中国科学: 地球科学 2017 年 第 47 卷 第 2 期: 245 ~ 251
SCIENTIA SINICA Terrae earthcn.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论 文

基于非线性误差信息熵的系统可预报分量分析

黎爱兵[1], 张立凤[2*], 李新东[1], 李旺[1], 王博[1]

1. 96631部队, 北京 102208;
2. 解放军理工大学气象海洋学院, 南京 211101
* 通讯作者, E-mail: zhanglif_qxxy@sina.cn

收稿日期: 2016-09-07; 接受日期: 2016-11-01; 网络版发表日期: 2017-01-13
国家自然科学基金项目(批准号: 41375063)资助

摘要 基于非线性误差信息熵理论, 研究了Lorenz系统非线性误差增长规律, 并对系统的可预报分量进行了分析. 结果表明: 系统可预报性定量估计需综合考虑初始误差不确定性和系统自身不确定性的影响; 非线性误差增长除与初始误差大小有关外, 还与初始误差向量空间分布有关, 即使相同大小不同方向的初始误差, 非线性误差增长也存在差异; 非线性误差增长的可预报性与误差分量有关, 但与分量所占比例大小的无关, 贡献率最大的分量, 可预报性不一定最高, 贡献率最小的分量, 可预报性也不一定最低; 不同的分量, 可预报性不同, 且不同时间段, 可预报分量不同, 可预报性也不同.

关键词 非线性误差, 信息熵, 可预报分量, Lorenz系统

1 引言

大气是一个复杂的非线性系统, 由于非线性系统的混沌性影响, 即使微小的初值误差或模式误差, 也会导致完全不一样的预报结果, 即大气的可预报性是有限的. 研究大气的可预报性一直是大气科学领域的热点和难点. 在可预报性理论研究中, 动力学方法应用广泛, 其中条件非线性最优扰动(CNOP)(穆穆和段晚锁, 2003; Mu等, 2010)和非线性局部Lyapunov指数(NLLE)(陈宝花等, 2006; Ding等, 2008)都是估计可预报性非常有效的参量. CNOP代表了最不稳定(或最敏感)的初始模态, 在不稳定性、可预报性、集合预报和目标观测等方面都有广泛应用(Mu和Jiang, 2008; Mu等, 2009; Duan和Mu, 2009; Duan和Zhang, 2010; Duan等, 2012; Duan和Wei, 2013; 穆穆等, 2013; 周菲凡和张贺, 2014; 陈磊等, 2015). NLLE反映了非线性误差的平均增长率, 可用来估计大气和海洋可预报期限的时空分布(李建平和丁瑞强, 2008;丁瑞强和李建平, 2009; Ding等, 2011; Li和Ding, 2011, 2013), 且在此基础上发展的局地平均误差相对增长(LAGRE)可为NLLE应用于目标观测问题提供依据(刘德强等, 2015).

大气系统是多变量的非线性系统, 对不同气象场, 可预报性往往不同. 丑纪范等(2010)研究指出在延伸期内气象要素场可分为可预报分量和不可预报的混沌分量. 郑志海等(2009, 2012, 2013)通过可预报分量将可预报性、数值模式、历史资料和集合预报有机

中文引用格式: 黎爱兵, 张立凤, 李新东, 李旺, 王博. 2017. 基于非线性误差信息熵的系统可预报分量分析. 中国科学: 地球科学, 47: 245–251, doi: 10.1360/N072016-00127
英文引用格式: Li A B, Zhang L F, Li X D, Li W, Wang B. 2017. Predictable component analysis of a system based on nonlinear error information entropy. Science China Earth Sciences, 60: 501–507, doi: 10.1007/s11430-016-5127-8

© 2017 《中国科学》杂志社

结合, 对不同特性的可预报分量, 采用不同的集合方式. 王启光等(2012, 2014)基于Lorenz系统开展了可预报分量提取数值试验, 结果发现同一初值, 随时间演变, 误差在不同方向上增长速度明显不同, 同时借鉴了CNOP相关算法, 发展了在数值预报模式中提取可预报分量的实用方法, 但这种方法没有考虑外强迫相似和系统自身不确定性影响.

