中国科学 : 数学　2012 年　第 42 卷　第 6 期 : 603 ∼ 610
www.springerlink.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

涉及正规族与分担值的 Hayman 问题

仇惠玲[①*], 刘丹[②], 方明亮[③]

① 南京审计学院数学与统计学院, 南京 210029;
② 华南农业大学理学院应用数学系, 广州 510642;
③ 华南农业大学应用数学研究所, 广州 510642
E-mail: qiuhuiling1304@sina.com, liudan@scau.edu.cn, mlfang@scau.edu.cn

收稿日期: 2011-09-01; 接受日期: 2012-03-16; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10771076 和 11071083) 资助项目

摘要　设 $n,k\,(n\geqslant k+3)$ 是两个正整数, $a\,(\neq 0),b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, 其中族中每个函数的零点都至少是 k 重. 若对于 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f,g, $f^{(k)}-af^n$ 与 $g^{(k)}-ag^n$ 在 D 内分担 b, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规. 两个例子说明函数族中的每个函数的零点都至少是 k 重以及 $n\geqslant k+3$ 是最佳的.

关键词　亚纯函数　正规性　分担值
MSC (2000) 主题分类　30D45, 30D35

1　引言

设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 内的一个区域, $\mathcal{F}$ 是 D 上的一族亚纯函数. 如果对于族 $\mathcal{F}$ 中的任意一个函数列 $\{f_n\}$ 都存在一个子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 D 内按球面距离内闭一致收敛于一个亚纯函数或无穷, 则称 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规 (参见 [1–3]).

设 f, g 是区域 D 内的两个亚纯函数, $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. 若 $f(z)=a$ 当且仅当 $g(z)=a$, 则称 f 和 g 在 D 内分担 a.

1959 年, Hayman [4] 证明了如下著名的结果.

定理 A　设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个亚纯函数, $n\geqslant 5$ 是一个正整数, $a\,(\neq 0),b$ 是两个有穷复数. 若 $f'-af^n\neq b$, 则 f 是一个常数.

Hayman [5] 猜想存在相应于定理 A 的正规定则. 文章 [6–13] 等研究这个相应于定理 A 的正规定则. 他们证明了

定理 B　设 $n\geqslant 3$ 是一个正整数, $a\,(\neq 0),b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数. 若对于任意 $f\in\mathcal{F}$, $f'-af^n\neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 C　设 $n\geqslant 2$ 是一个正整数, $a\,(\neq 0),b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族全纯函数. 若对于任意 $f\in\mathcal{F}$, $f'-af^n\neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

文章 [14–18] 研究了上述定理 B 和 C 中将 f' 换为 $f^{(k)}$ 的情形. 他们证明了

定理 D　设 $n,k\,(n\geqslant k+3)$ 是两个正整数, $a\,(\neq 0),b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数. 若对于任意 $f\in\mathcal{F}$, $f^{(k)}-af^n\neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

英文引用格式: Qiu H L, Liu D, Fang M L. Hayman's question concerning normal families and shared values (in Chinese). Sci Sin Math, 2012, 42(6): 603–610, doi: 10.1360/012011-655

定理 E 设 $n(\geqslant 2), k$ 是两个正整数, $a(\neq 0), b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族全纯函数. 若对于任意 $f \in \mathcal{F}$, $f^{(k)} - af^n \neq b$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

寻找涉及分担值或分担函数的正规定则是目前的热点课题, 如[19–23]. Zhang[19]获得了如下结果.

定理 F 设 $n \geqslant 4$ 是一个正整数, $a(\neq 0), b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数. 若对于族 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f 和 g, $f' - af^n$ 和 $g' - ag^n$ 在 D 内分担 b, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 G 设 $n \geqslant 2$ 是一个正整数, $a(\neq 0), b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族全纯函数. 若对于族 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f 和 g, $f' - af^n$ 和 $g' - ag^n$ 在 D 内分担 b, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

文章 [19] 中, Zhang 举例说明定理 F 中 $n \geqslant 4$ 和定理 G 中的 $n \geqslant 2$ 是最佳的.

