec{0}))^c)})\\&<4\epsilon^q.\end{aligned} \tag{3.18}$$

对于 $\vec{n}\in\mathbb{Z}^d$, 显然有

$$|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})(\vec{n})-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})|\leqslant\sum_{l=1}^m\Big(\prod_{j=1}^{l-1}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\Big)\Big(\prod_{\mu=l+1}^m\|g_{i,\mu}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\Big)\|g_{i,l}-f_l\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}<C\epsilon.$$

因此对于任意的 $i\geqslant N_1$, $\vec{n}\in\mathbb{Z}^d$, 当 $i\to\infty$ 时, 有 $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})(\vec{n})\to\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})$. 进一步地, 对于任意的 $\vec{n}\in\mathbb{Z}^d$, 有

$$D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})(\vec{n})\to D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}),\quad i\to\infty. \tag{3.19}$$

由 (3.19) 可知, 对于任意的 $i\geqslant N_2$, $|\vec{n}|<3\Lambda$, 存在一个常数 $N_2=N_2(\epsilon,\Lambda)>0$, 使得

$$|D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})(\vec{n})-D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})|\leqslant\frac{\epsilon}{(N(B_{3\Lambda}(\vec{0})))^{1/q}}. \tag{3.20}$$

由 (3.20) 可知, 对于任意的 $i\geqslant N_2$, 有

$$\begin{aligned}&\|D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})-D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\\&\quad\leqslant\|D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})-D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(B_{3\Lambda}(\vec{0}))}+\|D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})-D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q((B_{3\Lambda}(\vec{0}))^c)}\\&\quad\leqslant\epsilon+\|D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})-D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q((B_{3\Lambda}(\vec{0}))^c)}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

则当 $i\geqslant\max\{N_1,N_2\}$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\|D_l\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})-D_l\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|^q_{\ell^q((B_{3\Lambda}(\vec{0}))^c)}\\&\quad\leqslant\sum_{\vec{n}\in E_1}|D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})(\vec{n})|^q+\sum_{\vec{n}\in E_2}|D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i})(\vec{n})|^q\\&\quad=:J_1+J_2.\end{aligned} \tag{3.22}$$

集合 E_1 和集合 E_2 定义如下:

$$\begin{aligned}E_1&:=\{\vec{n}=(n',n_d)\in\mathbb{Z}^d;|n'|\geqslant2\Lambda,n_d\in\mathbb{Z}\},\\E_2&:=\{\vec{n}=(n',n_d)\in\mathbb{Z}^d;n'\in\mathbb{Z}^{d-1},|n_d|\geqslant2\Lambda\}.\end{aligned}$$

首先估计 A_1. 令

$$Y_+ := \{\vec{n} \in E_1 : \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}+\vec{e}_d) < \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n})\},$$
$$Y_- := \{\vec{n} \in E_1 : \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}+\vec{e}_d) > \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n})\},$$

则

$$J_1 \leqslant \sum_{\vec{n}\in Y_+} (\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}) - \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}+\vec{e}_d))^q + \sum_{\vec{n}\in Y_-} (\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}+\vec{e}_d) - \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}))^q. \tag{3.23}$$

接下来证明

$$\sum_{\vec{n}\in Y_+} (\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}) - \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}+\vec{e}_d))^q \leqslant C\epsilon^q, \tag{3.24}$$
$$\sum_{\vec{n}\in Y_-} (\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}+\vec{e}_d) - \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}))^q \leqslant C\epsilon^q. \tag{3.25}$$

我们只需要证明 (3.24) 成立, (3.25) 的证明类似. 对于任意的 $g_{i,j} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$, $\vec{n} \in Y_+$, 存在 $r_{\vec{n}} \geqslant 0$, 使得 $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}) = \mathrm{A}_{r_{\vec{n}}}(\vec{g}_i)(\vec{n})$. 类似 (3.8) 的证明, 可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{\vec{n}\in Y_+} (\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}) - \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n}+\vec{e}_d))^q \\
&\quad\leqslant \sum_{\mu=1}^{m} B_{i,\mu} \Bigg(\sum_{\vec{n}\in Y_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}} \sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}} |D_d g_{i,\mu}(\vec{n}+\vec{k})| \Bigg)^{1-\beta} \\
&\qquad\times \Bigg(\sum_{\vec{n}\in Y_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}} \sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}} g_{i,\mu}(\vec{n}+\vec{k}) \Bigg)^{\beta},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

其中

$$B_{i,\mu} := \Bigg(\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m \\ j\neq\mu}} \|g_{i,j}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^q \Bigg) (\|D_d g_{i,\mu}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)(1-\beta)} \|g_{i,\mu}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{(q-1)\beta}).$$

对于 $\vec{k} = (k', k_d) \in \mathbb{Z}^{d-1} \times \mathbb{Z}$, 由 (3.12) 可知

$$\sum_{\vec{n}\in Y_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}} \chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|\leqslant\lambda r_{\vec{n}}\}} \leqslant C. \tag{3.27}$$

当 $|k'| < \Lambda$, $|n'| \geqslant 2\Lambda$ 时, 有 $|\vec{n}-\vec{k}| \geqslant |n'-k'| > \Lambda > \max\{2\lambda c_2, \sqrt{d}\}$, $q(md-\alpha+\beta) > d$. 进而由引理 2.1 和 (3.17) 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\vec{n}\in Y_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}} \chi_{\{|\vec{n}-\vec{k}|\leqslant\lambda r_{\vec{n}}\}} &\leqslant \sum_{\vec{n}\in Y_+} \left(C_\Omega \left(\frac{|\vec{n}-\vec{k}|}{\lambda} - c_1 \right) \right)^{-q(md-\alpha+\beta)} \\
&\leqslant C \sum_{\substack{|\vec{n}|\geqslant\Lambda \\ \vec{n}\in\mathbb{Z}^d}} |\vec{n}|^{-q(md-\alpha+\beta)} \\
&\leqslant C\Lambda^{d-q(md-\alpha+\beta)} \\
&\leqslant C\epsilon^q.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

再由 (3.16), (3.18), (3.27) 和 (3.28) 可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{\vec{n}\in Y_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}} \sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}} |D_d g_{i,\mu}(\vec{n}+\vec{k})| \\
&\leqslant \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^d} |D_d g_{i,\mu}(\vec{k})| \sum_{\vec{n}\in Y_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}} \chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|\leqslant\lambda r_{\vec{n}}\}} \\
&= \sum_{\substack{\vec{k}=(k',k_d)\in\mathbb{Z}^d \\ |k'|\geqslant\Lambda}} |D_d g_{i,\mu}(\vec{k})| \sum_{\vec{n}\in Y_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}} \chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|\leqslant\lambda r_{\vec{n}}\}} \\
&\quad + \sum_{\substack{\vec{k}=(k',k_d)\in\mathbb{Z}^d \\ |k'|<\Lambda}} |D_d g_{i,\mu}(\vec{k})| \sum_{\vec{n}\in Y_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}} \chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|\leqslant\lambda r_{\vec{n}}\}} \\
&\leqslant C\|D_d g_{i,\mu}\|_{\ell^1((B_\Lambda(\vec{0}))^c)} + C\|D_d g_{i,\mu}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\epsilon^q \\
&\leqslant C\epsilon^q. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