信息熵作为随机变量不确定性的度量, 在可预报性研究中有着广泛应用前景(Abramov等, 2005; DelSole和Tippett, 2007), 并逐渐形成了估计可预报性的三个重要指标: 可预报性信息、相对熵和互信息. 目前, 基于信息熵理论的可预报性研究大多仅局限于对数值模式的可预报性作定性分析, 对非线性系统可预报时间或期限进行定量估计的研究还很少. 除估计系统可预报性外, 利用信息熵理论还可分析可预报分量 (Schneider和Griffies, 1999; DelSole, 2004; DelSole和Tippett, 2008). DelSole和Tippett (2009a, 2009b)在信息熵理论基础上提出了平均可预报性时间(APT), 通过分量分解, 可得到最大APT分量. APT可用于多时间尺度系统的可预报性分析(DelSole等, 2011; Jia和DelSole, 2011), 但该方法主要对整体预报时间段内的分量进行可预报性估计, 没有涉及各可预报分量随时间演变情况, 且模型以线性统计模型为主.

非线性误差信息熵有效结合了非线性误差增长动力学和信息熵统计学优点, 不依赖于系统坐标和变量量纲, 考虑系统自身不确定性影响, 可成功用来定量估计Lorenz系统和大气多变量系统的联合可预报性及单变量可预报性(黎爱兵等, 2013, 2014). 本文基于非线性误差信息熵理论, 结合特征向量分析或正交函数分解方法, 对Lorenz系统的非线性误差增长规律和可预报分量进行分析, 目的在于揭示各可预报分量随时间变化规律.

2 非线性误差信息熵与可预报分量分析

对于n维非线性动力系统, 在τ时刻, 叠加在系统变量$\boldsymbol{x}(\tau)$的非线性误差$\boldsymbol{\delta}(\tau)$可表示为(Ding等, 2008; Li和Ding, 2011):

$$\boldsymbol{\delta}(\tau)=\eta(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{\delta}(0),\tau)\boldsymbol{\delta}(0), \tag{1}$$

其中, $\eta(\boldsymbol{x}(0)$、$\boldsymbol{\delta}(0)$、$\tau)$为非线性误差传播算子, 其与系统初始状态$\boldsymbol{x}(0)$、初始误差$\boldsymbol{\delta}(0)$和积分时间τ有关. 式(1)反映了误差随时间的非线性演变, 其信息熵$S_{\delta(\tau)}$可表示为(黎爱兵等, 2014):

$$S_{\delta(\tau)}=-\int_{R^n}P_x(\delta(\tau))\log P_x(\boldsymbol{\delta}(\tau))\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

其中, $P_x(\boldsymbol{\delta}(\tau))$为$\boldsymbol{\delta}(\tau)$的概率分布. $S_{\delta(\tau)}$反映了预报结果的不确定性随时间演变. τ时刻, $\boldsymbol{x}(\tau)$自身也服从一定的概率分布, 相应度量系统自身不确定性的系统状态信息熵$S_{x(\tau)}$可表示为

$$S_{x(\tau)}=-\int_{R^n}P_x(\boldsymbol{x}(\tau))\log P_x(\boldsymbol{x}(\tau))\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{3}$$

其中, $P_x(\boldsymbol{x}(\tau))$是$\boldsymbol{x}(\tau)$的概率分布. 对于与初值不确定性密切相关的可预报性, $P_x(\boldsymbol{x}(\tau))$与时间无关, 即$S_{x(\tau)}$为常值; 对于受外强迫作用的可预报性, $P_x(\boldsymbol{x}(\tau))$和$S_{x(\tau)}$都随时间变化.

将$S_{x(\tau)}$与$S_{\delta(\tau)}$之差定义为可预报信息$PI_x(\tau)=S_{x(\tau)}-S_{\delta(\tau)}$, 其反映了系统自身不确定性与预报不确定性的差异. 引入度量系统可预报性的相对预报指数$R_x(\tau)$:

$$R_x(\tau)=\mathrm{e}^{-PI_x(\tau)/n}. \tag{4}$$

$R_x(\tau)$与$PI_x(\tau)$一样, 不依赖于系统坐标或变量量纲, 适应于多变量系统可预报性研究(DelSole, 2004; 黎爱兵等, 2014). 一般情况下, 随着预报误差的增大, $PI_x(\tau)$随时间减小, $R_x(\tau)$随时间增大, 当$PI_x(\tau)=0$, $R_x(\tau)=1$时, 系统预报结果的不确定性等于其自身不确定性, 可预报信息丢失, 系统完全不可预报, 从而可用相对预报指数达到1的时间来定量估计系统可预报期限.

