中国科学: 地球科学 2011 年 第 41 卷 第 12 期: 1751 ~ 1761
www.scichina.com earth.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

一个改进的简单雪盖-大气-土壤传输模式

刘辉志[①*], 翟晓东[①②], 孙菽芬[③], 冯健武[①②], 王雷[①②]

① 中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室, 北京 100029;
② 中国科学院研究生院, 北京 100049;
③ 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029
* E-mail: huizhil@mail.iap.ac.cn

收稿日期: 2010-11-04; 接受日期: 2011-03-02
国家自然科学基金重点项目(批准号: 41030106)和全球变化国家重大科学研究计划(编号: 2010CB951801)资助

摘要 本文基于 Sun 等 1999 年发展的一个简单雪盖-大气-土壤传输模式(SAST), 改进了其雪盖的分层, 提出了新的模式数值求解方法. 改进后的新模型使用温度和雪层内的冰质量作为预报变量, 在雪层处于冻结和融化状态时, 有效地求解雪层温度分布和冻融过程, 减少迭代次数, 节省计算时间并提高其计算精度. 新模型采用 7 层分层方法来代替旧 SAST 模型 3 层分层方法, 在厚雪情况下 3 层分层方法过于简单. 通过与 5 个前苏联站点观测数据的比较, 新模式的模拟结果与大部分站点的观测值符合得较好. 而当雪层较厚时, 7 层分层的模拟情况要好于 3 层分层. 在 Khabarovsk 站, 雪被强风吹走造成的差异以及土壤性质的差异, 可能对模拟值与观测值的差别造成重要影响. 在 Tulun 站, 模拟结果的差异主要出现在雪盖厚度上, 而对雪水当量的模拟情况与观测值实际吻合得很好. 在对雪盖的生命期和积雪完全融化时间的模拟上面, 从春季雪盖融化的趋势来看, 新模式消融期和消融结束时间的模拟和实际观测符合得较好, 并且 7 层分层结果要好于 3 层分层. 在运算效率方面, 新的 3 层模型比旧 SAST 模型运行时间要缩短 20%. 而由于 7 层分层方案有更多层来处理, 它运行的速度与旧 SAST 相同, 但更准确. 考虑强风及改进雪面反照率参数化方案将是今后改进本雪盖模式的主要方向.

关键词
雪盖-大气-土壤传输模式
雪盖厚度
雪水当量
雪盖生命周期

冰雪覆盖的时空变化对于大气过程及陆地水文循环具有极重要的影响. 关于冰雪圈与气候的相互作用, 有许多学者进行了分析研究[1]. 观测和模式研究结果表明积雪对陆面和大气过程有着重要的影响[2~6]. 作为气候系统的重要组成部分, 积雪影响着陆面和大气层之间水分和能量的交换. 积雪是水文循环的重要组成部分, 因为它在冬季贮存水量并在春季释放水量. 积雪融化的速度和时机极大地影响河流流量以及在春季流量高峰的出现时间. 雪盖对大气边界层状况也有极大的影响. 从地表反照率看, 土壤的反照率一般在 10%~25%, 而新雪的反照率可以达到 75%~90%. 由于积雪表面太阳短波辐射的反

英文引用格式: Liu H Z, Zhai X D, Sun S F, et al. An improved simple snow-atmosphere-soil transfer model. Sci China Earth Sci, 2011, doi: 10.1007/s11430-011-4328-5

照率很高, 当地面有积雪的时候, 很大一部分的短波辐射将被反射掉, 降低了地表面的能量输入, 从而影响到地表能量平衡.

因此, 发展较好刻画雪盖物理过程的雪盖模式将有助于对气候变化和水文循环的研究. 目前在许多大气环流模式中, 雪盖部分的考虑往往比较简单. 大气模式中对于积雪的堆积、升华和融雪过程仅仅基于表面温度和表面能量平衡, 雪盖内部雪水流动过程常常不予考虑; 而雪密度由于积雪的压实作用引起的变化也常被忽略, 如密度设置为常数等. 因此雪盖在垂直方向上的非均匀性没有得到很好的考虑, 而这些特性和过程在准确描述雪盖的季节变化特征以及雪盖与土壤和大气的相互作用方面起着重要的影响.

对于雪盖, 大多数陆面过程模式对积雪过程的处理过于简单[7], 仅用简单的质量平衡方程来描述雪深, 对雪盖和土壤的热力性质的差异并不区分. 这些模式忽略了许多重要的物理过程, 大多数早期 GCM 的陆面过程中就采用这类雪盖模式(第一类). 为了描述雪盖内部的质量、能量平衡以及雪面与其上空大气的相互作用, 第二类雪盖模式是以基本物理规律为基础的模式, 详尽地模拟雪盖内部水的三相转化、雪内水的运动、积雪压实、雪粒增长等物理过程, 考虑了雪盖内部质量及能量平衡以及雪盖表面与其上大气的相互作用[8~10]. 这类模式分层多而细, 计算量庞大, 不能直接用于气候研究. 第三类雪盖模式就是在该类模式基础上发展起来能够用于 GCM 的雪盖模式. 这类模式仍包括了第二类模式中重要而本质的物理过程,但采用相对简单的参数化方案描述[11,12]. 这一类模式相比另外两类来说更能满足气候模式中简单省时的需要, 此类模式目前在以下几个方面仍然存在需要改进的地方: (1) 目前各类雪盖模式对雪盖基本特征的模拟存在较大的差异. 这主要是由于模式中采用了不同的表面能量参数化方案(湍流、反照率), 造成雪水当量模拟结果的差异[13], 寻求合理的表面能量参数化方案仍是改进雪盖模式重要环节. (2) 雪盖模式中雪盖融化过程的准确描述也是十分重要. 当雪盖发生融化时, 目前常用的雪盖模式模拟的雪水当量和雪盖持续时间差异较大. 这除了与表面能量参数化方案设计有关, 也可能与方程组数值求解方法的计算方案有关. 计算方法的改进也是雪盖模式改进的关键问题之一. (3) 当雪盖厚度变薄时, 雪盖覆盖度的准确估计是十分关键的. 由于雪与裸土反照率有很大的差别, 不同的覆盖度估计会对表面能量平衡带来很大差别, 同样会影响雪盖融化的快慢和雪盖持续生存时间, 对地气交换带来较大的影响.

Sun 等[12]发展了一个简单雪盖-大气-土壤传输模式(a simple snow-atmosphere-soil transfer model, 简称为 SAST). 该模式主要考虑了固态冰相和液态水相以及它们转换对质量和能量的贡献, 同时考虑了简单水汽相等对热传导系数的影响. 模式中雪盖分了三层, 顶部两层集中在雪盖上部变化较大的部分, 余下的为第三层. SAST 模式包括: 质量平衡方程、能量平衡方程和雪盖密度变化方程, 用来描述雪盖各层的温度、厚度(密度)和雪水当量, 预测雪盖表面与大气间物质-能量交换和产生的径流等.

SAST 模型虽取得了一定的成效, 但仍有一些问题有待加以改进, 主要表现在: 1) 限于当时计算机能力, 模型将雪盖分为不超过 3 层的雪层. 雪盖分层的数量比较少, 而更多的分层数将提高模式的运算精度. 2) 在 SAST 中, 当雪盖分层大于一层的时候, SAST 算法要求从上而下对每一层分别一层一层地计算. 由于各层温度是从上而下逐层计算的, 上层在计算的时候需要使用下层还待求的值, 这就需要更多的迭代步骤达到平衡后才能得出温度等物理量. 此算法需要较高的时间成本, 其运算精度也会受到影响.