很自然地问: 在上述两个定理中, 将 f' 换为 $f^{(k)}$ 结论是否仍然成立? 本文研究并回答了这个问题, 证明了

定理 1 设 $n, k(n \geqslant k+3)$ 是两个正整数, $a(\neq 0), b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数, 其中族中每个函数的零点至少是 k 重. 若对于族 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f 和 g, $f^{(k)} - af^n$ 和 $g^{(k)} - ag^n$ 在 D 内分担 b, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

定理 2 设 $n(\geqslant 2), k$ 是两个正整数, $a(\neq 0), b$ 是两个有穷复数, $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族全纯函数, 其中族中每个函数的零点至少是 k 重. 若对于族 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f 和 g, $f^{(k)} - af^n$ 和 $g^{(k)} - ag^n$ 在 D 内分担 b, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规.

例 1 设 $n, k \geqslant 2$ 是两个正整数, a 是一个非零有穷复数, $\mathcal{F} = \{f_j = jz^{k-1} : j = 1, 2, 3, \ldots\}$, $D = \{z : |z| < 1\}$. 显然, 对于族 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f 和 g, $f^{(k)} - af^n$ 和 $g^{(k)} - ag^n$ 在 D 内分担 0, 但是 $\mathcal{F}$ 在 D 内不正规.

这说明定理 1 和 2 中的条件族 $\mathcal{F}$ 中每个函数的零点至少是 k 重是必需的, 并且是最佳的. 例 1 同时说明定理 2 中的条件 $n \geqslant 2$ 是最佳的.

例 2 设 k 是一个正整数, a 是一个非零有穷复数, $D = \{z : |z| < 1\}$. 又设 $\mathcal{F} = \{f_n\}$, 其中

$$f_n(z) = \frac{1}{nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

则有

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(z) - af_n^{k+2}(z) &= \frac{(-1)^k k! n^k}{[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}]^{k+1}} - \frac{a}{[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}]^{k+2}} \\ &= \frac{(-1)^k k! n^k [nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}] - a}{[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}]^{k+2}} = \frac{(-1)^k k! n^{k+1} z}{[nz + \frac{a}{(-1)^k k! n^k}]^{k+2}}. \end{aligned}$$

显然, 对于族 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数 f 和 g, $f^{(k)} - af^{k+2}$ 和 $g^{(k)} - ag^{k+2}$ 在 D 分担 0, 并且在 D 内 $f \neq 0, g \neq 0$, 但是 $\mathcal{F}$ 在 D 内不正规. 这说明定理 1 中 $n \geqslant k+3$ 是最佳的.

2 引理

为了证明定理 1 和 2, 需要如下几个结果:

引理 1[24,25] 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘 Δ 上的一族亚纯函数, 且族 $\mathcal{F}$ 中任意函数的所有零点重级均 $\geqslant p$, 所有极点重级均 $\geqslant q$. 设 α 是一个满足 $-p < \alpha < q$ 的实数. 则 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in \Delta$ 的一个邻域内不正规的充要条件是存在

a) 一个点列 $z_j \in \Delta$, $z_j \to z_0$;

b) 一个函数列 $f_j \in \mathcal{F}$;

c) 一个正数列 $\rho_j \to 0$,

使得 $g_j(\xi) := \rho_j^{\alpha} f_j(z_j + \rho_j \xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离局部一致收敛于 $g(\xi)$, 其中 g 是一个非常数的亚纯函数, 它所有的零点重级 $\geqslant p$ 且所有的极点重级 $\geqslant q$.

引理 2 设 f 是一个复平面上的亚纯函数, a 是一个非零有穷复数, n,k 是两个正整数且满足 $k \geqslant 2, n \geqslant k+3$. 若 f 所有的零点至少是 k 重, 且 $f^{(k)}(z) - af^n(z)$ 至多有一个判别的零点, 则 f 是一个常数.

证明 用反证法证明. 假设 f 是一个非常数亚纯函数. 令

$$\Psi(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{af^n(z)}. \tag{1}$$

因为 f 的所有零点至少是 k 重, 所以 $f^{(k)}(z) \not\equiv 0$. 否则, f 是一个次数不超过 $k-1$ 的多项式, 于是 f 是一个常数, 矛盾. 因此 $\Psi(z) \not\equiv 0$.