利用非线性误差信息熵理论还可对系统的可预报分量进行分析. 高斯分布的信息熵$S=\frac{n}{2}\ln(2\pi\mathrm{e})+\frac{1}{2}\ln(|\sum|)$, $|\sum|$为系统协方差矩阵$\sum$的行列式. 如果$\boldsymbol{x}(\tau)$服从高斯随机分布, 由信息熵定义, $R_x(\tau)$可表示为

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2n}\frac{|\sum_\delta|}{|\sum_x|}=\frac{1}{2n}\left|\sum\nolimits_\delta\sum\nolimits_x^{-1}\right|, \tag{5}$$

其中, $\sum_\delta$和$\sum_x$分别代表$\boldsymbol{\delta}(\tau)$和$\boldsymbol{x}(\tau)$概率分布的协方差. 对$n\times n$维矩阵$\boldsymbol{\Gamma}=\sum_\delta\sum_x^{-1}$进行特征值计算或特征向量分析, 即有:

$$\mathbf{V}'\mathbf{\Gamma}\mathbf{V}=\mathbf{\Lambda}, \tag{6}$$

其中, $\mathbf{V}$为由特征向量$\mathbf{v}_i(i=1,\cdots,n)$组成的正交矩阵, $\mathbf{\Lambda}$为特征值$\lambda_i(i=1,\cdots,n)$组成的对角矩阵, 其随时间变化可反映各分量非线性误差增长快慢. 特征值越小, 对应的特征向量或误差分量增长相对较缓慢, 可预报性较高; 否则, 特征值越大, 分量增长较快, 可预报性较低. 因此, 利用系统及其预报误差协方差, 通过特征向量分析, 可获取系统可预报分量及其随时间演变规律.

3 Lorenz系统非线性误差增长及可预报分量分析

3.1 Lorenz系统

Lorenz系统方程为(Lorenz, 1963):

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sigma x+\sigma y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-xz+rx-y,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy-bz,\end{cases} \tag{7}$$

其中σ、r和b分别为Prantl数、Rayleigh数以及与对流尺度相联系的参数. 当r>24.74时, Lorenz系统处于混沌状态, 对初值极其敏感, 即使微小误差随时间演变也会逐渐放大, 直至得到完全不同的结果. 采用经典四阶Runge-Kutta方法对方程进行数值求解, 积分步长为0.01, σ=10, b=8/3. 可预报性的度量, 除考虑初始误差引起的预报结果的不确定性外, 还需考虑系统自身的不确定性, 系统自身的不确定性与外强迫作用有关. 对Lorenz系统来说, 参数r相当于外强迫作用, 不同r值反映了不同外强迫作用, 无特需说明, r=28.

3.2 非线性误差信息熵随时间演变规律

对Lorenz系统初值叠加初始误差向量(10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2}), 进行数值积分和信息熵计算. 图1给出了参数r为常数或随时间变化时, 非线性误差信息熵及系统状态信息熵随时间演变. 从该图可以看出, 当r=28取为常数时, 系统状态信息熵为常数(图1a), 其可预报性主要与初始误差有关; 当r=28+3sin(t)随时间变化时, 系统状态信息熵不再是常数而是与时间有关(图1b), 此时系统的可预报性不仅与初始误差有关, 还与外强迫有关. 因此, 对于受外强迫作用的系统, 其可预报性除了与初始误差有关外, 还需考虑系统自身不确定性影响. 但无论系统状态信息熵是否随时间变化, 非线性误差信息熵都随时间增长, 最终接近或等于系统状态信息熵. 图2为图1相应相对预报指数随时间演变图, 其综合考虑了预报误差及系统自身不确定性影响. 由该图可见, 无论系统自身的不确定性是否与时间有关, 相对预报指数随时间增长都逐渐趋于1, 其值越接近1, 可预报信息越少, 从而可用相对预报指数达到1的时间来定量估计系统可预报期限. 从图2来看, 不同外强迫作用, 可预报期限不同.

已有研究表明(丁瑞强和李建平, 2008), Lorenz系统的可预报性与初始误差大小有关, 初始误差越小, 可预报期限越长. 图3给出了初始误差为(10^{-2}, 0, 0)、(0, 10^{-2}, 0)、(0, 0, 10^{-2})时, 非线性误差信息熵随时间演变. 从该图可以看出, 虽然初始误差大小相同, 但由于其方向不同, 非线性误差的增长也存在差异, 尤其是在快速增长的初期, 三者差异明显, 其中初始时刻x方向有误差(10^{-2}, 0, 0)时, 非线性误差增长最缓慢, 其信息熵值最小, 可预报性最高, 而初始时刻y方向有误差(0, 10^{-2}, 0)时, 误差增长最快, 初始时刻z方向有误差(0, 0,