本文基于 SAST 模式, 提出了一个改进的简单雪盖-大气-土壤传输模式(an improved simple snow-atmosphere-soil transfer model, 简称为 ISAST), 并利用 5 个俄罗斯站点的积雪数据对 ISAST 模式进行了测试. 与原 SAST 模式相比, ISAST 模式所做的改进主要有三点: 第一, 使用温度和雪层内的冰质量作为预报变量, 提出了一种新的数值求值方法; 第二, 限于当时的计算机能力, 原 SAST 模式将雪盖分为三层, 而 ISAST 模式的雪盖分层则更加灵活, 对于厚雪, 七层的分层方法模拟能力更好; 第三, 原 SAST 模式中, 各雪层温度是自上而下逐层计算的, 在计算上层温度的时候需要使用下层待求的温度值, 这就需要更多的迭代步骤达到平衡后才能得出雪层温度等物理量, 因此运算效率较低, 模拟精度也会受到影响, 而在 ISAST 模式中, 当雪盖处于冻结状态时, 通过三对角矩阵一次求解所有雪层温度, 提高了运算效率和模拟精度.

1　ISAST 模式介绍

1.1　基本控制方程

1.1.1　质量平衡方程

质量平衡方程描述了雪盖的雪水当量的变化情况, 包括液态水和冰的变化. 表层和其他层的质量变化分别由以下两个方程给出:

$$\frac{\partial m_j}{\partial t} = \rho_l V_{\mathrm{inf},j} - \rho_l V_{i,j} - E_j, \tag{1}$$

其中 m_j (kg m^{-2})为雪盖第 j 层积雪的雪水当量, ρ_l 为液态水的密度, $V_{\mathrm{inf},j}$ (kg m^{-2} s^{-1})为第 j 层液态水的入渗速率, $V_{i,j}$ (kg m^{-2} s^{-1})为雪盖第 j 层液态水流出速率, E_j (kg m^{-2} s^{-1})是雪盖第 j 层的水分蒸发率(表层的 $E_{sn} \neq 0$, 表层以下的各层的蒸发量为 E_j=0, j=1 到 sn–1, 其中下标 sn 代表雪盖表层). 上述公式中, 假定水汽相变和扩散对质量方程的贡献不重要而被忽略[12].

在积雪变化的过程中, 有三个过程会影响质量, 即液态水的流动、入渗和蒸发. 在将雪盖总质量分为冰质量和液态水质量后, 质量平衡方程(1)式可写为

$$m_j^k = m_{i,j}^k + m_{l,j}^k = m_j^{k-1} + \Delta t \rho_l V_{\mathrm{inf},j}^k - \Delta t \rho_l V_{l,j}^k - \Delta t E_j^k, \tag{2}$$

其中 m_j^k, $m_{i,j}^k$, $m_{l,j}^k$ 分别是 k 时刻雪盖第 j 层的总质量、冰质量和水质量, m_j^{k-1} 为 k–1 时刻雪盖第 j 层的总质量, $\Delta t \rho_l V_{\mathrm{inf},j}^k$ 为液态水的流进量, $\Delta t \rho_l V_{l,j}^k$ 为液态水的流出量, E_j^k 为每层蒸发量, 上标 k 为时间步长序列号.

1.1.2　能量平衡方程

单位体积雪的热焓(H)因为冰的热传导、太阳辐射的穿透以及融化水的流动而变化, 可用下式表述:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z} - R_s - \rho_l T V C_l \right), \tag{3}$$

其中 H 为雪层的焓, k(W m^{-1} K^{-1})为有效热传导率, T 为雪层的温度, R_s(J m^{-2} s^{-1})为短波通量, z(m)为离雪表面的垂直深度.

热焓 H 由下式定义:

$$H_j^k = (m_{i,j}^k c_i + m_{l,j}^k c_l)T - m_{i,j}^k L_{li}, \tag{4}$$

其中 H_j^k 为 k 时刻雪盖第 j 层的热焓, c_i(J kg^{-1} K^{-1})为冰的定容比热, c_l(J kg^{-1} K^{-1})为水的定容比热, L_{li}(J kg^{-1})为冰的溶解热. 在能量平衡方程中, 水在 0℃的焓被定义为 0. 因此, 雪层内部的水从上层流向下层时由于温度为 0℃, 焓始终为 0, 这使得能量平衡方程得以简化.

1.2　几个基本参数的确定

1.2.1　积雪压实率

降雪到达地面之后会迅速改变形状, 而且由于重力效应和融化过程的影响会持续变形, 因此积雪的压实过程可以分为三部分: 新雪的破坏性变形、积雪的重力压实和融雪过程.

对于新雪破坏性变形的变化率, 采用 Anderson[8] 建议的经验公式:

$$CR1 = \left| \frac{1}{\Delta z}\frac{\partial \Delta z}{\partial t} \right| = -2.778\times10^{-6} \cdot C_3 C_4 \mathrm{e}^{-0.04(273.15-T)}, \tag{5}$$

当 γ_i=0 且 γ_i≤150 kg m^{-3} 时 C_3=C_4=1; 当 γ_i≤150 kg m^{-3} 时, C_3=exp(–0.046(γ_i–150)); 当 γ_i=0 时, C_4=2. 其中 Δz(m)为雪层厚度, γ_i(kg m^{-3})为冰的分密度, γ_l(kg m^{-3})为液态水的分密度.

对于积雪的重力压实阶段, 压实率[8]可表示为

$$CR2 = \left| \frac{1}{\Delta z}\frac{\partial \Delta z}{\partial t} \right|_{\mathrm{overburden}} = -\frac{P_s}{\eta_0}\mathrm{e}^{-C_5(273.15-T)}\mathrm{e}^{-C_6\rho_s}, \tag{6}$$

其中, η_0=3.6×10^{-6} N s m^{-2}, C_5=0.08 K^{-1}, C_6=0.031 m^3 kg^{-1}, P_s(N m^{-2})为积雪负载的压力, ρ_s (kg m^{-3})为积雪的密度.

融雪过程也会造成雪盖厚度的变化, 变化率的估计值为

$$CR3 = \begin{cases} -\dfrac{meltrate}{\gamma_i \Delta z}, & \gamma_i < 250 \text{ kg m}^{-3}, \\ 0, & \gamma_i \geqslant 250 \text{ kg m}^{-3}, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $meltrate$ 为该层雪盖融化的干雪质量, $\gamma_i \Delta z$ 表示该层总质量.

雪层中总的压实率是上述三个过程的总和:

$$CR = CR1 + CR2 + CR3. \tag{8}$$

由重力压实过程造成的雪盖密度变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\rho_s}{\rho_s \mathrm{d}t} = -(CR1 + CR2). \tag{9}$$

1.2.2　积雪表面反照率

雪盖的表面反照率是决定雪盖能量平衡的重要因子, 它不仅依赖于雪盖的物理结构、成分等因子, 还依赖于云量、太阳高度角等因素.