同理,

$$\sum_{\vec{n}\in Y_+} F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}} \sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}} |g_{i,\mu}(\vec{n}+\vec{k})| \leqslant C\epsilon^q. \qquad (3.30)$$

则由 (3.16), (3.21), (3.29) 和 (3.30) 可得 (3.24). 又由 (3.24) 和 (3.25) 可知

$$J_1 \leqslant C\epsilon^q. \qquad (3.31)$$

同理可知

$$J_2 \leqslant C\epsilon^q. \qquad (3.32)$$

由 (3.21), (3.22), (3.31) 和 (3.32) 可知, 对任意的 $i \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, 有

$$\|D_d \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g_i}) - D_d \mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} < C\epsilon,$$

上式即为 (3.15) 中 $l = d$ 的情形.

3.1.2 非中心情形

此部分的证明与中心情形类似但也有不同. 下面来证明

$$\|D_d \widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}^q \lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\lambda,c_2,\beta,q} \sum_{\mu=1}^m (\|D_d f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{q(1-\beta)} \|f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{q\beta}) \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m \\ j\neq\mu}} \|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^q. \qquad (3.33)$$

令

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_+ &= \{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d : \widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d) < \widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})\}, \\
\widetilde{X}_- &= \{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d : \widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d) > \widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})\}.
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\|D_d\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|^q_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} &= \sum_{\vec{n}\in\widetilde{X}_+}(\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d))^q\\ &\quad+\sum_{\vec{n}\in\widetilde{X}_-}(\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)-\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}))^q\\ &=: I_1+I_2,\end{aligned}$$

因此, 要证明当 $l=d$ 时 (3.33) 成立, 只需要证明对于 $i=1,2$, 有

$$I_i\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\lambda,c_2,\beta,q}\sum_{\mu=1}^m(\|D_df_\mu\|^{q(1-\beta)}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\|f_\mu\|^{q\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)})\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq\mu}}\|f_j\|^q_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.\tag{3.34}$$

我们只证明当 $i=1$ 时 (3.34) 成立, 当 $i=2$ 时类似可证. 对于任意的 $f_j\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, $\vec{n}\in\widetilde{X}_+$, 存在 $r_{\vec{n}}\geqslant 0$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^d$, 使得 $\vec{n}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})$,

$$\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})=\mathrm{A}_{(\vec{x},r_{\vec{n}})}(\vec{f})(\vec{n}):=\frac{1}{N(\vec{x},r_{\vec{n}})^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^m\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})}f_j(\vec{k}).$$

又因为 Ω 是凸集且 $-\vec{e}_d\in\overline{\Omega}$, 所以 $\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})\subset\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}+1}(\vec{x}+\vec{e}_d)$. 类似 (3.4) 和 (3.5) 的证明可知

$$\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega}F(r_{\vec{n}})^{\frac{\alpha-1}{d}-m}\prod_{j=1}^m\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})}f_j(\vec{k}),\tag{3.35}$$

$$\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)\leqslant F(r_{\vec{n}})^{\frac{\alpha}{d}-m}\sum_{\mu=1}^m\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq\mu}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})}|D_df_\mu(\vec{k})|.\tag{3.36}$$

由 (3.35) 和 (3.36), 有

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\widetilde{\mathrm{M}}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d))^q\\ &\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\beta,q}\sum_{\mu=1}^m B_\mu F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\Big(\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})}|D_df_\mu(\vec{k})|\Big)^{(1-\beta)}\Big(\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})}f_\mu(\vec{k})\Big)^{\beta}.\end{aligned}\tag{3.37}$$

由 (3.37) 和 Hölder 不等式 (取 $p=\frac{1}{1-\beta}$, $p'=\frac{1}{\beta}$) 可得

$$\begin{aligned}B_1&\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,\beta,q}\sum_{\mu=1}^m B_\mu\Big(\sum_{\vec{n}\in\widetilde{X}_+}F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})}|D_df_\mu(\vec{k})|\Big)^{1-\beta}\\ &\quad\times\Big(\sum_{\vec{n}\in\widetilde{X}_+}F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})}f_\mu(\vec{k})\Big)^{\beta}.\end{aligned}$$

设 $\vec{n}\in\widetilde{X}_+$, 则 $\vec{n}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})$. 再由 (2.8) 可知

$$\sum_{\vec{n}\in\widetilde{X}_+}F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}(\vec{x})}|D_df_\mu(\vec{k})|\leqslant\sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^d}|D_df_\mu(\vec{k})|\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d}F(r_{\vec{n}})^{-\frac{q(md-\alpha+\beta)}{d}}\chi_{\{|\vec{k}-\vec{n}|\leqslant 2\lambda r_{\vec{n}}\}}.$$

余下的证明与中心情形类似, 这里省略其细节. 定理证毕.

3.2 定理 1.2 的证明

我们只证明中心情形, 非中心情形类似. 设 $d\geqslant 2$, $0\leqslant \beta_i<1$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, $\max\{1,(m-1)(d-1)+\sum_{i=1}^m\beta_i\}\leqslant\alpha<\min\{md,m(d-1)+\sum_{i=1}^m\beta_i+1\}$ 且 $q=d(m(d-1)+\sum_{i=1}^m\beta_i-\alpha+1)^{-1}$. 又设 $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m)$, 其中每个 $f_j\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, $p_j=d/(d+\beta_j-1)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$. 则 $1/q=1/p_1+\cdots+1/p_m-(\alpha-1)/d$, $1\leqslant q<\infty$. 首先证明 (1.10). 不失一般性, 假设所有的 $f_j\geqslant 0$. 设 $\vec{n}\in X_+$, 则由 (3.3) 可知, 存在 $r_{\vec{n}}\geqslant 0$, 使得

$$\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)\geqslant\frac{1}{N(r_{\vec{n}}+1)^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^m\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}f_j(\vec{n}+\vec{k}).$$

因此

$$\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)\leqslant\left(\frac{1}{N(r_{\vec{n}})^{m-\frac{\alpha}{d}}}-\frac{1}{N(r_{\vec{n}}+1)^{m-\frac{\alpha}{d}}}\right)\prod_{j=1}^m\sum_{\vec{k}\in\overline{\Omega}_{r_{\vec{n}}}}f_j(\vec{n}+\vec{k}).$$