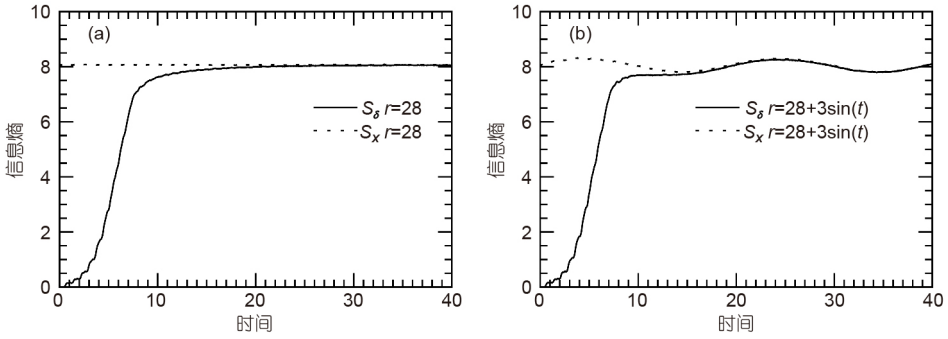


图 1 不同r作用下非线性误差信息熵$S_{\delta(\tau)}$和系统状态信息熵$S_{x(\tau)}$随时间变化

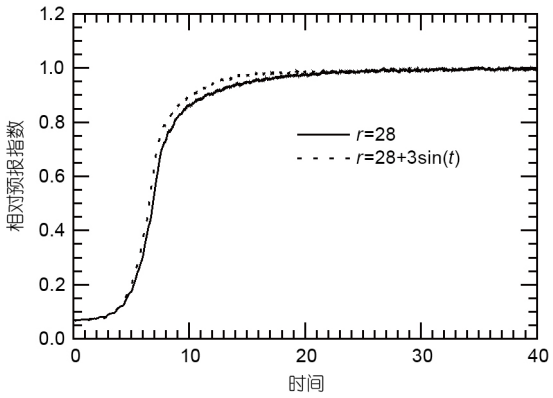


图 2　不同r作用下相对预报指数$R_x(\tau)$随时间变化

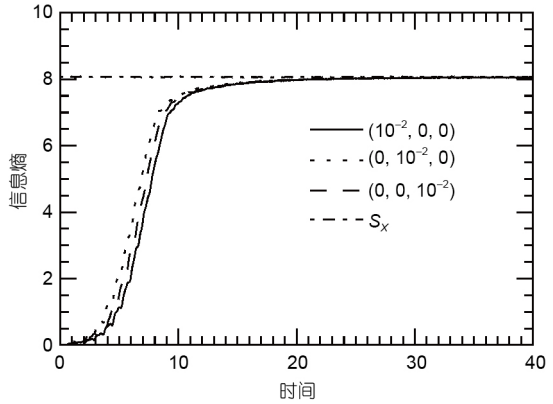


图 3　不同方向初始误差条件下非线性误差信息熵$S_{\delta(\tau)}$随时间变化

实线、点线、断线分别代表初始误差向量$(10^{-2}, 0, 0)$、$(0, 10^{-2}, 0)$、$(0, 0, 10^{-2})$; 点划线为系统状态信息熵$S_x(\tau)$

10^{-2})时, 误差增长介于两者之间. 由此可见, Lorenz系统的误差增长及可预报性不仅与初始误差大小有关外, 还与初始误差的方向有关, 即与初始误差向量的空间分布有关. 当误差进入非线性缓慢增长阶段, 对于相同大小不同方向的初始误差, 随着时间的延长及逐渐与系统状态信息熵的接近, 非线性误差信息熵之间的差异逐渐缩小, 最终都等于系统状态信息熵.

利用非线性误差信息熵还可对系统单变量的可预报性进行分析. 图4给出了Lorenz系统各单变量相对预报指数随时间演变. 从该图来看, 相同大小不同方向的初始误差向量, 单变量的非线性误差增长也存在差异, 但无论初始误差向量如何分布, 单变量z的误差增长相对缓慢, 可预报期限最长, 而x和y的可预报

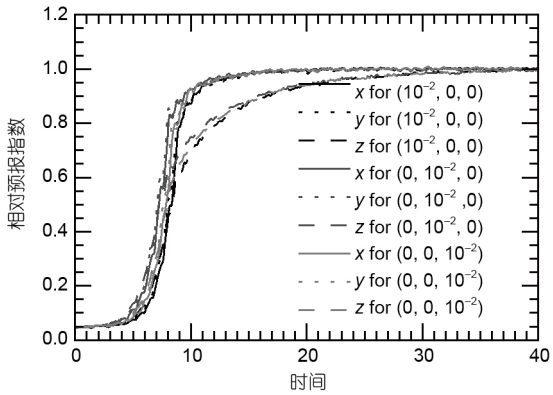


图 4　不同方向初始误差条件下各变量相对预报指数$R_{x_i}(\tau)$随时间变化

黑、深灰、浅灰色分别代表初始误差向量$(10^{-2}, 0, 0)$、$(0, 10^{-2}, 0)$、$(0, 0, 10^{-2})$; 实线、点线、断线分别代表x、y、z

性相当, 其相对预报指数都要早于z达到1.0. 对于系统单变量来说, 不同方向的初始误差, 各变量的误差随时间演变也是前期差异较大, 后期差异逐渐缩小, 从而进一步说明了Lorenz系统误差的增长也与初始误差向量的空间分布密切相关.