由 (1) 得

$$af^n(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{\Psi(z)}. \tag{2}$$

所以有

$$\begin{aligned} nm(r,f) = m(r,f^n) &\leqslant m(r,af^n) + \log^+ \frac{1}{|a|} \\ &\leqslant m\left(r, \frac{f^{(k)}}{\Psi}\right) + \log^+ \frac{1}{|a|} \\ &\leqslant m\left(r, \frac{1}{\Psi}\right) + m(r,f^{(k)}) + \log^+ \frac{1}{|a|} \\ &\leqslant m\left(r, \frac{1}{\Psi}\right) + m(r,f) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \log^+ \frac{1}{|a|}, \end{aligned}$$

于是有

$$(n-1)m(r,f) \leqslant m\left(r, \frac{1}{\Psi}\right) + S(r,f). \tag{3}$$

另一方面, 由 (2) 得

$$\begin{aligned} nN(r,f) = N(r,af^n) &= N\left(r, \frac{f^{(k)}}{\Psi}\right) \\ &\leqslant N(r,f^{(k)}) + N\left(r, \frac{1}{\Psi}\right) - \overline{N}(r, \psi = f^{(k)} = 0), \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\overline{N}(r, \psi = f^{(k)} = 0)$ 是 Ψ 和 $f^{(k)}$ 公共零点的不计重数的密指量.

于是有

$$\begin{aligned} &nN(r,f) \leqslant N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + N\left(r, \frac{1}{\Psi}\right) - \overline{N}(r, \psi = f^{(k)} = 0), \\ &(n-1)N(r,f) \leqslant k\overline{N}(r,f) + N\left(r, \frac{1}{\Psi}\right) - \overline{N}(r, \psi = f^{(k)} = 0). \end{aligned} \tag{5}$$

由 (1) 得

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{\Psi}\right)=\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\psi=f^{(k)}=0). \tag{6}$$

我们断言: $\Psi(z)\not\equiv 1$. 若 $\Psi(z)\equiv 1$, 则有 $f^{(k)}(z)\equiv af^n(z)$.

上式结合 $n\geqslant k+3$ 知, f 是一个整函数. 故有

$$\begin{aligned}nT(r,f)=T(r,f^n)&=T\left(r,\frac{f^{(k)}}{a}\right)\leqslant T(r,f^{(k)})+O(1)\\&\leqslant N(r,f^{(k)})+m(r,f^{(k)})+O(1)\\&\leqslant N(r,f)+k\overline{N}(r,f)+m(r,f)+S(r,f)\\&\leqslant T(r,f)+S(r,f),\end{aligned}$$

于是有 $(n-1)T(r,f)\leqslant S(r,f)$, 即 $T(r,f)=S(r,f)$, 矛盾. 所以 $\Psi(z)\not\equiv 1$.

由 (3), (5) 以及 Nevanlinna 第一、第二基本定理得

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,f)&\leqslant k\overline{N}(r,f)+T\left(r,\frac{1}{\Psi}\right)-\overline{N}(r,\psi=f^{(k)}=0)+S(r,f)\\&\leqslant k\overline{N}(r,f)+T(r,\Psi)-\overline{N}(r,\psi=f^{(k)}=0)+S(r,f)\\&\leqslant k\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\Psi)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\Psi}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\Psi-1}\right)-\overline{N}(r,\psi=f^{(k)}=0)+S(r,f)\\&\leqslant k\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-af^n}\right)+S(r,f).\end{aligned}$$

因为 $f^{(k)}-af^n$ 至多有一个判别的零点, 于是由上式得

$$(n-1)T(r,f)\leqslant (k+1)\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log r+S(r,f). \tag{7}$$

由于

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{1}{k}T(r,f)+S(r,f), \tag{8}$$

$$\overline{N}(r,f)\leqslant T(r,f), \tag{9}$$

于是由 (7)–(9) 得

$$\left(n-2-k-\frac{1}{k}\right)T(r,f)\leqslant\log r+S(r,f). \tag{10}$$

上式结合考虑 $n\geqslant k+3, k\geqslant 2$ 即得

$$T(r,f)\leqslant\frac{k}{k-1}\log r+S(r,f). \tag{11}$$

因此 f 是一个次数 $\leqslant 2$ 的有理函数. 下面我们分两种情形讨论.