考虑到积雪反照率(α)与云量和太阳高度角的关系, 我们的模式中, 采用 Siemer[14]提出的公式来计算积雪反照率:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_0^3(1-\alpha_0)\cdot f(N,\Theta), \tag{10}$$

其中α_0 是晴空反照率, 由一个随时间递减的函数来参数化. 初始的晴空反照率α_0取为 0.78, 每厘米新降雪使反照率增加 0.01.

当雪深大于 25 cm 时,

$$\alpha_0(t) = 0.5 + \left[\alpha_0(t-\Delta t) - 0.5\right]\cdot\exp(-0.01\Delta t/3600).$$

当雪深小于 25 cm 且温度低于 0℃时,

$$\alpha_0(t) = \alpha_0(t-\Delta t) - (0.0061/86400)\Delta t.$$

当雪深小于 25 cm 且温度高于 0℃时,

$$\alpha_0(t) = \alpha_0(t-\Delta t) - (0.071/86400)\Delta t. \tag{11}$$

$f(N,\Theta)$ 由(12)式计算, 即

$$f(N,\Theta) = N^2 + \exp(1-(1-\sin^2\Theta)) + 1.3N^2\exp(1-(1-\sin^2\Theta)). \tag{12}$$

其中 N 表示云量, Θ是太阳高度.

1.2.3 雪盖表层的通量

(ⅰ) 太阳短波辐射. 留在雪层中的短波辐射 R_s(W m^{-2})由下式计算:

$$R_s = R_s^u - R_s^d, \tag{13}$$

其中 R_s^u 为雪层上表面的短波辐射, R_s^d 为雪层下表面的短波辐射.

对于雪盖表层来说, 有下面的关系:

$$R_{s,u}^n = R_{s,vis}^{\downarrow}(1-\alpha_{SN,vis}) + R_{s,nir}^{\downarrow}(1-\alpha_{SN,nir}), \tag{14}$$

$$R_{s,d}^n = R_{s,vis}^{\downarrow}(1-\alpha_{SN,vis})\mathrm{e}^{-\beta_{vis}\Delta z_{sn}}. \tag{15}$$

其中 $R_{s,vis}^{\downarrow}$ 为可见光部分短波辐射, $\alpha_{SN,vis}$ 为可见光部分的地表反照率, $R_{s,nir}^{\downarrow}$ 为近红外部分的短波辐射, $\alpha_{SN,nir}$ 为近红外部分的地表反照率, β_{vis} 为短波辐射在该雪层中传输的衰减系数, Δz_{SN} 为雪盖表层的厚度.

对于雪盖表层以下的各层来说, 上下表面的短波辐射可由下式计算:

$$R_{s,u}^j = R_{s,d}^{j+1}, \tag{16}$$

$$R_{s,d}^j = R_{s,u}^j e^{-\beta_{vis}\Delta z_j}, \tag{17}$$

其中 $R_{s,d}^{j+1}$ (W m^{-2})为上一层的下表面的短波辐射, Δz_j(m)为该雪层的厚度.

(ⅱ) 净长波辐射. 净长波辐射包括两部分, 向下长波辐射和向上长波辐射, 其计算方法为

$$L_{\mathrm{net}} = \varepsilon[I_r^{\downarrow} - \sigma(T_{sn}^k + 273.15)^4]. \tag{18}$$

其中 L_{net}(W m^{-2})净长波辐射, $I_r^{\downarrow}$ (W m^{-2})为向下长波辐射, σ(5.669×10^{-8} W m^{-2} K^{-4})为 Stevan-Boltzmann 常数, T_{sn}^k 为雪盖表层的温度, ε 是长波反射率.

(iii) 感热和潜热通量. 雪盖的感热通量和潜热通量的定义[8]为

$$I_{sen} = (E_{H0} + \rho_{\mathrm{air}}C_{\mathrm{air}}C_H w)(T_{\mathrm{air}} - T_{sn}^k), \tag{19}$$

$$I_{lat} = \frac{P}{0.622}\left(E_{E0} + \frac{100L_{vi}}{R_w T_{\mathrm{air}}}C_E w\right)(q_{v,\mathrm{air}} - f_{rh}q_{vk,sat}T_{sn}), \tag{20}$$

其中 I_{sen}(W m^{-2})为感热通量, E_{H0} 为雪面无风对流系数(2.0 W m^{-2} K^{-1}), ρ_{air}(kg m^{-3})为空气密度, C_{air}(J kg^{-1} K^{-1})为空气定压比热, C_H 为感热总体传输系数, w(m s^{-1})为风速, T_{air}(℃)为空气温度, T_{sn}^k 为雪盖表层的温度, I_{lat}(W m^{-2})为潜热通量, P(mb)为气压, E_{E0} 为雪面无风对流系数(2.0 W m^{-2} mb^{-1}), L_{vi} 为冰的升华潜热, R_w 为水汽气体常数(461.296 J kg^{-1} K^{-1}), C_E 为潜热总体传输系数, $q_{vk,sat}(T_{sn})$为雪表面饱和比湿, $q_{vk,\mathrm{air}}$ 为空气比湿, f_{rh} 为空气内相对于与饱和状态的比湿. 在雪盖内部, 假设水汽处于饱和状态, f_{rh}=1.

1.3 雪盖的状态方程

1.3.1 雪盖表层的情况

对于雪盖表层, 有薄层能量平衡关系为: 热传导量=向下长波辐射−长波辐射−感热通量−潜热通量−蒸发带走能量, 即

$$K\frac{\partial T}{\partial z} = L_{net} - I_{sen,sn} - I_{lat,sn} - E_{sn}^k c_v T_{sn}^k. \tag{21}$$

将(4), (13), (18)~(21)式代入(3)式, 得到雪盖表层的状态方程:

$$\begin{aligned}&(m_{i,j}^k c_i + m_{l,j}^k c_l)T_{sn}^k - m_{i,j}^k L_{li} + \Delta t E_{sn}^k c_v T_{sn}^k + \Delta t\rho_l C_l V_{l,sn}^k T_{sn}^k \\ &= H_{sn}^{k-1} + \Delta t\cdot[R_{s,u}^n - R_{s,d}^n + \varepsilon(I_r^{\downarrow} - \sigma(T_{sn}+273.15)^4) \\ &\quad - q_k^{n-1/2}(T_{sn}^k - T_{sn-1}^k) + q^{sea}(T_{air} - T_{sn}^k) + qlat^*(q_{v,\mathrm{air}} \\ &\quad - f_{rh}q_{vk,sat}T_{sn}) + \rho_l C_l V_{\mathrm{inf},sn}T_{prec}],\end{aligned} \tag{22}$$

其中下标 sn 为表层的序列号, n−1/2 为第 n 层的下边界面位置, $qlat^*$ 为潜热对应的交换系数, 即

$$qlat^* = \frac{P}{0.622}\left(E_{E0} + \frac{100L_{vi}}{R_w T_{\text{air}}} C_E w\right).$$

(ⅰ) 雪盖表层冻结时的情况. 如果表层冻结不融化, 液态水的流出量为 0, 即 $\Delta t \rho_l V_{l,j}^k = 0$, 进行迭代求解, 详见网络版附录 A(http://earth.scichina.com).