3.3　可预报分量分析

首先在不考虑系统自身不确定性的情况下, 利用系统各个时刻的预报误差构造协方差矩阵, 并进行特征向量分析, 特征值按从小到大排列, 分别为λ_1、λ_2和λ_3. 将各特征值与所有特征值之和的比例定义为误差贡献率. 图5和图6分别给出了各特征值及对应特征向量随时间演变. 由图5可见, 随着预报时间增长, 特征值λ_1、λ_2和λ_3都逐渐增大, 但三者的大小差异较大, 其中最大特征值λ_3是λ_2的2倍多, 是最小特征值λ_1的20多倍, 也就是说λ_3对应的特征向量在误差中所占比例最多, 贡献率最大, λ_1所占比例最小, 贡献率最小. 特征值λ_1、λ_2和λ_3随时间演变的规律也不同, 其中最小特征值λ_1和最大特征值λ_3随时间快速达到饱和, 而λ_2达到饱和的时间最长. 由此可见, 非线性误差增长的可预报性与误差特征向量(即误差分量)所占比例大小的无关, 不存在正比关系, 贡献率最大的误差分量, 可预报性不一定最高, 贡献率最小的分量, 可预报性也不一定最低. 由图6可见, 误差特征向量随时间演变可分为三个阶段, 分别为误差快速增长或线性增长阶段(时间

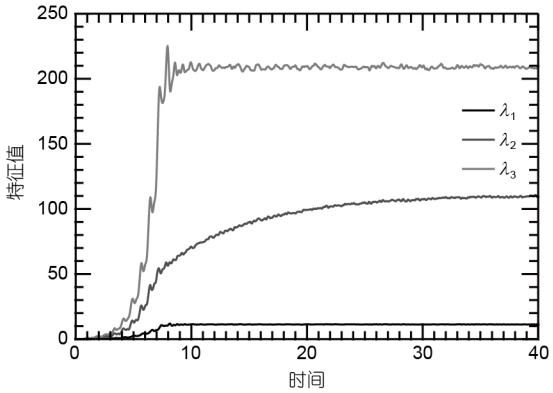


图 5　非线性误差特征值随时间变化

黑、深灰、浅灰色分别代表特征值λ_1、λ_2和λ_3

约为0~6)、非线性缓慢增长阶段(时间约为6~19)和误差饱和阶段(时间约为19~40). 对各阶段的误差矩阵求和, 并进行特征向量分析. 从结果来看, 三个阶段的特征向量都不相同, 线性增长阶段, 分量为(0.80, −0.60, 0.0)的误差增长最慢, (0.60, 0.80, 0.0)的误差增长最快, (0.0, 0.0, –1.0)的误差增长介于两者之间; 非线性增长阶段, (−0.75, 0.66, 0.0)的误差增长最慢, (0.0, 0.0, 1.0)次之, (−0.66, −0.75, 0.0)最快; 饱和阶段, 特征值从小到大的误差分别为(0.75, −0.66, 0.0)、(0.0, 0.0, −1.0)、(0.66, 0.75, 0.0), 该阶段各分量的大小与非线性增长阶段相同, 不同的是方向相反. 综合图5和图6分析可知, 可预报性与误差分量有关, 不同的分量, 可预报性不同, 其中z方向有误差的分量即(0.0, 0.0, −1.0)或(0.0, 0.0, 1.0)的贡献率非最大也非最小, 但增长相对缓慢, 可预报性最好.