由 (2.5) 和 (2.6) 易知

$$\frac{1}{N(r_{\vec{n}})^{m-\frac{\alpha}{d}}}-\frac{1}{N(r_{\vec{n}}+1)^{m-\frac{\alpha}{d}}}\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega}\frac{1}{N(r_{\vec{n}})^{m-\frac{\alpha-1}{d}}}.$$

所以

$$\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega}\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})(\vec{n}).$$

同理, 当 $\vec{n}\in\widetilde{X}_-$ 时, 有

$$\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}+\vec{e}_d)-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega}\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})(\vec{n}).$$

因此

$$|D_d\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})|\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega}\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})(\vec{n}),\quad\forall\,\vec{n}\in\mathbb{Z}^d.$$

同理

$$|D_l\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})|\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega}\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})(\vec{n}),\quad\forall\,\vec{n}\in\mathbb{Z}^d,\quad l=1,2,\dots,d-1.$$

由上面的讨论可知

$$|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})|\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega}\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})(\vec{n}),\quad\forall\,\vec{n}\in\mathbb{Z}^d.\tag{3.38}$$

再由 (3.38) 可得

$$\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega}\|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\lesssim_{\alpha,m,d,\Omega,p_1,\dots,p_m}\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{\ell^{p_i}(\mathbb{Z}^d)}.\tag{3.39}$$

另外, 由离散型 Sobolev 嵌入定理可知

$$\|f\|_{\ell^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{Z}^d)}\lesssim_d\|\nabla f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)},\quad f\in\ell^1(\mathbb{Z}^d).\tag{3.40}$$

由 (3.40)、插值定理和 Hölder 不等式可知

$$\|f\|_{\ell^{\frac{d}{d+\beta-1}}(\mathbb{Z}^d)}\leqslant\|f\|^{1-\beta}_{\ell^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{Z}^d)}\|f_j\|^{\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\lesssim_{d,\beta}\|\nabla f\|^{1-\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\|f\|^{\beta}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)},\quad\beta\in[0,1).\tag{3.41}$$

上式结合 (3.39) 和 (3.41) 可得 (1.10).

接下来证明 $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}$ 的连续性. 设 $\vec{g}_i=(g_{i,1},\dots,g_{i,m})$, 其中对每个 $1\leqslant j\leqslant m$ 都有

$$\lim_{i\to\infty}\|g_{i,j}-f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}=0.$$

因为对于任意的 $1\leqslant j\leqslant m$, 有 $||g_{i,j}|-|f_j||\leqslant|g_{i,j}-f_j|$, 所以不失一般性, 假设所有 $g_{i,j}\geqslant 0$. 要证明连续性, 只需要证明

$$\lim_{i\to\infty}\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)-\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}=0. \tag{3.42}$$

对于任意的 $1\leqslant j\leqslant m$, $i\geqslant 1$, $p_j>1$, 有 $\|g_{i,j}-f_j\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z}^d)}\leqslant\|g_{i,j}-f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}$. 上式连同 $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}$ 的连续性可知 $\lim_{i\to\infty}\|\mathfrak{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{g}_i)-\mathfrak{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}=0$. 因此, 给定 $\epsilon\in(0,1)$, 总存在整数 $N_1=N_1(\vec{f},\epsilon)>0$, 使得

$$\|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{g}_i)-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}<\epsilon,\quad\forall\, i\geqslant N_1. \tag{3.43}$$

由 (3.39) 可知 $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})\in\ell^q(\mathbb{Z}^d)$, 则一定存在足够大的数 $\Lambda>0$, 使得

$$\|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})\|_{\ell^q((\overline{\Omega}_\Lambda)^c)}<\epsilon. \tag{3.44}$$

由 (3.43), (3.44) 和 (3.38) 可得

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)-\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q((\overline{\Omega}_\Lambda)^c)}\\
&\quad\leqslant\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)\|_{\ell^q((\overline{\Omega}_\Lambda)^c)}+\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q((\overline{\Omega}_\Lambda)^c)}\\
&\quad\leqslant C(\|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{g}_i)\|_{\ell^q((\overline{\Omega}_\Lambda)^c)}+\|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})\|_{\ell^q((\overline{\Omega}_\Lambda)^c)})\\
&\quad\leqslant C(\|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{g}_i)-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}+2\|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha-1}(\vec{f})\|_{\ell^q((\overline{\Omega}_\Lambda)^c)})\\
&\quad<C\epsilon,\quad\forall\, i\geqslant N_1.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

另外, 显然有

$$|\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n})-\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})|\leqslant\sum_{l=1}^{m}\Big(\prod_{j=1}^{l-1}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\Big)\Big(\prod_{\mu=l+1}^{m}\|g_{i,\mu}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\Big)\|g_{i,l}-f_l\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.$$

则当 $i\to\infty$, $\vec{n}\in\mathbb{Z}^d$ 时, $\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n})\to\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})$. 因此

$$\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n})\to\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n}),\quad i\to\infty,\quad\forall\,\vec{n}\in\mathbb{Z}^d. \tag{3.46}$$

由 (3.46) 可知, 存在整数 $N_2=N_2(\epsilon,\Lambda)>0$, 使得

$$|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)(\vec{n})-\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})(\vec{n})|<\frac{\epsilon}{(N(\Lambda))^{1/q}},\quad\forall\, i\geqslant N_2,\quad\vec{n}\in\overline{\Omega}_\Lambda. \tag{3.47}$$

所以由 (3.45) 和 (3.47) 得到

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)-\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\\
&\quad\leqslant\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)-\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q(\overline{\Omega}_\Lambda)}+\|\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{g}_i)-\nabla\mathrm{M}_{\Omega,\alpha}(\vec{f})\|_{\ell^q((\overline{\Omega}_\Lambda)^c)}\\
&\quad<C\epsilon,\quad\forall\, i\geqslant\max\{N_1,N_2\},
\end{aligned} \tag{3.48}$$

即 (3.42) 成立. 定理证毕.

4 定理 1.3 的证明

4.1 记号

设 $a\in\mathbb{R}$, $r>0$, 则 $g(a;r)=|\{k\in\mathbb{Z};|k-a|<r\}|$. 如果 $a\in\mathbb{Z}$, 则

$$g(a;r)\geqslant\chi_{(0,1]}(r)+(2[r-1]+1)\chi_{(1,\infty)}(r),$$

其中 $[x]=\max\{k\in\mathbb{Z};k\leqslant x\}$. 如果 $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, 则存在整数 $n_0\in\mathbb{Z}$, 使得 $|n_0-a|\leqslant 1/2$ 且

$$\{k\in\mathbb{Z};|k-n_0|<r-1/2\}\subset\{k\in\mathbb{Z};|k-a|<r\}.$$

从而有

$$g(a;r)\geqslant\chi_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2}]}(r)+(2[r-3/2]+1)\chi_{(\frac{3}{2},\infty)}(r),\quad r>1/2.$$

特别地, 如果存在整数 n_0, 使得 $|n_0-a|<r$, 则有

$$g(a;r)\geqslant F(r):=\chi_{(0,\frac{3}{2}]}(r)+(2[r-3/2]+1)\chi_{(\frac{3}{2},\infty)}(r),\quad r>0,\quad a\in\mathbb{R}.\tag{4.1}$$

对于 $\vec{r}=(r_1,\dots,r_d)\in\mathbb{R}_+^d$, $\vec{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, 显然有

$$N(R_{\vec{r}}(\vec{x}))=\prod_{i=1}^d g(x_i;r_i).$$

进一步地, 如果存在 $\vec{n}\in R_{\vec{r}}(\vec{x})\cap\mathbb{Z}^d$, 则由 (4.1) 可知

$$N(R_{\vec{r}}(\vec{x}))\geqslant\prod_{i=1}^d F(r_i).\tag{4.2}$$

4.2 定理 1.3 的证明

定理 1.3 的证明分为如下两部分.