(ⅱ) 雪盖表层融化时的情况. 如果表层融化, 则雪盖表层的温度为 0℃, 即 $T_{sn}^k = 0℃$, 代入(22)式可得

$$\begin{aligned}&-m_{i,sn}^k L_{li} = H_{sn}^{k-1} + \Delta t \cdot [R_{s,u}^n - R_{s,d}^n + \varepsilon(I_{sn,r}^{\downarrow}\\&-\sigma \cdot 273.15^4) + q_k^{n-1/2} T_{sn-1}^k\\&+q^{sea} T_{\text{air}} + qlat^*(q_{v,\text{air}} - f_{rh} q_{vk,sat}(0)) + \rho_l C_l V_{\text{inf},sn} T_{prec}]. \quad (23)\end{aligned}$$

迭代求解时, 假定 $T_{sn-1}^k = T_{sn-1}^{k,m-1}$, 则由(23)式可求解表层剩余冰质量.

1.3.2 雪盖表层以下各层的情况

与雪盖表层的能量平衡方程相比, 对于表层以下各层结, 能量平衡方程缺少了长波辐射项和潜热通量项, 又因为雪盖内部流动的液态水 $T_j^k \equiv 0$, 因此雪盖表层以下各层的能量平衡方程为

$$\begin{aligned}&H_j^k = H_j^{k-1} + \Delta t \cdot [R_{s,u}^j - R_{s,d}^j + q_{j+1/2}^k (T_{j+1}^k - T_j^k)\\&-q_{j-1/2}^k (T_j^k - T_{j-1}^k)] + deltah_{j+1\to j}. \quad (24)\end{aligned}$$

其中 $deltah_{j+1\to j}$ 为上层融化后流入本层的能量.

将(4)式代入(24)式, 得到雪盖表层以下各层的状态方程:

$$\begin{aligned}&(m_{i,j}^k c_i + m_{l,j}^k c_l) T - m_{i,j}^k L_{li} = H_j^{k-1} + \Delta t \cdot [R_{s,u}^j - R_{s,d}^j\\&+q_{j+1/2}^k (T_{j+1}^k - T_j^k) - q_{j-1/2}^k (T_j^k - T_{j-1}^k)] + deltah_{j+1\to j}. \quad (25)\end{aligned}$$

(ⅰ) 雪层冻结时的方程. 雪层冻结时, 本层结没有液态水 ($m_{l,j}^k = 0$), 因此向下的水流为 0 ($\Delta t \rho_l V_{l,j}^k = 0$, 并且没有蒸发 ($\Delta t E_j^k = 0$), 因此(2)式可写为

$$m_j^k = m_{i,j}^k = m_j^{k-1} + \Delta t \rho_l V_{\text{inf},j}^k. \quad (26)$$

将上式代入(25)式, 并将含有温度的项移到左边, 可得雪层冻结时的状态方程:

$$\begin{aligned}&(m_j^{k-1} c_i + \Delta t \rho_l c_i V_{\text{inf},j}^k + q_{j+1/2}^k \Delta t + q_{j-1/2}^k \Delta t) T_j^k\\&-q_{j+1/2}^k T_{j+1}^k \Delta t - q_{j-1/2}^k T_{j-1}^k \Delta t = H_j^{k-1}\\&+(m_j^{k-1} + \Delta t \rho_l V_{\text{inf},j}^k) L_{li} + \Delta t (R_{s,u}^j - R_{s,d}^j) + deltah_{j+1\to j}. \quad (27)\end{aligned}$$

其中 $deltah_{j+1\to j}$ 为上层融化后流入本层的能量.

(ⅱ) 雪层融化时的方程. 雪层处于融化状态时, $T_j^k = 0$, 代入(25)式, 可得

$$\begin{aligned}&-m_{i,j}^k L_{li} = H_j^{k-1} + \Delta t (R_{s,u}^j - R_{s,d}^j + q_{j+1/2}^k T_{j+1}^k\\&+q_{j-1/2}^k T_{j-1}^k) + deltah_{j+1\to j}. \quad (28)\end{aligned}$$

其中等式右边上层温度 T_{j+1}^k 已知, T_{j-1}^k 采用上一迭代步的温度, 由此式可求解融化层结的冰质量.

(ⅲ) 雪层为最底层时的情况. 当所求解层结为最底层时, 因为最底层下面是土壤, $T_{j-1}^k = T_0^k = T_{\text{soil}}^k$, 土壤温度为已知量. 因此, 当冰层冻结时, 根据(27)式, 可得

$$\begin{aligned}&(m_j^{k-1} c_i + \Delta t \rho_l c_i V_{\text{inf},j}^k + q_{j+1/2}^k \Delta t + q_{j-1/2}^k \Delta t) T_j^k\\&-q_{j+1/2}^k T_{j+1}^k \Delta t = H_j^{k-1} + (m_j^{k-1} + \Delta t \rho_l V_{\text{inf},j}^k) L_{li}\\&+\Delta t (R_{s,u}^j - R_{s,d}^j) + q_{j-1/2}^k T_{\text{soil}}^k \Delta t + deltah_{2\to 1}. \quad (29)\end{aligned}$$

当最底层融化时, 根据(28)式, 可得

$$\begin{aligned}&-m_{i,j}^k L_{li} = H_j^{k-1} + \Delta t (R_{s,u}^j - R_{s,d}^j + q_{j+1/2}^k T_{j+1}^k\\&+q_{j-1/2}^k T_{\text{soil}}^k) + deltah_{2\to 1}. \quad (30)\end{aligned}$$

其中等式右边 T_{j+1}^k 以及 T_{soil}^k 已知.

1.4 雪盖分层方法

在本文中, 为了更好与旧的 SAST 模式比较, ISAST 模式选择了两种雪盖分层的方法: 一种将雪盖分为三层(ISAST3), 一种将雪盖分为七层(ISAST7). ISAST3 模式的分层方法与 SAST 模式相同, 详细介绍见文献[12]. ISAST7 模式中, 首先由雪盖厚度来确定层数, 然后由上而下的逐层确定每层的厚度, 并且下一层的厚度是上一层厚度的两倍. 两种雪盖分层的方法都是基于这样的物理事实: 越靠上面的雪层中(如表层)物理量的变化都越大, 而越靠下的雪层(如底层)无论在时间上还是在垂直分布上都更稳定均一.

假设 d 为雪盖厚度, n 为雪盖所分的层数. ISAST3 模式具体的分层设置如下:

当 d<0.0001 m 时, n=0;

当 0.0001 m<d<0.03 m 时, n=1;

当 0.03 m<d<0.06 m 时, n=2;

当 d>0.06 m 时, n=3.

ISAST7 模式具体的分层设置如下:

当 d<0.0001 m 时, n=0;

当 0.0001 m<d<0.03 m 时, n=1;

当 0.03 m<d<0.06 m 时, n=2;

当 0.06 m<d<0.14 m 时, n=3;

当 0.14 m<d<0.30 m 时, n=4;

当 0.30 m<d<0.62 m 时, n=5;

当 0.62 m<d<1.26 m 时, n=6;

当 d>1.26 m 时, n=7.

2 站点及数据介绍

我们选用了前苏联五个站点从 1978~1983 年的观测数据来评估模式模拟的效果, 这些数据的特点是质量较高, 连续性好, 地理分布较广. 这五个站点分别为 Khabarovsk 站(48.5°N, 135.2°E), Ogurtsovo 站(54.9°N, 82.9°E), Tulun 站(54.6°N, 100.6°E), Uralsk 站(51.3°N, 51.4°E)和 Yeshov 站(51.4°N, 48.3°E). 每一个站下垫面均为草地, 观测场均大于 1 英亩(约 4047 m^2). 雪盖厚度和雪水当量在有积雪的冬季月份的 8, 18 和 28 日进行测量. 用于驱动模式的数据, 每天观测 8 次, 时间间隔 3 h. 这些观测站点和数据的详细信息可见 Robock 等[15]和 Yang 等[16]. 另外, ISAST 模式中, 使用了 Li 等[17]的冻土模式来提供土壤的边界条件.