在考虑系统自身不确定性影响的情况下, 进行可预报分量分析. 图7和图8分别给出了特征值及其可预报分量随时间演变. 考虑自身不确定性影响, 图7所示的特征值曲线量级相差不大, 都随时间增长逐渐趋于1.0, 其主要表示可预报性大小, 也就是说值越小, 可预报性越高. 尽管可预报分量(图8)随时间变化曲线相对图6变化较大, 但也存在三个阶段, 尤其是在误差快速增长初期, 增长最缓慢即特征值最小的误差分量x最大, y次之, z接近于0, 即有(0.87, 0.49, 0.0); 而增长最快的分量为(−0.49, 0.87, 0.0), 其中y最大; z最大的可预报分量(0.0, 0.0, −1.0)介于两者之间. 从而可说明图3中初始时刻x方向有误差的增长最缓慢, 初始时刻y方向有误差的增长最快. 对于误差非线性增长时期, 对各时段的$\boldsymbol{\Gamma}$进行求和及特征向量分解, 增长最缓慢即特征值最小的误差向量为(0.0, 0.0, 1.0), 增长最快的误差向量为(−0.48, 0.88, 0.0), 而(−0.88, −0.48, 0.0)介于两者之间. 同理, 对于饱和阶段, 特征值由小到大的可预报分量分别为(0.0, 0.0, 1.0)、(−0.52, 0.86, 0.0)、(−0.86, −0.52, 0.0), 三者特征值大小差异不大, 都接近于1.0. 由此可见, 不同时间段, 可预报分量不同, 也就是说可预报分量随时间变化. 同时, 不同时间段, 可预报分量的可预报性也不同. 从误差快速增长阶段来看, (0.0, 0.0, −1.0)或(0.0, 0.0, 1.0)即z分量误差增长及可预报性介于其他两分量之间, 从误差非线性增长至饱和阶段

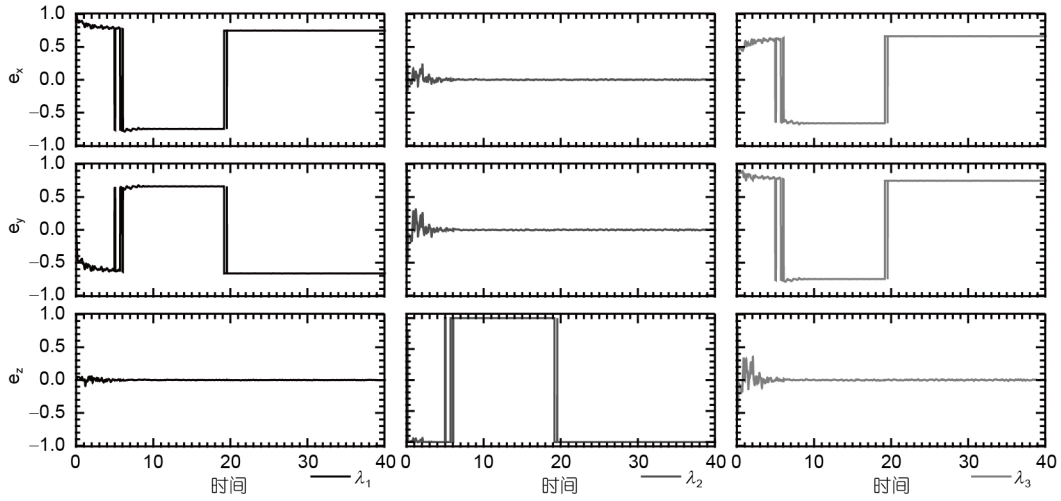


图 6　非线性误差特征向量随时间变化

黑、深灰、浅灰色分别代表λ_1、λ_2和λ_3; 从上往下分别代表x、y和z方向的分量

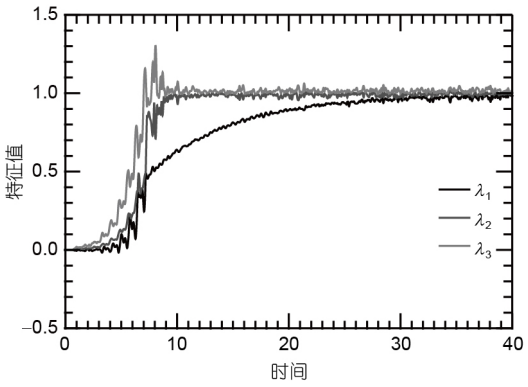


图 7　非线性误差可预报分量特征值随时间变化

来看, z分量误差增长缓慢, 其可预报性相对较好, 从而可解释单变量z的可预报期限最长.