4.2.1 有界性的证明

因为 $\||\nabla f|\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\leqslant\|\nabla f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}$, 所以不失一般性, 假设所有的 $f_j\geqslant 0$. 想证明有界性部分, 只需要证明对于任意的 $1\leqslant l\leqslant d$, 有

$$\|D_l\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\lesssim_{\alpha,m,d,q}\sum_{i=1}^m\|D_lf_i\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\prod_{j\neq i,1\leqslant j\leqslant m}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.\tag{4.3}$$

下面只证明当 $l=d$ 时 (4.3) 成立, 其他情形类似可证. 令 $\vec{n}=(n',n_d)\in\mathbb{Z}^d$, 其中 $n'=(n_1,\dots,n_{d-1})\in\mathbb{Z}^{d-1}$, 则

$$\|D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}^q=\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in\mathbb{Z}}|\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d+1)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d)|^q.$$

对 $n'\in\mathbb{Z}^{d-1}$, 令

$$X_{n'}^+=\{n_d\in\mathbb{Z}:\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d+1)\leqslant\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d)\},$$

$$X_{n'}^{-}=\{n_d\in\mathbb{Z}:\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d+1)>\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d)\},$$

则

$$\begin{aligned}\|D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}^q=&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^{+}}(\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d+1))^q\\&+\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^{-}}(\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d+1)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d))^q.\end{aligned}$$

因此, 要证明当 $l=d$ 时 (4.3) 成立, 只需要证明

$$\begin{aligned}&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^{+}}(\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d+1))^q\\&\lesssim_{\alpha,m,d,q}\sum_{i=1}^{m}\|D_lf_i\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^q\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq i}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^q\end{aligned}\tag{4.4}$$

和

$$\begin{aligned}&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X_{n'}^{-}}(\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d+1)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d))^q\\&\lesssim_{\alpha,m,d,q}\sum_{i=1}^{m}\|D_lf_i\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^q\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ j\neq i}}\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^q.\end{aligned}\tag{4.5}$$

接下来只证明 (4.4), (4.5) 的证明类似. 对 $\vec{r}\in\mathbb{R}_+^d$, 定义函数 $A_{\vec{r}}(\vec{f}):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 为

$$A_{\vec{r}}(\vec{f})(\vec{x})=\frac{1}{N(R_{\vec{r}}(\vec{x}))^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in R_{\vec{r}}(\vec{x})\cap\mathbb{Z}^d}f_j(\vec{k}),\quad\vec{x}\in\mathbb{R}^d,$$

则

$$\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(\vec{n})=\sup_{\substack{\vec{r}\in\mathbb{R}_+^d\\ \vec{x}\in\mathbb{R}^d,\,\vec{n}\in R_{\vec{r}}(\vec{x})}}A_{\vec{r}}(\vec{f})(\vec{x}),\quad\vec{n}\in\mathbb{Z}^d.$$

因为 $f_j\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, 所以对 $(n',n_d)\in\mathbb{Z}^d$, 存在 $\vec{x}\in\mathbb{R}^d$,$\vec{r}(n',n_d)\in\mathbb{R}_+^d$, 使得 $(n',n_d)\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x})$ 且

$$\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d)=A_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{f})(\vec{x}).$$

从而

$$\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d+1)\leqslant A_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{f})(\vec{x})-A_{\vec{r}(n',n_d)+\vec{e}_d}(\vec{f})(\vec{x}+\vec{e}_d).$$

设 $\vec{r}(n',n_d)=(r_1(n',n_d),\dots,r_d(n',n_d))$, 则由 (4.2) 可得

$$\begin{aligned}&A_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{f})(\vec{x})-A_{\vec{r}(n',n_d)+\vec{e}_d}(\vec{f})(\vec{x}+\vec{e}_d)\\&\leqslant\frac{1}{N(R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x}))^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x})\cap\mathbb{Z}^d}f_j(\vec{k})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{N(R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x}+\vec{e}_d))^{m-\frac{\alpha}{d}}}\prod_{j=1}^{m}\sum_{\vec{k}\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x}+\vec{e}_d)\cap\mathbb{Z}^d} f_j(\vec{k})\\
&\leqslant \frac{1}{N(R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x}))^{m-\frac{\alpha}{d}}}\sum_{\mu=1}^{m}\Big|\sum_{\vec{k}\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x})\cap\mathbb{Z}^d} f_\mu(\vec{k})-\sum_{\vec{k}\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x}+\vec{e}_d)\cap\mathbb{Z}^d} f_\mu(\vec{k})\Big|\\
&\quad\times\Big(\prod_{i=1}^{\mu-1}\sum_{\vec{k}\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x})\cap\mathbb{Z}^d} f_i(\vec{k})\Big)\Big(\prod_{\nu=\mu+1}^{m}\sum_{\vec{k}\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x}+\vec{e}_d)\cap\mathbb{Z}^d} f_\nu(\vec{k})\Big)\\
&\leqslant\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant m\\ \nu\neq\mu}}\|f_\nu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{F(r_i(n',n_d))^{m-\frac{\alpha}{d}}}\sum_{\vec{k}\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x})\cap\mathbb{Z}^d}|D_d f_\mu(\vec{k})|.
\end{aligned}
$$

注意到 $(n',n_d)\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x})$ 且 $R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x})\subset R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)$, 所以

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d+1)\\
&\quad\leqslant\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant m\\ \nu\neq\mu}}\|f_\nu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{F(r_i(n',n_d))^{m-\frac{\alpha}{d}}}\sum_{\vec{k}\in R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_d f_\mu(\vec{k})|.
\end{aligned}\tag{4.6}
$$