3 结果分析

图 1 是 Uralsk 站点 ISAST7, ISAST3 和 SAST 的模拟结果与观测数据的比较, 比较的物理量为雪盖厚度和雪水当量. 1978~1983 年, Uralsk 站点实测的雪盖厚度大致不超过 30 cm, 在 ISAST7 模式中, 厚度不超过 30 cm 的雪盖最多分为四层, 与三层分法所分雪层差别不大; 当雪盖厚度小于 20 cm 时, ISAST7 和 ISAST3 对雪盖的分层结果相同. 因此, 在 Uralsk 站点, ISAST7 与 ISAST3 模拟的雪盖厚度和雪水当量差别很小. 与 ISAST 模式相比, SAST 模式未能较好的对雪盖进行模拟, 尤其是对雪水当量的模拟, 例如 1982~1983 年的雪季. 另一方面, ISAST 对模式的改进还体现在运算效率的提高. 例如 Uralsk 站点 1978 年 1 月的模拟情况, ISAST7 模式模拟的雪盖厚度变化范围为 8.9~21.9 cm, ISAST7 模式中雪盖分为 3 层, 与 ISAST3 和 SAST 模式的雪盖分层结果相同. 模式运行结果表明, ISAST7 的运算时间与 ISAST3 近似, 但都比 SAST 所用时间少了约 20%. 这是因为在雪盖冻结期, ISAST 模式对雪盖的整体三对角矩阵解决方案运算速度更快; 而且在雪盖融化期, 由于更好的利用了质量、能量方程耦合的机制, 使运算过程中的迭代次数也较少.

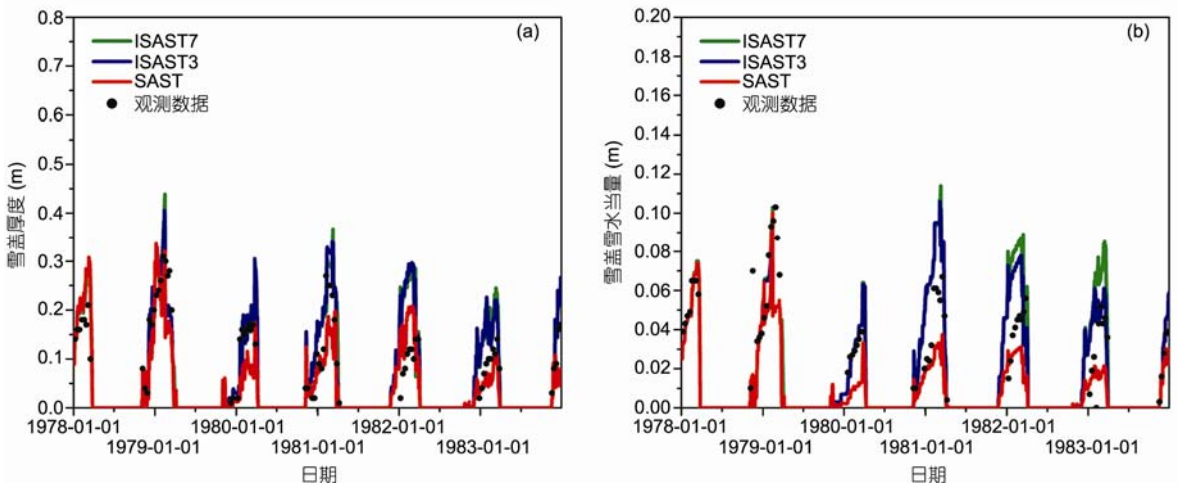

图 1 在 Uralsk 站点 ISAST7, ISAST3 和 SAST 的模拟值和观测值的比较

(a) 雪盖厚度; (b) 雪盖雪水当量

当雪盖厚度经常大于 30 cm 时, ISAST7 和 ISAST3 与 SAST 的模拟值会出现明显的差异. 1978~1983 年的雪季, Ogurtsovo 站点约有 70%的时间雪层厚度在 30 cm 以上. 从图 2 可以看出, 在 1979~1980 年、1980~1981 年和 1982~1983 年的雪季, SAST 模式未能很好的模拟出雪盖厚度和雪水当量的季节变化, 与观测值相差较大, ISAST 模式则有更好的表现. 具体来说, 在 1982~1983 年的雪季, ISAST7, ISAST3, SAST 和观测的雪盖厚度的峰值分别为 54, 47, 42 和 60 cm, 雪盖雪水当量的峰值分别为 0.15, 0.127, 0.116 和 0.16 m; 从模拟值和观测值的差异的平均值来看, 在 1982~1983 年的雪季, ISAST7, ISAST3 和 SAST 模拟的雪盖厚度平均比观测值小 4.5, 6.3 和 9.7 cm; ISAST7, ISAST3 和 SAST 模拟的雪盖雪水当量平均比观测值小 0.02, 0.04 和 0.05 m. 从以上两方面的比较, 我们可以得出, ISAT7 的模拟精度最好, ISAT3 和 SAST 次之. 在运算效率方面, 当雪盖较厚时, ISAST7 模式由于雪盖分层多, 所需运算时间要大于 ISAST3 模式. 例如 1983 年 1 月, ISAST7 模拟的 Ogurtsovo 站点雪盖厚度变化范围为 35.9~47.7 cm, 雪盖被分为 5 层, 与 ISAST3 相比, 运算时间多了约 23%, 但与 SAST 模式所用时间基本相同, 这也体现出 ISAST 模式新的数值求解方法在运算效率方面的优势.

在 Yeshov 站点, 部分年份的模拟值和观测值存在较大差异(图 3), 是因为没有被考虑进模式的物理过程发挥了重要的作用, 例如强风对雪盖的影响. 1978 年 12 月 28 日 ISAST7 模拟的雪盖厚度为 20.9 cm, 观测值为 19.0 cm, 差异仅为 1.9 cm. 之后的 1978 年 12 月 30 日, 1979 年 1 月 4 日和 1 月 5 日 Yeshov 站点下了三场雪, 根据模式的参数化方案, 三场雪的降雪量大约相当于 26.6 cm 的雪盖. 降雪的三天里, 平均风速在 10 m s^{-1} 以上, 1 月 5 日的平均风速甚至达到了 15 m s^{-1}, 强风吹走新雪, 减小了雪盖的厚度, 但是 ISAST 模式中并没有包括对这一物理过程的描述. 因此, 到了 1979 年 1 月 8 日, 雪盖厚度的模拟值为 46.5 cm, 观测值为 29 cm, 差异扩大到 17.5 cm, ISAST 模式高估了雪盖厚度. 类似的, 1980 年 1 月 18 日雪盖厚度的模拟值和观测值的差异为–0.7 cm, 而到了 1 月 27 日, 这一差异变为 11.9 cm. 这是因为, 1 月 27 日 Yeshov 站点的平均风速为 12.7 m s^{-1}, 远大于该站点 1980 年 1 月的月平均风速 4.46 m s^{-1}, 强风吹走新雪, 造成 ISAST 模式对雪盖厚度的高估. Khabarovsk 站点的情况与 Yeshov 站点类似(图 4), 强风的影响造成了模拟值和观测值的差异变大, 在 Sun 等[12]在 1999 年中已有所论述. Tulun 站点的模拟情况与 Khabarovsk 和 Yeshov 站点有所不同(图 5), ISAST7 的模拟值和观测值的差异主要出现在雪盖厚度上, 而对雪水当量的模拟效果很好, 原因可能是模式对雪盖体积分密度的参数化方案未能很好的描述实际情况.