情形 1 $f\neq 0$. 则有

$$f(z)=\frac{1}{A_1z^2+B_1z+C_1}.$$

下面我们再分两种子情形讨论.

情形 1.1 $A_1=0$. 则有 $f(z)=\frac{1}{B_1z+C_1}, B_1\neq 0$. 于是有

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z)-af^n(z)&=\frac{(-1)^kB_1^kk!}{(B_1z+C_1)^{k+1}}-\frac{a}{(B_1z+C_1)^n}\\ &=\frac{(-1)^kB_1^kk!(B_1z+C_1)^{n-k-1}-a}{(B_1z+C_1)^n}. \end{aligned}$$

由于 $n-k-1\geqslant 2$, 于是由上式知 $f^{(k)}(z)-af^n(z)$ 至少有两个判别的零点, 矛盾.

情形 1.2 $A_1\neq 0$. 则由 (7) 得

$$\begin{aligned} (n-1)T(r,f)&\leqslant (k+1)\overline{N}(r,f)+\log r+S(r,f)\\ &\leqslant (k+1)T(r,f)+\log r+S(r,f). \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} &(n-k-2)T(r,f)\leqslant \log r+S(r,f),\\ &T(r,f)\leqslant \log r+S(r,f). \end{aligned}$$

所以 f 是一个次数 $\leqslant 1$ 的有理函数, 与 $A_1\neq 0$ 矛盾.

情形 2 $f=0$ 至少有一个零点. 则有

$$f(z)=\frac{(z-c)^2}{A_1z^2+B_1z+C_1}.$$

接下去我们又分两种子情形讨论.

情形 2.1 $A_1=0$. 我们再分两种子情形讨论.

情形 2.1.1 $B_1=0$. 则由 (7) 得 $(n-1)T(r,f)\leqslant 2\log r+S(r,f)$. 于是有

$$T(r,f)\leqslant \frac{2}{n-1}\log r+S(r,f).$$

因此结合 $n\geqslant k+3$ 知 f 是一个常数, 矛盾.

情形 2.1.2 $B_1\neq 0$. 则有

$$f(z)=\frac{(z-c)^2}{B_1z+C_1}.$$

将 $f(z)$ 写成一个多项式与一个真分式的和, 得

$$f(z)=\frac{z}{B_1}+A_0+\frac{A_{-1}}{B_1z+C_1},$$

其中 $A_0=-\frac{2B_1c+C_1}{B_1^2}$, $A_{-1}=\frac{(C_1+B_1c)^2}{B_1^2}$.

于是有

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z)-af^n(z)&=\frac{(-1)^kA_{-1}B_1^kk!}{(B_1z+C_1)^{k+1}}-\frac{a(z-c)^{2n}}{(B_1z+C_1)^n}\\ &=\frac{(-1)^kA_{-1}B_1^kk!(B_1z+C_1)^{n-k-1}-a(z-c)^{2n}}{(B_1z+C_1)^n}. \end{aligned}$$

我们断言: $f^{(k)}-af^n$ 至少有两个判别的零点. 显然, $f^{(k)}-af^n$ 有零点. 假如 $f^{(k)}-af^n$ 没有两个判别的零点. 则 $f^{(k)}-af^n$ 有且只有一个零点 (不计重数), 设为 d. 显然, $d\neq c$. 于是有 $(-1)^kA_{-1}B_1^kk!(B_1z+C_1)^{n-k-1}-a(z-c)^{2n}\equiv -a(z-d)^{2n}$.

令 $z-d=w$, 则有 $(-1)^kA_{-1}B_1^kk!(B_1(w+d)+C_1)^{n-k-1}-a(w+d-c)^{2n}\equiv -aw^{2n}$. 于是不难得到 $d=c$, 矛盾.

情形 2.2 $A_1\neq 0$. 下面我们分两种子情形讨论.