因为 $q\geqslant 1$, 所以由 (4.6) 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X^+_{n'}}(\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(n',n_d+1))^q\\
&\leqslant\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X^+_{n'}}\Big(\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant m\\ \nu\neq\mu}}\|f_\nu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{F(r_i(n',n_d))^{m-\frac{\alpha}{d}}}\sum_{\vec{k}\in R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_d f_\mu(\vec{k})|\Big)^q\\
&\lesssim_{m,q}\sum_{\mu=1}^{m}\prod_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant m\\ \nu\neq\mu}}\|f_\nu\|^q_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\|D_d f_\mu\|^{q-1}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\\
&\quad\times\Big(\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X^+_{n'}}\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{(F(r_i(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\sum_{\vec{k}\in R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_d f_\mu(\vec{k})|\Big).
\end{aligned}\tag{4.7}
$$

通过计算可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X^+_{n'}}\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{(F(r_i(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\sum_{\vec{k}\in R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_d f_\mu(\vec{k})|\\
&\leqslant\sum_{(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d}|D_d f_\mu(k_1,\dots,k_d)|\\
&\quad\times\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X^+_{n'}}\prod_{i=1}^{d}\Big(\frac{1}{(F(r_i(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_i-n_i|<2r_i(n',n_d)\}}\Big)\\
&\leqslant\sum_{(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d}|D_d f_\mu(k_1,\dots,k_d)|\prod_{i=1}^{d}\Big(\sum_{n_i\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(F(r_i(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_i-n_i|<2r_i(n',n_d)\}}\Big).
\end{aligned}\tag{4.8}
$$

对于 $1\leqslant i\leqslant d$, $k_i\in\mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n_i\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(F(r_i(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_i-n_i|<2r_i(n',n_d)\}}\\&\quad=\sum_{n_i\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(F(r_i(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_i-n_i|<4\}}+\sum_{n_i\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(F(r_i(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{4\leqslant|k_i-n_i|<2r_i(n',n_d)\}}\\&\quad\leqslant 7+\sum_{n_i\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2[|k_i-n_i|-3/2]+1)^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_i-n_i|\geqslant 4\}}.\end{aligned}\tag{4.9}$$

又因为

$$\begin{aligned}\sum_{n_i\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2[|k_i-n_i|-3/2]+1)^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_i-n_i|\geqslant 4\}}&\leqslant\sum_{\substack{n_i\in\mathbb{Z}\\|n_i|\geqslant 4}}\frac{1}{(2[|n_i|-3/2]+1)^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\\&\leqslant\sum_{\substack{n_i\in\mathbb{Z}\\|n_i|\geqslant 4}}\frac{1}{(|n_i|-1)^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\\&\leqslant\int_3^\infty\frac{2}{(x-1)^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}dx\\&\lesssim_{\alpha,m,d,q}1,\end{aligned}\tag{4.10}$$

最后一个不等式用到了 $q>\frac{d}{md-\alpha}$ 这个事实, 结合 (4.9) 和 (4.10), 有

$$\sum_{n_i\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(F(r_i(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_i-n_i|<2r_i(n',n_d)\}}\lesssim_{\alpha,m,d,q}1.\tag{4.11}$$

再由 (4.11) 和 (4.8) 可知

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in X^+_{n'}}\prod_{i=1}^d\frac{1}{(F(r_i(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\sum_{\vec{k}\in R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_df_\mu(\vec{k})|\lesssim_{\alpha,m,d,q}\|D_df_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}.\tag{4.12}$$

由 (4.12) 和 (4.7) 可得 (4.4). 证毕.

4.2.2 连续性的证明

设 $\vec{g}_i=(g_{i,1},\dots,g_{i,m})$, 其中对任意的 $1\leqslant j\leqslant m$ 都有 $\lim_{i\to\infty}\|g_{i,j}-f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}=0$. 要证连续性, 只需要证明, 对任意的 $1\leqslant l\leqslant d$, 有

$$\lim_{i\to\infty}\|D_l\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)-D_l\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}=0.\tag{4.13}$$

我们只证明当 $l=d$ 时 (4.13) 成立, 其余情形类似可证. 因为 $\|D_l|g_{i,j}|-D_l|f_j|\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\leqslant 2\||g_{i,j}|-|f_j|\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\leqslant 2\|g_{i,j}-f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}$, 所以不失一般性, 假设所有 $g_{i,j}\geqslant 0$, $f_j\geqslant 0$. 给定 $\epsilon\in(0,1)$, 则存在 $N_1=N_1(\epsilon,\vec{f})\in\mathbb{N}$, 对所有的 $1\leqslant j\leqslant m$, $i\geqslant N_1$, 有

$$\|g_{i,j}-f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}<\epsilon,\quad\|g_{i,j}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\leqslant\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}+1.\tag{4.14}$$

对任意的 $1\leqslant j\leqslant m$, $i\geqslant N_1$, 由 (4.14) 可得

$$\|D_dg_{i,j}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\leqslant 2\|g_{i,j}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\leqslant 2(\|f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}+1).\tag{4.15}$$

别外, 由定理 1.3 的有界性可知 $D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})\in\ell^q(\mathbb{Z}^d)$. 对于上述 $\epsilon>0$, 存在 $\Lambda_1>0$, 使得

$$\max\Big\{\|D_d\mathbb{M}_{\mathcal{R}}(\vec{f})\chi_{(R_{\vec{\Lambda_1}}(\vec{0}))^c}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)},\sup_{1\leqslant j\leqslant m}\|f_j\chi_{(R_{\vec{\Lambda_1}}(\vec{0}))^c}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\Big\}<\epsilon,\tag{4.16}$$

其中 $\vec{\Lambda_1}=(\Lambda_1,\dots,\Lambda_1)$. 由 (4.14)–(4.16) 可知, 当 $i\geqslant N_1$, $1\leqslant j\leqslant m$, $1\leqslant l\leqslant m$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|D_l g_{i,j}\chi_{(R_{\vec{\Lambda_1}}(\vec{0}))^c}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}&\leqslant 2\|g_{i,j}\chi_{(R_{\vec{\Lambda_1}}(\vec{0}))^c}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\\&\leqslant 2\|g_{i,j}-f_j\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}+2\|f_j\chi_{(R_{\vec{\Lambda_1}}(\vec{0}))^c}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\\&\leqslant 4\epsilon.\end{aligned}\tag{4.17}$$