4　结论

本文基于非线性误差信息熵理论, 研究了Lorenz系统非线性误差增长规律, 运用特征向量分析方法, 对系统的可预报分量进行了分析, 结果表明: (1)非线性误差信息熵随时间增长逐渐接近或等于系统状态信息熵, 系统可预报性定量估计需综合考虑初始误差不确定性和系统自身不确定性的影响; (2)非线性误差增长及系统可预报性, 除与初始误差大小有关外, 还与初始误差向量的空间分布有关, 即使相同大小不同方向的初始误差向量, 系统和单个变量的非线性误差增长也存在差异, 但无论初始误差如何分布, 变量z的误差增长相对缓慢, 可预报期限最长; (3)非线性误差的增长与误差分量所占比例大小无关, 误差贡献率最大的分量, 可预报性不一定最高, 贡献率最小的分量, 可预报性也不一定最低; (4)可预报性与误差分量有关, 不同的分量, 可预报性不同, 且不同时间段, 可预报分量不同, 可预报性也不同, 其中z方向有误差的分量, 在误差快速增长阶段, 可预报性介于其他两分量之间, 在非线性增长至饱和阶段, 增长相对缓慢, 可预报性最好.

大气是一个高度非线性的复杂系统, 而Lorenz系统是经典数学模型, 与实际大气还存在较大差距, 下一步我们将利用非线性误差信息熵理论对更加复杂的系统进行可预报分量分析. 此外, 本文主要从统计角度对可预报分量的演变规律进行了分析, 具体原因没有涉及, 从动力学和物理意义上来理解误差的演变规律和原因也是我们今后的工作方向.

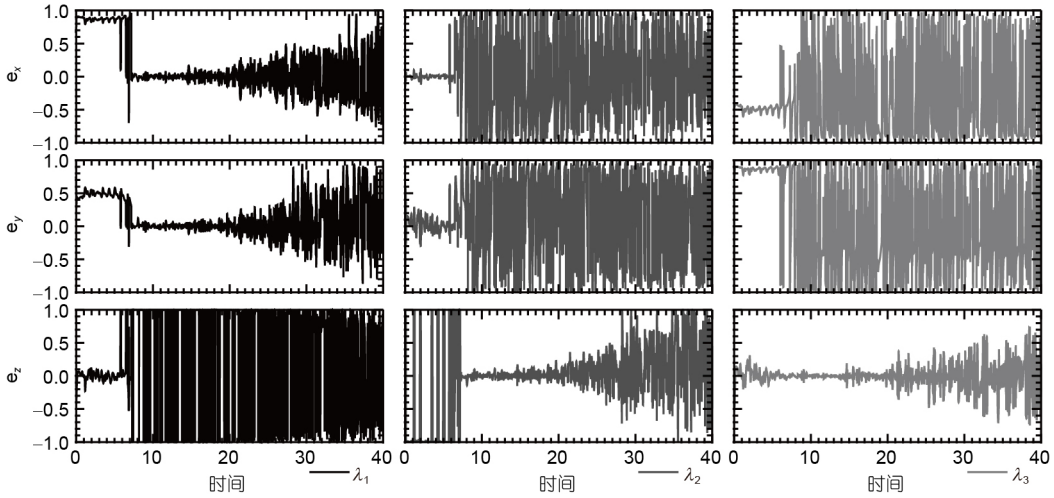


图 8　非线性误差特征向量可预报分量特征值随时间变化

致谢　感谢两位审稿专家提出的宝贵意见.