除了雪盖厚度和雪水当量, 雪盖模式模拟的重要的预测变量还有雪盖的生命期及其完全融化的时

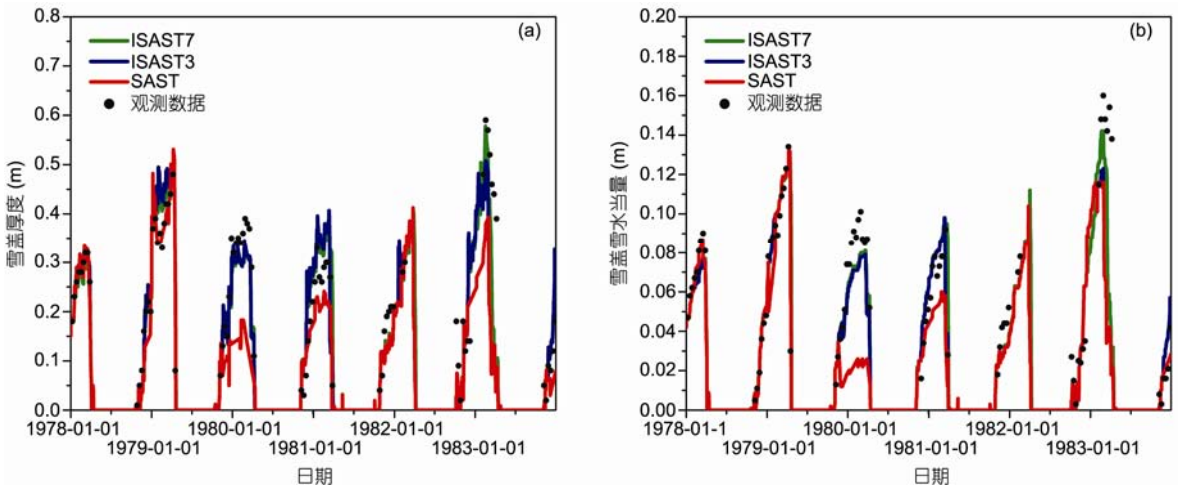

图 2　在 Ogurtsovo 站点 ISAST7, ISAST3 和 SAST 的模拟值和观测值的比较

(a) 雪盖厚度; (b) 雪盖雪水当量

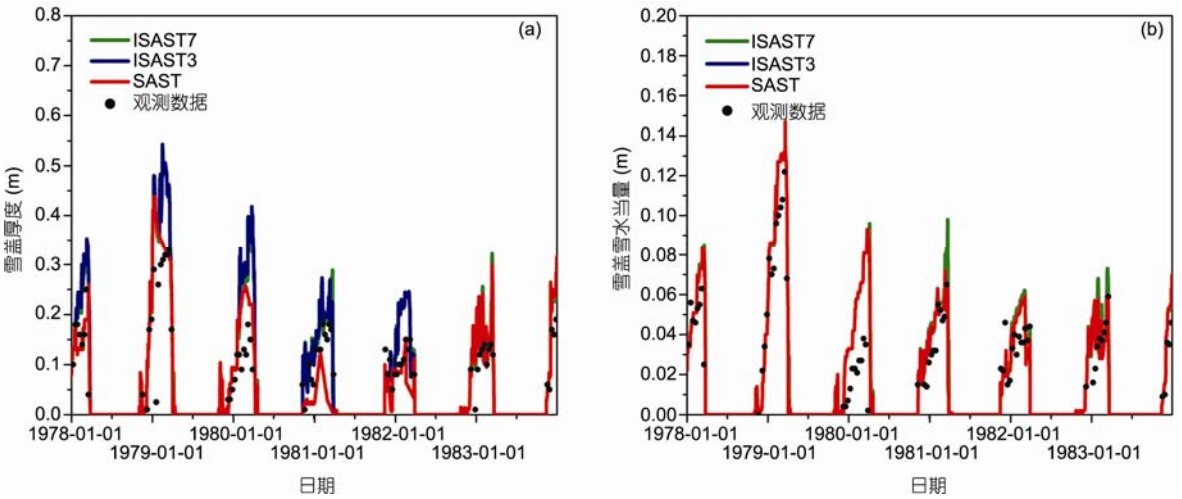

图 3　在 Yeshov 站点 ISAST7, ISAST3 和 SAST 的模拟值和观测值的比较

(a) 雪盖厚度; (b) 雪盖雪水当量

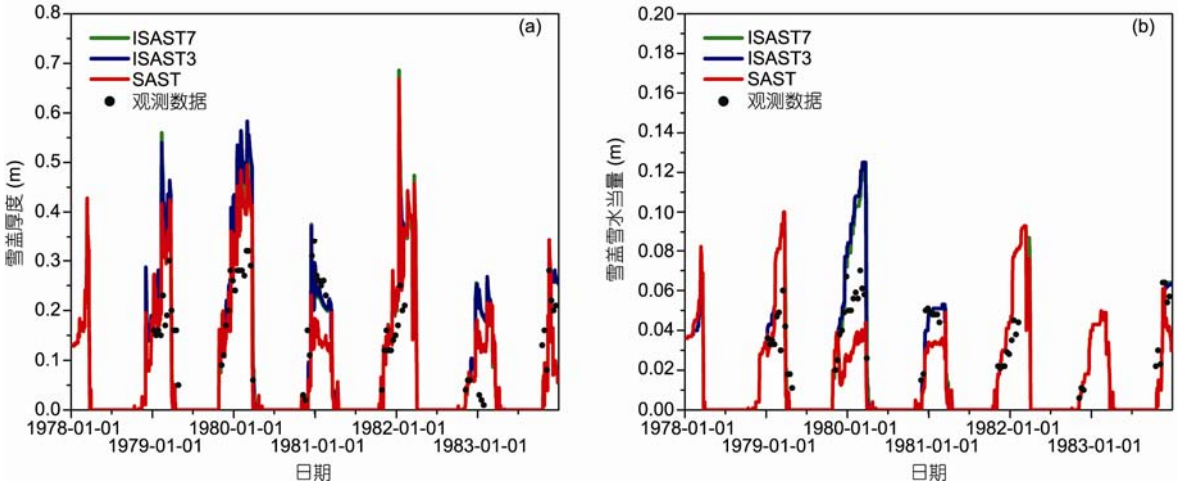

图 4　在 Khabarovsk 站点 ISAST7, ISAST3 和 SAST 的模拟值和观测值的比较

(a) 雪盖厚度; (b) 雪盖雪水当量

间. 由于雪盖和土壤间的反照率相差较大, 雪盖生命期的长短将改变雪盖反照率发挥作用的时间, 因此, 能否准确的模拟雪盖生命期及其完全融化的时间, 关系到能否准确的描述地气间的能量交换特征. 五个俄罗斯站点的实际观测中, 雪盖厚度每 10 天测定一次, 而且春季雪盖融化的速度相当快, 通常, 上个观测日雪盖厚度为 10~20 cm, 下个观测日雪盖厚度已经变为 0 cm, 因此我们难以得知雪盖完全融化的时间. 例如, 观测数据为 11.18~3.18(即 11 月 18 日至 3 月 18 日), 即雪盖完全融化的时间在 3 月 18 日至 3 月 28 日. 表 1 描述了 ISAST7, ISAST3 和 ISAST 模拟的雪盖生命期. 结果表明, 从春季雪盖融化的趋势来看, 雪盖生命期和完全融化时间的模拟与实际观测符合的比较好. 特别是在部分站点, 如果实际观测当天, 雪盖正处于完全融化的边缘, 则可以获得较准确的完全融化时间. 例如 Tulun 站点, 1979 年 4 月 18 日所观测到的雪盖厚度为 1 cm, 雪水当量太小而没有观测值. ISAST 两种分层方法的模拟值均为 1.1 cm, 雪水当量为 0.008 m, 这与观测实际符合的很好, 4 月 18 日为模式所模拟出的雪盖完全融化日.

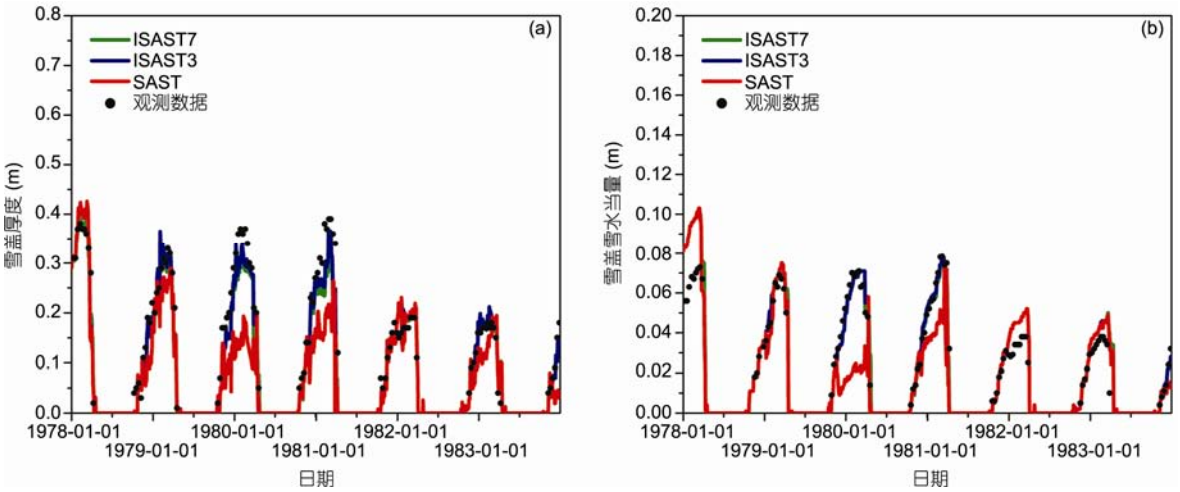

图 5　在 Tulun 站点 ISAST7, ISAST3 和 SAST 的模拟值和观测值的比较

(a) 雪盖厚度; (b) 雪盖雪水当量

表 1　1978~1983 年雪季 Khabarovsk, Ogurtsovo, Tulun, Uralsk 和 Yeshov 站点雪盖生命期的模拟结果和观测值

年份		Khabarovsk	Ogurtsovo	Tulun	Uralsk	Yeshov
1978~1979	旧 SAST	11.15~4.15[a)]	11.4~4.20	10.8~4.18	11.8~3.27	11.9~4.7
	ISAST3	11.15~4.15	11.4~4.20	10.8~4.18	11.8~3.27	11.9~4.7