因为 $q(m-\frac{\alpha}{d})>1$, 所以存在整数 $\Lambda_2>0$, 使得

$$\Lambda_2^{1-q(m-\frac{\alpha}{d})}<\epsilon.\tag{4.18}$$

由 (4.14) 可知, 当 $i\geqslant N_1$ 时, 有

$$\begin{aligned}&|\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(\vec{n})-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(\vec{n})|\\&\leqslant\sup_{\substack{R\ni\vec{n}\\R\in\mathcal{R}}}\frac{1}{N(R)^{m-\frac{\alpha}{d}}}\Big|\prod_{j=1}^m\sum_{\vec{k}\in R\cap\mathbb{Z}^d}g_{i,j}(\vec{k})-\prod_{j=1}^m\sum_{\vec{k}\in R\cap\mathbb{Z}^d}f_j(\vec{k})\Big|\\&\leqslant\sup_{\substack{R\ni\vec{n}\\R\in\mathcal{R}}}\sum_{\mu=1}^m\sum_{\vec{k}\in R\cap\mathbb{Z}^d}|g_{i,\mu}(\vec{k})-f_\mu(\vec{k})|\Big(\prod_{\iota=1}^{\mu-1}\sum_{\vec{k}\in R\cap\mathbb{Z}^d}g_{i,\iota}(\vec{k})\Big)\Big(\prod_{\nu=\mu+1}^m\sum_{\vec{k}\in R\cap\mathbb{Z}^d}f_\nu(\vec{k})\Big)\\&\leqslant\sum_{\mu=1}^m\|g_{i,\mu}-f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\Big(\prod_{\iota=1}^{\mu-1}\|g_{i,\iota}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\Big)\Big(\prod_{\nu=\mu+1}^m\|f_\nu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\Big)\\&\leqslant\sum_{\mu=1}^m\|g_{i,\mu}-f_\mu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\Big(\prod_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant m\\\nu\neq\mu}}(\|f_\nu\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}+1)\Big).\end{aligned}$$

这意味着, 对任意的 $\vec{n}\in\mathbb{Z}^d$, 当 $i\to\infty$ 时, $\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(\vec{n})\to\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(\vec{n})$ 并且

$$D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(\vec{n})\to D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(\vec{n}),\quad i\to\infty,\quad\vec{n}\in\mathbb{Z}^d.\tag{4.19}$$

令 $\Lambda=\max\{\Lambda_1,\Lambda_2,6\}$, 则由 (4.19) 可知, 存在 $N_2=N_2(\epsilon,\Lambda)\in\mathbb{N}$, 使得

$$|D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(\vec{n})-D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})(\vec{n})|\leqslant\frac{\epsilon}{(N(R_{2\vec{\Lambda}}(\vec{0})))^{1/q}},\quad i\geqslant N_2,\quad\vec{n}\in R_{2\vec{\Lambda}}(\vec{0})\cap\mathbb{Z}^d.\tag{4.20}$$

由 (4.16) 和 (4.20) 可得

$$\begin{aligned}&\|D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)-D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\\&\quad=\|(D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)-D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f}))\chi_{N(R_{2\vec{\Lambda}}(\vec{0}))}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}+\|(D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)-D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f}))\chi_{(N(R_{2\vec{\Lambda}}(\vec{0})))^c}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\\&\quad\leqslant\epsilon+\|D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{f})\chi_{(N(R_{2\vec{\Lambda}}(\vec{0})))^c}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}+\|D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)\chi_{(N(R_{2\vec{\Lambda}}(\vec{0})))^c}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\\&\quad\leqslant 2\epsilon+\|D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)\chi_{(N(R_{2\vec{\Lambda}}(\vec{0})))^c}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)},\quad i\geqslant N_2.\end{aligned}$$

为了证明当 $l=d$ 时 (4.13) 成立, 只需要证明

$$\|D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)\chi_{(N(R_{2\vec{\Lambda}}(\vec{0})))^c}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\lesssim_{\alpha,m,d,q,\vec{f}}\epsilon^{1/q},\quad i\geqslant N_1. \tag{4.21}$$

又因为

$$(R_{2\vec{\Lambda}}(\vec{0}))^c\cap\mathbb{Z}^d\subset\bigcup_{\mu=1}^d E_\mu:=\bigcup_{\mu=1}^d\mathbb{Z}^d\setminus\{\vec{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{Z}^d:|n_\mu|\leqslant 2\Lambda\}.$$

所以给定 $j\geqslant N_1$, 有

$$\|D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)\chi_{(N(R_{2\vec{\Lambda}}(\vec{0})))^c}\|^q_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)}\leqslant\sum_{\mu=1}^d A^q_{2,\mu}:=\sum_{\mu=1}^d\sum_{\vec{n}\in E_\mu}|D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(\vec{n})|^q. \tag{4.22}$$

对每个 $n'\in\mathbb{Z}^{d-1}$, 令

$$\begin{aligned}Y^+_{n'}&=\{|n_d|\geqslant 2\Lambda:\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1)\leqslant\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)\},\\ Y^-_{n'}&=\{|n_d|\geqslant 2\Lambda:\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1)>\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)\},\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}A^q_{2,d}\leqslant&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}(\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1))^q\\&+\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in Y^-_{n'}}(\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d))^q.\end{aligned} \tag{4.23}$$

接下来证明

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}(\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1))^q\lesssim_{\alpha,m,d,q,\vec{f}}\epsilon,\quad i\geqslant N_1 \tag{4.24}$$

和

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in Y^-_{n'}}(\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d))^q\lesssim_{\alpha,m,d,q,\vec{f}}\epsilon,\quad i\geqslant N_1. \tag{4.25}$$

我们只需要证明 (4.24) 成立, (4.25) 的证明类似. 给定 $i\geqslant N_1$, 因为 $g_{i,j}\in\ell^1(\mathbb{Z}^d)$, 所以对任意的 $(n',n_d)\in\mathbb{Z}^d$, 存在 $\vec{x}\in\mathbb{R}^d$, $\vec{r}(n',n_d)\in\mathbb{R}^d_+$, 使得 $(n',n_d)\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{x})$ 且

$$\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)=A_{\vec{r}(n',n_d)}(\vec{g}_i)(\vec{x}).$$

令 $\vec{r}(n',n_d)=(r_1(n',n_d),\dots,r_d(n',n_d))$. 类似于 (4.7) 的证明, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in Z^+_{n'}}(\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1))^q\\&\lesssim_{m,q}\sum_{\mu=1}^m\prod_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant m\\ \nu\neq\mu}}\|g_{i,\nu}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\|D_dg_{i,\mu}\|^{q-1}_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}\end{aligned}$$

$$\times\Bigg(\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{(F(r_j(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\sum_{\vec{k}\in R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_dg_{i,\mu}(\vec{k})|\Bigg). \tag{4.26}$$

类似 (4.8) 的讨论可知

$$\begin{aligned}&\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{(F(r_j(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\sum_{\vec{k}\in R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_dg_{i,\mu}(\vec{k})|\\&\leqslant\sum_{(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d}|D_dg_{i,\mu}(k_1,\dots,k_d)|\prod_{j=1}^{d}\Bigg(\sum_{n_j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(F(r_j(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_j-n_j|<2r_j(n',n_d)\}}\Bigg).\end{aligned} \tag{4.27}$$

若 $|k_d|\leqslant\Lambda$, $|n_d|\geqslant 2\Lambda$, 则 $|k_d-n_d|\geqslant\Lambda\geqslant 4$. 再由 (4.18) 可知