情形 2.2.1 $A_1z^2+B_1z+C_1$ 有一个判别的零点. 于是有

$$\overline{N}(r,f)\leqslant\frac{1}{2}T(r,f)+S(r,f).$$

接下去同情形 1.2 一样讨论, 即知 f 是一个常数, 矛盾.

情形 2.2.2 $A_1z^2+B_1z+C_1=A_1(z-c_1)(z-c_2), c_1\neq c_2$. 于是有

$$f(z)=\frac{(z-c)^2}{A_1(z-c_1)(z-c_2)}.$$

经过简单的计算得

$$f(z)=\frac{1}{A_1}\left[1+\frac{a_1}{z-c_1}+\frac{a_2}{z-c_2}\right],$$

其中 $a_1=\frac{(c-c_1)^2}{c_1-c_2}$, $a_2=\frac{(c-c_2)^2}{c_2-c_1}$.

$$\begin{aligned}f^{(k)}(z)-af^n(z)&=\frac{(-1)^kk!}{A_1}\left[\frac{a_1}{(z-c_1)^{k+1}}+\frac{a_2}{(z-c_2)^{k+1}}\right]-\frac{a(z-c)^{2n}}{A_1^n(z-c_1)^n(z-c_2)^n}\\&=\frac{(-1)^kk!A_1^{n-1}[a_1(z-c_1)^{n-k-1}(z-c_2)^n+a_2(z-c_1)^n(z-c_2)^{n-k-1}]-a(z-c)^{2n}}{A_1^n(z-c_1)^n(z-c_2)^n}.\end{aligned}$$

下面我们证明 $f^{(k)}-af^n$ 至少有两个判别的零点. 显然, $f^{(k)}-af^n$ 有零点. 假如 $f^{(k)}-af^n$ 没有两个判别的零点, 则 $f^{(k)}-af^n$ 有且只有一个零点, 设为 d. 于是有

$$(-1)^kk!A_1^{n-1}[a_1(z-c_1)^{n-k-1}(z-c_2)^n+a_2(z-c_1)^n(z-c_2)^{n-k-1}]-a(z-c)^{2n}\equiv -a(z-d)^{2n}.$$

令 $z-d=w$, 则有

$$\begin{aligned}&(-1)^kk!A_1^{n-1}[a_1(w+d-c_1)^{n-k-1}(w+d-c_2)^n+a_2(w+d-c_1)^n(w+d-c_2)^{n-k-1}]\\&\quad-a(w+d-c)^{2n}\equiv -aw^{2n}.\end{aligned}$$

于是有 $d=c$. 所以有

$$(-1)^kk!A_1^{n-1}[a_1(w+d-c_1)^{n-k-1}(w+d-c_2)^n+a_2(w+d-c_1)^n(w+d-c_2)^{n-k-1}]\equiv 0,$$

即

$$(-1)^kk!A_1^{n-1}(w+c-c_1)^{n-k-1}(w+c-c_2)^{n-k-1}\times[a_1(w+c-c_2)^{k+1}+a_2(w+c-c_1)^{k+1}]\equiv 0.$$

所以有

$$a_1(w+c-c_2)^{k+1}+a_2(w+c-c_1)^{k+1}\equiv 0.$$

于是即得 $c_1=c_2$, 矛盾. 所以 f 是一个常数. □

从引理 2 的证明易得如下结果.

引理 3 设 f 是一个整函数, a 是一个非零有穷复数, $n\,(\geqslant 2)$, k 是两个正整数. 若 f 的所有零点至少是 k 重, 且 $f^{(k)}(z)-af^n(z)$ 至多有一个判别的零点, 则 f 是一个常数.

3 定理的证明

因为定理 1 与定理 2 的证明是类似的, 所以我们这里只给出定理 1 的证明.

定理 1 的证明 由定理 F, 我们只需证明 $k \geqslant 2$ 的情形.

不失一般性, 我们设 $D = \Delta = \{z : |z| < 1\}$. 任取 $z_0 \in D$. 下面我们证明 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 任意取定 $h \in \mathcal{F}$. 下面我们分两种情形讨论.