	ISAST7	11.15~4.16	11.4~4.22	10.8~4.18	11.8~3.27	11.9~4.7
	观测数据	11.18~4.18	11.8~4.18	10.8~4.18	11.8~3.28	11.8~3.28
1979~1980	旧 SAST	10.27~4.5	11.1~4.11	10.14~4.20	12.1~4.7	12.1~4.9
	ISAST3	10.27~4.5	11.1~4.11	10.15~4.21	12.1~4.7	12.1~4.9
	ISAST7	10.27~4.5	11.1~4.12	10.15~4.22	12.1~4.7	12.1~4.10
	观测数据	11.8~4.8	11.8~4.8	10.18~4.18	12.8~3.28	12.8~4.8
1980~1981	旧 SAST	11.1~4.15	11.4~3.25	10.15~4.5	11.6~3.29	11.7~3.27
	ISAST3	11.1~4.15	11.4~3.29	10.15~4.6	11.6~4.2	11.7~3.27
	ISAST7	11.1~4.16	11.4~4.1	10.15~4.7	11.6~4.4	11.7~3.28
	观测数据	11.8~2.18	11.8~3.28	10.18~4.8	11.8~4.8	11.8~3.28
1981~1982	旧 SAST	10.23~4.3	10.27~4.6	10.16~4.3	11.24~4.5	11.16~3.29
	ISAST3	10.23~4.3	10.27~4.6	10.16~4.3	11.24~4.5	11.16~3.29
	ISAST7	10.23~4.3	10.27~4.9	10.16~4.3	11.24~4.5	11.16~3.29
	观测数据	10.28~2.8	10.28~2.18	10.18~3.28	1.8~3.28	11.18~3.28
1982~1983	旧 SAST	11.4~4.12	10.7~4.14	11.1~4.18	11.25~3.29	11.23~3.21
	ISAST3	11.4~4.12	10.7~4.14	11.1~4.18	11.25~3.29	11.23~3.21
	ISAST7	11.4~4.12	10.7~4.16	11.1~4.18	11.25~3.30	11.23~3.22
	观测数据	11.8~1.28	10.8~4.8	11.18~4. 8	12.28~3.28	12.8~3.18

a) 11.15~4.15 表示 1978-11-15 至 1979-04-15

图 6 为 ISAST7 和 ISAST3 模拟的地表温度和观测值的比较. 有雪时, 地表温度指雪盖表层的温度; 没有积雪时, 地表温度指土壤表层的温度. 五个前苏联站点只在每年的 5~10 月有地表温度的观测资料, 即没有冬季地表温度的观测. 但是, 由于地表温度的模拟值和观测值在 5~10 月间符合得较好, 这也间接地证明了 ISAST 模式的模拟精度.