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n_d\in\mathbb{Z}\\|n_d|\geqslant 2\Lambda}}\frac{1}{(F(r_d(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_d-n_d|<2r_d(n',n_d)\}}\\&\leqslant\sum_{\substack{n_d\in\mathbb{Z}\\|n_d|\geqslant 2\Lambda}}\frac{1}{(2[r_d(n',n-d)-3/2]+1)^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{\Lambda\leqslant|k_d-n_d|<2r_d(n',n_d)\}}\\&\leqslant\sum_{\substack{n_d\in\mathbb{Z}\\|n_d|\geqslant 2\Lambda}}\frac{1}{(2[|k_d-n_d|-3/2]+1)^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_d-n_d|\geqslant\Lambda\}}\\&\leqslant\sum_{\substack{n_d\in\mathbb{Z}\\|n_d|\geqslant\Lambda}}\frac{1}{(2[|n_d|-3/2]+1)^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\\&\leqslant\sum_{\substack{n_d\in\mathbb{Z}\\|n_d|\geqslant\Lambda}}\frac{1}{(|n_d|-1)^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\\&\leqslant\frac{2}{q-1}(\Lambda-2)^{1-q(m-\frac{\alpha}{d})}\\&\lesssim_q\Lambda^{1-q(m-\frac{\alpha}{d})}\\&\lesssim_{\alpha,m,d,q}\epsilon.\end{aligned} \tag{4.28}$$

当 $|k_d|>\Lambda$ 时, 由 (4.11) 可知

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n_d\in\mathbb{Z}\\|n_d|\geqslant 2\Lambda}}\frac{1}{(F(r_d(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_d-n_d|<2r_d(n',n_d)\}}\\&\leqslant\sum_{n_d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(F(r_d(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_d-n_d|<2r_d(n',n_d)\}}\\&\lesssim_{\alpha,m,d,q}1.\end{aligned} \tag{4.29}$$

由 (4.15), (4.17) 和 (4.27)–(4.29) 可知

$$\sum_{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\sum_{n_d\in Y^+_{n'}}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{(F(r_j(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\sum_{\vec{k}\in R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_dg_{i,\mu}(\vec{k})|$$

$$\lesssim_{\alpha,m,d,q} \sum_{k'\in\mathbb{Z}^{d-1}} \sum_{\substack{k_d\in\mathbb{Z}\\ |k_d|>\Lambda}} |D_d g_{i,\mu}(k',k_d)| + \sum_{k'\in\mathbb{Z}^{d-1}} \sum_{\substack{k_d\in\mathbb{Z}\\ |k_d|\leqslant\Lambda}} |D_d g_{i,\mu}(k',k_d)|\epsilon$$

$$\lesssim_{\alpha,m,d,q,f_\mu} \epsilon, \quad i\geqslant N_1. \tag{4.30}$$

由 (4.14), (4.15), (4.26) 和 (4.30) 可知 (4.24) 成立. 再由 (4.23)–(4.25) 可得

$$A_{2,d}^q \lesssim_{\alpha,m,d,q,\vec{f}} \epsilon, \quad i\geqslant N_1. \tag{4.31}$$

下面估计 $A_{2,\mu}^q$, $\mu=1,2,\dots,d-1$. 首先估计 $A_{2,1}^q$. 对每个 $n'\in\mathbb{Z}^{d-1}$, 令

$$W_{n'}^+ = \{n_d\in\mathbb{Z}: \mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1)\leqslant \mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)\},$$
$$W_{n'}^- = \{n_d\in\mathbb{Z}: \mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1)> \mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)\},$$

则

$$\begin{aligned} A_{2,1}^q &= \sum_{\vec{k}\in E_1} |D_d\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(\vec{k})|^q \\ &= \sum_{|n_1|>2\Lambda} \sum_{k'\in\mathbb{Z}^{d-1}} |\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(k_1,\dots,k_d+1)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(k_1,\dots,k_d)|^q \\ &= \sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}\\ |n_1|>2\Lambda}} \sum_{n_d\in W_{n'}^+} (\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1))^q \\ &\quad + \sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}\\ |n_1|>2\Lambda}} \sum_{n_d\in W_{n'}^-} (\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d))^q. \end{aligned} \tag{4.32}$$

接下来要证明

$$\sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}\\ |n_1|>2\Lambda}} \sum_{n_d\in W_{n'}^+} (\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1))^q \lesssim_{\alpha,m,d,q,\vec{f}} \epsilon, \quad i\geqslant N_1 \tag{4.33}$$

和

$$\sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}\\ |n_1|>2\Lambda}} \sum_{n_d\in W_{n'}^-} (\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d))^q \lesssim_{\alpha,m,d,q,\vec{f}} \epsilon, \quad i\geqslant N_1. \tag{4.34}$$

只需要证明 (4.33) 成立, (4.34) 的证明类似. 类似于 (4.26) 的证明, 对任意的 $(n',n_d)\in\mathbb{Z}^d$, 存在 $\vec{r}(n',n_d)=(r_1(n',n_d),\dots,r_d(n',n_d))\in\mathbb{R}_+^d$, 使得

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}\\ |n_1|>2\Lambda}} \sum_{n_d\in W_{n'}^+} (\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d)-\mathbb{M}_{\alpha,\mathcal{R}}(\vec{g}_i)(n',n_d+1))^q \\ &\lesssim_{m,q} \sum_{\mu=1}^m \prod_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant m\\ \nu\neq\mu}} \|g_{i,\nu}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)} \|D_d g_{i,\mu}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^d)}^{q-1} \\ &\quad\times\Bigg(\sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}\\ |n_1|>2\Lambda}} \sum_{n_d\in W_{n'}^+} \prod_{j=1}^d \frac{1}{(F(r_j(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}} \sum_{\vec{k}\in R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d} |D_d g_{i,\mu}(\vec{k})|\Bigg). \end{aligned} \tag{4.35}$$

类似于 (4.27) 的证明, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}\\|n_1|>2\Lambda}}\sum_{n_d\in W^+_{n'}}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{(F(r_j(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\sum_{\vec{k}\in R_{2\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_dg_{i,\mu}(\vec{k})|\\&\leqslant\sum_{(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d}|D_df_j(k_1,\dots,k_d)|\Big(\sum_{|n_1|>2\Lambda}\frac{1}{(F(r_1(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_1-n_1|<2r_1(n',n_d)\}}\Big)\\&\quad\times\prod_{i=2}^{d}\Big(\sum_{n_i\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(F(r_i(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\chi_{\{|k_i-n_i|<2r_i(n',n_d)\}}\Big).\end{aligned}\tag{4.36}$$

由 (4.36) 和 (4.30) 的类似讨论可知

$$\sum_{\substack{n'\in\mathbb{Z}^{d-1}\\|n_1|>2\Lambda}}\sum_{n_d\in W^+_{n'}}\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{(F(r_j(n',n_d)))^{q(m-\frac{\alpha}{d})}}\sum_{\vec{k}\in R_{\vec{r}(n',n_d)}(n',n_d)\cap\mathbb{Z}^d}|D_dg_{i,\mu}(\vec{k})|\lesssim_{\alpha,m,d,q,\vec{f}}\epsilon,\quad i\geqslant N_1.\tag{4.37}$$

由 (4.37), (4.14), (4.15) 和 (4.35) 可知 (4.33) 成立. 又由 (4.32)–(4.34), 有

$$A^q_{2,1}\lesssim_{\alpha,m,d,q,\vec{f}}\epsilon,\quad i\geqslant N_1.\tag{4.38}$$

同理,

$$A^q_{2,\mu}\lesssim_{\alpha,m,d,q,\vec{f}}\epsilon,\quad i\geqslant N_1,\quad \mu=2,\dots,d-1.\tag{4.39}$$

最后由 (4.38), (4.39), (4.22) 和 (4.31) 可知 (4.21) 成立. 定理证毕.