参考文献

陈宝花, 李建平, 丁瑞强. 2006. 非线性局部Lyapunov指数与大气可预报性研究. 中国科学 D辑: 地球科学, 36: 1068–1076

陈磊, 段晚锁, 徐辉. 2015. 基于奇异值分解的计算条件非线性最优扰动的集合投影算法. 中国科学: 地球科学, 45: 366–376

丑纪范, 郑志海, 孙树鹏. 2010. 10-30d延伸期数值天气预报的策略思考——直面混沌. 气象科学, 30: 569–573

丁瑞强, 李建平. 2008. 初始误差和参数误差对混沌系统可预报性影响的比较. 地球物理学报, 51: 1007–1012

丁瑞强, 李建平. 2009. 天气可预报性的时空分布. 气象学报, 67: 343–354
黎爱兵, 张立凤, 王秋良, 李波, 李振中, 王一清. 2013. 非线性误差信息熵理论及其在可预报性中的应用——以Lorenz系统为例. 中国科学: 地球科学, 43: 1518–1526
黎爱兵, 张立凤, 王秋良. 2014. 基于非线性误差信息熵理论的大气多变量系统可预报性分析. 中国科学: 地球科学, 44: 1544–1555
李建平, 丁瑞强. 2008. 短期气候可预报期限的时空分布. 大气科学, 32: 975–986
刘德强, 丁瑞强, 李建平, 冯杰. 2015. 非线性局部Lyapunov指数在目标观测中的应用初探. 大气科学, 39: 329–337
穆穆, 段晚锁. 2003. ENSO可预报性研究的一个新方法: 条件非线性最优扰动. 科学通报, 48: 747–749
穆穆, 王洪利, 周菲凡. 2013. 条件非线性最优扰动方法在可预报性研究中的应用. 大气科学, 37: 281–296
王启光, 封国林, 郑志海, 支蓉, 丑纪范. 2012. 基于Lorenz系统提取数值模式可预报分量的初步试验. 大气科学, 36: 539–550
王启光, 丑纪范, 封国林. 2014. 数值模式延伸期可预报分量提取及预报技术研究. 中国科学: 地球科学, 44: 343–354
郑志海, 封国林, 黄建平, 任宏利. 2009. 基于季节气候可预报分量的相似误差订正和数值试验. 物理学报, 58: 7359–7367
郑志海, 封国林, 黄建平, 丑纪范. 2012. 基于延伸期可预报性得集合预报方法和数值试验. 物理学报, 61: 199203–199203
郑志海, 黄建平, 封国林, 丑纪范. 2013. 延伸期可预报分量的预报方案和策略. 中国科学: 地球科学, 43: 594–605
周菲凡, 张贺. 2014. 基于CNOP方法的台风目标观测中三种敏感区确定方案的比较研究. 大气科学, 38: 261–272
Abramov R, Majda A, Kleeman R. 2005. Information theory and predictability for low-frequency variability. J Atmos Sci, 62: 65–87
DelSole T. 2004. Predictability and information theory. Part I: Measure of predictability. J Atmos Sci, 61: 2425–2440
Delsole T, Tippett M K. 2007. Predictability: Recent insights from information theory. Rev Geophys, 45: RG4002
Delsole T, Tippett M K. 2008. Predictable components and singular vectors. J Atmos Sci, 65: 1666–1678
DelSole T, Tippett M K. 2009a. Average predictability time. Part I: Theory. J Atmos Sci, 66: 1172–1187
DelSole T, Tippett M K. 2009b. Average predictability time. Part II: Seamless diagnosis of predictability on multiple time scales. J Atmos Sci, 66: 1188–1204
Delsole T, Tippett M K, Shukla J. 2011. A significant component of unforced multidecadal variability in the recent acceleration of global warming. J Clim, 24: 909–926
Ding R Q, Li J P, Ha K J. 2008. Nonlinear local Lyapunov exponent and quantification of local predictability. Chin Phys Lett, 25: 1919–1922
Ding R, Li J, Seo K H. 2011. Estimate of the predictability of boreal summer and winter intraseasonal oscillations from observations. Mon Wea Rev, 139: 2421–2438
Duan W S, Mu M. 2009. Conditional nonlinear optimal perturbation: Applications to stability, sensitivity, and predictability. Sci China Ser D-Earth Sci, 52: 883–906
Duan W S, Zhang R. 2010. Is model parameter error related to spring predictability barrier for El Nino events? Adv Atmos Sci, 27: 1003–1013
Duan W S, Yu Y S, Xu H, Xu H, Zhao P. 2012. Behaviors of nonlinearities modulating El Nino events induced by optimal precursory disturbance. Clim Dyn, 40: 1339–1413
Duan W, Wei C. 2013. The 'spring predictability barrier' for ENSO predictions and its possible mechanism: results from a fully coupled model. Int J Climatol, 33: 1280–1292
Jia L, Delsole T. 2011. Diagnosis of multiyear predictability on continental scales. J Clim, 24: 5108–5124
Li J, Ding R. 2011. Temporal–spatial distribution of atmospheric predictability limit by local dynamical analogs. Mon Wea Rev, 139: 3265–3283
Li J P, Ding R Q. 2013. Temporal-spatial distribution of the predictability limit of monthly sea surface temperature in the global oceans. Int J Climatol, 33: 1936–1947
Lorenz E N. 1963. Deterministic Nonperiodic Flow. J Atmos Sci, 20: 130–141
Mu M, Duan W, Wang Q, Wang Q, Zhang R. 2010. An extension of conditional nonlinear optimal perturbation approach and its applications. Nonlinear Process Geophys, 12: 211–220
Mu M, Jiang Z N. 2008. A new approach to the generation of initial perturbations for ensemble prediction: Condition nonlinear optimal perturbation. Chin Sci Bull, 53: 2062–2068
Mu M, Zhou F F, Wang H L. 2009. A method to identify the sensitive areas in targeting for tropical cyclone prediction: Conditional nonlinear optimal perturbation. Mon Weather Rev 2009, 137: 1623—1639
Schneider T, Griffies S M. 1999. A conceptual framework for predictability studies. J Clim, 12: 3133–3155