情形 1 $h^{(k)}(z_0) - ah^n(z_0) \neq b$. 则存在 $\delta > 0$, 使得对于任意 $z \in D_\delta = \{z : |z - z_0| < \delta\}$ 有 $h^{(k)}(z) - ah^n(z) \neq b$. 于是对于任意 $f \in \mathcal{F}$, 对于任意 $z \in D_\delta$, 有 $f^{(k)}(z) - af^n(z) \neq b$. 因此由定理 D 知, $\mathcal{F}$ 在 D_δ 内正规, 于是 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规.

情形 2 $h^{(k)}(z_0) - ah^n(z_0) = b$. 我们再分两种子情形讨论.

情形 2.1 $h^{(k)} - ah^n \not\equiv b$. 则存在 $\delta > 0$, 使得对于任意 $z \in D_\delta^o = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$, 有 $h^{(k)}(z) - ah^n(z) \neq b$. 于是对于任意 $f \in \mathcal{F}$, 对于任意 $z \in D_\delta^o$, 有 $f^{(k)}(z) - af^n(z) \neq b$. 所以由定理 D 知, $\mathcal{F}$ 在 D_δ^o 内正规.

假设 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规. 于是由引理 1 知, 存在 $f_j \in \mathcal{F}$, $z_j \to z_0$, $\rho_j \to 0^+$ 使得 $g_j(\xi) := \rho_j^{\frac{k}{n-1}} f_j(z_j + \rho_j\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集上按球面距离一致收敛于 $g(\xi)$, 其中 g 是一个 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数. 因此 $g_j(\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 去掉 g 的极点后的任意紧子集上一致收敛于 $g(\xi)$. 显然, g 的所有零点的重级至少是 k. 所以

$$\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}[f_j^{(k)}(z_j + \rho_j\xi) - af_j^n(z_j + \rho_j\xi) - b] = g_j^{(k)}(\xi) - ag_j^n(\xi) - \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} b$$

在 $\mathbb{C}$ 去掉 g 的极点后的任意紧子集上一致收敛于 $g^{(k)}(\xi) - ag^n(\xi)$.

因为 $f_j^{(k)}(z_j + \rho_j\xi) - af_j^n(z_j + \rho_j\xi) - b$ 仅有一个判别的零点, 所以由 Hurwitz 定理知: 或者 $g^{(k)}(\xi) - ag^n(\xi)$ 最多只有一个判别的零点或者 $g^{(k)}(\xi) - ag^n(\xi) \equiv 0$. 若 $g^{(k)}(\xi) - ag^n(\xi)$ 最多只有一个判别的零点, 则由引理 2 知, g 是一个常数, 矛盾; 若 $g^{(k)}(\xi) - ag^n(\xi) \equiv 0$, 则由 $n \geqslant k + 3$ 可知, g 是一个整函数. 于是有

$$\begin{aligned} nT(r, g) = T(r, g^n) &= T\left(r, \frac{g^{(k)}}{a}\right) \leqslant T(r, g^{(k)}) + O(1) \\ &\leqslant N(r, g^{(k)}) + m(r, g^{(k)}) + O(1) \leqslant m(r, g) + S(r, g) \leqslant T(r, g) + S(r, g). \end{aligned}$$

即 $(n-1)T(r, g) \leqslant S(r, g)$. 故有 $T(r, g) = S(r, g)$, 矛盾. 所以 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规.

情形 2.2 $h^{(k)} - ah^n \equiv b$. 则由定理 1 的条件知, 对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, $f^{(k)} - af^n \equiv b$.

假如 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规. 则由引理 1 知, 存在 $f_j \in \mathcal{F}$, $z_j \to z_0$, $\rho_j \to 0^+$ 使得 $g_j(\xi) := \rho_j^{\frac{k}{n-1}} f_j(z_j + \rho_j\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集上按球面距离一致收敛于 $g(\xi)$, 其中 g 是一个 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数. 因此 $g_j(\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 去掉 g 的极点后的任意紧子集上一致收敛于 $g(\xi)$. 显然, g 的所有零点的重级至少是 k. 于是

$$\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}[f_j^{(k)}(z_j + \rho_j\xi) - af_j^n(z_j + \rho_j\xi) - b] = g_j^{(k)}(\xi) - ag_j^n(\xi) - \rho_j^{\frac{nk}{n-1}} b$$

在 $\mathbb{C}$ 去掉 g 的极点后的任意紧子集上一致收敛于 $g^{(k)}(\xi) - ag^n(\xi)$.