参考文献

1 Aldaz J M, Pérez Lázaro J. Functions of bounded variation, the derivative of the one dimensional maximal function, and applications to inequalities. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 2443–2461
2 Bober J, Carneiro E, Hughes K, et al. On a discrete version of Tanaka's theorem for maximal functions. Proc Amer Math Soc, 2012, 140: 1669–1680
3 Brézis H, Lieb E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. Proc Amer Math Soc, 1983, 88: 486–490
4 Cao M, Xue Q, Yabuta K. On multilinear fractional strong maximal operator associated with rectangles and multiple weights. Rev Mat Iberoam, 2017, 33: 555–572
5 Carneiro E, Finder R, Sousa M. On the variation of maximal operators of convolution type II. Rev Mat Iberoam, 2018, 34: 739–766
6 Carneiro E, Hughes K. On the endpoint regularity of discrete maximal operators. Math Res Lett, 2012, 19: 1245–1262
7 Carneiro E, Madrid J. Derivative bounds for fractional maximal functions. Trans Amer Math Soc, 2017, 369: 4063–4092
8 Carneiro E, Madrid J, Pierce L B. Endpoint Sobolev and BV continuity for maximal operators. J Funct Anal, 2017, 273: 3262–3294
9 Carneiro E, Moreira D. On the regularity of maximal operators. Proc Amer Math Soc, 2008, 136: 4395–4404
10 Carneiro E, Svaiter B F. On the variation of maximal operators of convolution type. J Funct Anal, 2013, 265: 837–865
11 Córdoba A, Fefferman R. A geometric proof of the strong maximal theorem. Ann of Math (2), 1975, 102: 91–95
12 García-Cuerva J, Rubio de Francia J L. Weighted Norm Inequalities and Related Topics. North-Holland Mathematics Studies, vol. 116. Mathematical Notes. Amsterdam: North-Holland, 1985
13 González-Riquelme C. Continuity for the one-dimensional centered Hardy-Littlewood maximal operator at the derivative level. J Funct Anal, 2023, 285: 110097
14 Grafakos L, Liu L, Pérez C, et al. The multilinear strong maximal function. J Geom Anal, 2011, 21: 118–149
15 Hajłasz P, Onninen J. On boundedness of maximal functions in Sobolev spaces. Ann Acad Sci Fenn Math, 2004, 29: 167–176

16 Hardy G H, Littlewood J E. A maximal theorem with function-theoretic applications. Acta Math, 1930, 54: 81–116
17 Jessen B, Marcinkiewicz J, Zygmund A. Note on the differentiability of multiple integrals. Fund Math, 1935, 25: 217–234
18 Kinnunen J. The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function. Israel J Math, 1997, 100: 117–124
19 Kinnunen J, Lindqvist P. The derivative of the maximal function. J Reine Angew Math, 1998, 503: 161–167
20 Kinnunen J, Saksman E. Regularity of the fractional maximal function. Bull Lond Math Soc, 2003, 35: 529–535
21 Kurka O. On the variation of the Hardy-Littlewood maximal function. Ann Acad Sci Fenn Math, 2015, 40: 109–133
22 Lang S. Algebraic Number Theory. Reading: Addison-Wesley, 1970
23 Liu F. A remark on the regularity of the discrete maximal operator. Bull Aust Math Soc, 2017, 95: 108–120
24 Liu F. Continuity and approximate differentiability of multisublinear fractional maximal functions. Math Inequal Appl, 2018, 21: 25–40
25 Liu F, Wu H X. On the regularity of the multisublinear maximal functions. Canad Math Bull, 2015, 58: 808–817
26 Liu F, Wu H X. Regularity of discrete multisublinear fractional maximal functions. Sci China Math, 2017, 60: 1461–1476
27 Liu F, Wu H X. A note on the endpoint regularity of the discrete maximal operator. Proc Amer Math Soc, 2019, 147: 583–596
28 Liu F, Xue Q, Yabuta K. Regularity and continuity of the multilinear strong maximal operators. J Math Pures Appl, 2020, 138: 204–241
29 Liu F, Xue Q, Yabuta K. On the regularity and continuity of the multilinear fractional strong maximal operators. Math Nachr, 2023, 296: 2070–2089
30 Luiro H. Continuity of the maximal operator in Sobolev spaces. Proc Amer Math Soc, 2007, 135: 243–251
31 Luiro H. On the regularity of the Hardy-Littlewood maximal operator on subdomains of $\mathbb{R}^d$. Proc Edinb Math Soc, 2010, 53: 211–237
32 Luiro H. The variation of the maximal function of a radial function. Ark Mat, 2018, 56: 47–161
33 Luiro H, Madrid J. The variation of the fractional maximal function of a radial function. Int Math Res Not IMRN, 2019, 2019: 5284–5298
34 Madrid J. Sharp inequalities for the variation of the discrete maximal function. Bull Aust Math Soc, 2017, 95: 94–107
35 Madrid J. Endpoint Sobolev and BV continuity for maximal operators, II. Rev Mat Iberoam, 2019, 35: 2151–2168
36 Tanaka H. A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy-Littlewood maximal function. Bull Aust Math Soc, 2002, 65: 253–258
37 Temur F. On regularity of the discrete Hardy-Littlewood maximal function. arXiv:1303.3993, 2013
38 Wiener N. The ergodic theorem. Duke Math J, 1939, 5: 1–18

Endpoint regularity for discrete multilinear maximal operators and their fractional variants

Daiqing Zhang & Feng Liu

Abstract In this paper, we study the regularity properties of discrete multilinear maximal operators and their fractional variants associated with convex sets or rectangles with sides parallel to the coordinate axes. Some new bounds and continuity are given for the derivative of the above functions.

Keywords discrete multilinear maximal operator, fractional variant, convex sets, regularity, boundedness and continuity

MSC(2020) 42B25, 46E35, 26A45, 39A12

doi: 10.1360/SSM-2024-0110