因为 $f_j^{(k)}(z_j + \rho_j\xi) - af_j^n(z_j + \rho_j\xi) - b \equiv 0$, 所以 $g^{(k)}(\xi) - ag^n(\xi) \equiv 0$. 接下去与情形 2.1 一样讨论得到矛盾.

因此我们证明了 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处正规. 于是 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规. 定理 1 证毕.

致谢 作者对审稿人指出定理 1 的原证明中遗漏情形 2.2 并提出有意义的建议表示衷心的感谢!

参考文献

1 Hayman W K. Meromorphic Functions. Oxford: Clarendon Press, 1964
2 Schiff J. Normal Families. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1993
3 Yang L. Value Distribution Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1993
4 Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives. Ann of Math, 1959, 70: 9–42
5 Hayman W K. Research Problems in Function Theory. London: Athlone Press, 1967
6 Drasin D. Normal families and the Nevanlinna theory. Acta Math, 1969, 122: 231–263
7 杨乐. 正规族与微分多项式. 中国科学 A 辑, 1983, 26: 21–32
8 Langley J K. On normal families and a result of Drasin. Proc Royal Soc Edinburgh, Ser A, 1984, 98: 385–393
9 李松鹰. 一类函数的正规定则. 福建师范大学学报: 自然科学版, 1984, 98: 385–393
10 李先进. 关于正规族的 Hayman 猜想的证明. 中国科学 A 辑, 1985, 28: 24–31
11 陈怀惠, 方明亮. 关于 f^nf' 的值分布. 中国科学 A 辑, 1995, 38: 121–127
12 Zalcman L. On some questions of Hayman. Unpublished manuscript, 5. 1994
13 叶亚盛. 一个新的正规定则及其应用. 数学年刊 A 辑, 1991, 12: 44–49
14 庞学诚. 微分多项式的正规定则. 科学通报, 1988, 33: 1690–1693
15 Schwick W. Normality criteria for families of meromorphic functions. J Analyse Math, 1989, 52: 241–289
16 Chen H H, Hua X H. Normal families of holomorphic functions. J Austral Math Soc Ser A, 1995, 59: 112–117
17 Ye Y S, Pang X C. On the zeros of a differential polynomial and normal families. J Math Anal Appl, 1997, 205: 32–42
18 Xu Y. Normal families of meromorphic functions. J Math Wuhan, 2001, 21: 381–386
19 Zhang Q C. Normal families of meromorphic functions concerning shared values. J Math Anal Appl, 2008, 338: 545–551
20 常建明. 与分担质相关的正规族. 中国科学 A 辑, 2009, 39: 399–404
21 Lei C L, Fang M L. Normality and shared values concerning differential polynomials. Sci China Math, 2010, 53: 749–754
22 袁文俊, 李志荣, 肖冰. 复合解析函数族分担亚纯函数的正规性. 中国科学: 数学, 2010, 40: 429–436
23 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2007
24 Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared values. Bull London Math Soc, 2000, 32: 325–331
25 Zalcman L. Normal families: New perspectives. Bull Amer Math Soc, 1998, 35: 215–230

Hayman's question concerning normal families and shared values

QIU HuiLing, LIU Dan & FANG MingLiang

Abstract Let $n, k\,(n \geqslant k+3)$ be two positive integers, let $a\,(\neq 0), b$ be two finite constants, and let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain D, all of whose zeros have multiplicity at least k. If, for each pair of functions f and g in $\mathcal{F}$, $f^{(k)}-af^n$ and $g^{(k)}-ag^n$ share b in D, then $\mathcal{F}$ is normal in D. Two examples show that all zeros of each function in the family have multiplicity at least k and $n \geqslant k+3$ are best possible.

Keywords **meromorphic function, normality, shared value**

MSC(2010) **30D45, 30D35**

doi: 10.1360/012011-655