4　结论

本文基于 Sun 等[12]在 1999 年发展的一个简单雪盖-大气-土壤传输模式(SAST), 改进了雪盖分层方法, 提出了新的数值求解方法, 得到了一个改进的雪盖模式(ISAST), 并利用五个前苏联观测站点的观测数据检验了 ISAST 模式的模拟效果. 结果表明, ISAST 模

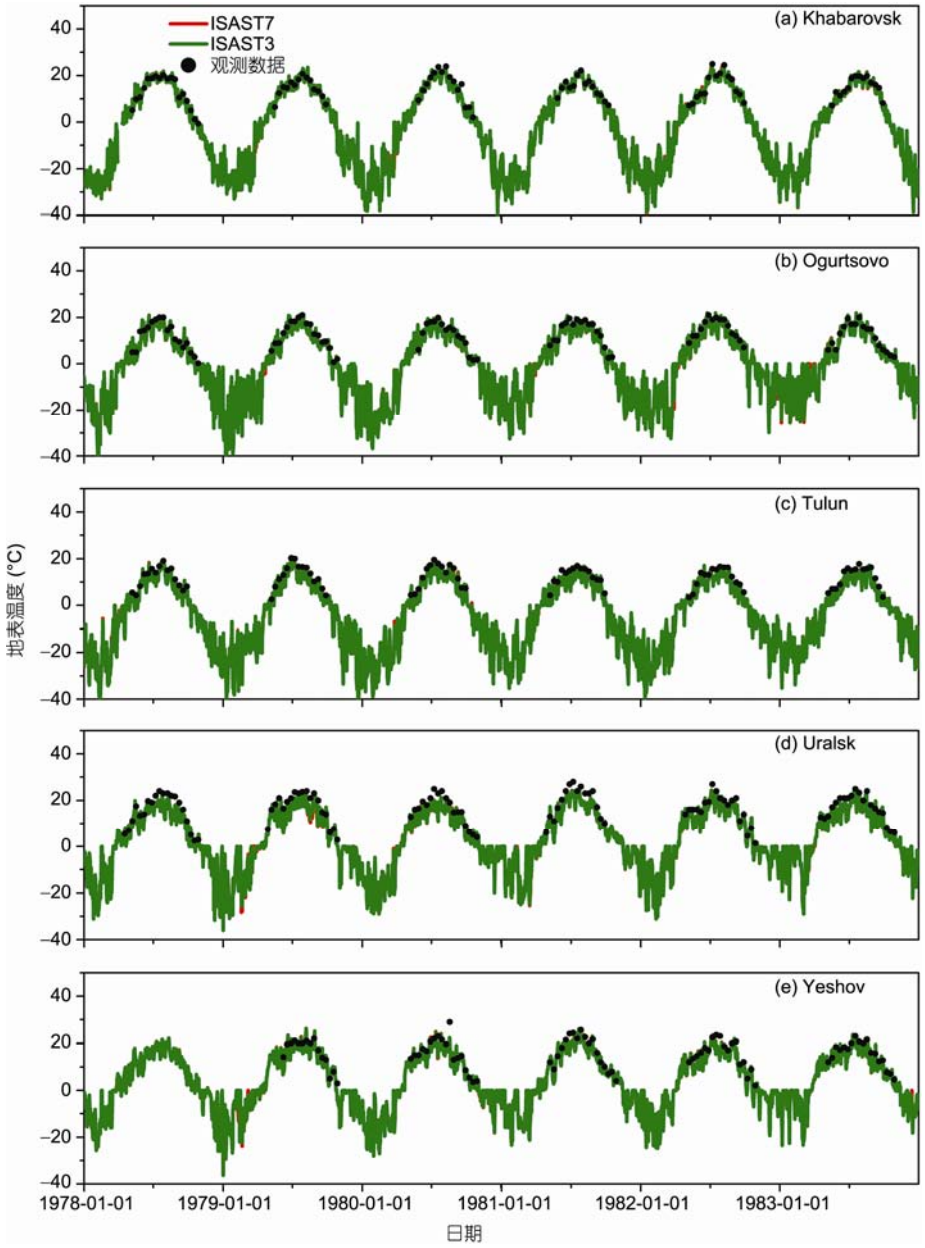

图 6　在不同站点 ISAST7 和 ISAST3 模拟的地表温度和观测值的比较

式的模拟值与观测数据符合的较好(包括雪盖厚度、雪水当量和雪盖生命期); 当雪盖较厚时, ISAST7 的模拟效果要好于 ISAST3. 在 Khabarovskt Yeshov 站点, 由于模式没有包括强风吹走新雪的物理过程, ISAST 高估了雪盖厚度. 而在 Tulun 站点, 模拟效果较差, 可能是由于模式对雪盖体积分密度的参数化方案未能很好的描述实际情况. 由于运用了新算法, ISAST 的运算效率比 SAST 更高, ISAST3 的运算时间比 SAST 缩短了 20%. 但是, 由于本文中驱动模式的是离线数据, 下一步工作需要把 ISAST 模式耦合到气候模式, 进一步检验模式的模拟精度. 同时, 考虑强风对雪盖厚度的影响, 也将是本雪盖模式改进的方向.

参考文献

1 Sud Y C, Mocko D M. New snow-physics to complement SSiB. Part I: Design and evaluation with ISLSCP Initiative I datasets. J Meteorol Soc Jpn, 1999, 77: 335–348

2 Bamzai A S, Shukla J. Relation between Eurasian snow cover, snow depth, and the Indian summer monsoon: An observational study. J Clim, 1999, 12: 3117–3132

3 Cohen J, Rind D. The effect of snow cover on the climate. J Clim, 1991, 4: 689–706

4 Karl T R, Groisman P Y, Knight R W, et al. Recent variations of snow cover and snowfall in North America and their relation to precipitation and temperature variations. J Clim, 1993, 6: 1327–1344

5 Namias J. Some empirical evidence for the influence of snow cover on temperature and precipitation. Mon Weather Rev, 1985, 113: 1542–1553

6 Walsh J E, Jasperson W H, Ross B. Influences of snow cover and soil moisture on monthly air temperature. Mon Weather Rev, 1985, 113: 756–768

7 Sellers P J, Mintz Y, Sud Y C. A simple biosphere model (SiB) for use within general circulation models. J Atmos Sci, 1986, 43: 505–531

8 Anderson E A. A point energy and mass balance model of a snow cover. NOAA Technical Report. Department of Commerce, Washington D C, 1976

9 Brun E, Martin E, Simon V, et al. An energy and mass model of snow cover suitable for operational avalanche forecasting. J Glaciol, 1989, 35: 333–342

10 Lehnings M, Bartlet P, Brown B. Operational use of a snowpack model for the avalanche warning service in Switzerland: Model development and first experiences. Nor Geotech Inst, 1998, 203: 169–174

11 Loth B, Graf H F, Oberhuber J M. Snow cover model for global climate simulations. J Geophys Res, 1993, 98: 10451–10464

12 Sun S, Jin J, Xue Y. A simple snow-atmosphere-soil transfer model. J Geophys Res, 1999, 104: 19587–19597

13 Boone A, Habets F, Noilhan J, et al. The Rhone-aggregation land surface scheme inter-comparison project: An overview. J Clim, 2004, 17: 187–208

14 Siemer A H. One dimensional EBM of a snow cover taking into account liquid water transmission. Ber Inst Meteorol, 1988, 34: 126

15 Robock A, Vinnikov K V, Schlosser C A, et al. Use of Russian soil moisture and meteorological observations to validate soil moisture simulations with biosphere and bucket models. J Clim, 1995, 8: 15–35

16 Yang Z L, Dickinson R E, Robock A, et al. Validation of the snow sub-model of the biosphere-atmosphere transfer scheme with Russian snow cover and meteorological observational data. J Clim, 1997, 10: 353–373

17 Li Q, Sun S, Dai Q. The numerical scheme development of a simplified frozen soil model. Adv Atmos Sci, 2009, 26: 940–950

论 文

附录 A: 雪盖表层冻结情况的迭代求解过程

如果表层冻结不融化, 液态水的流出量为 0, 即 $\Delta t\rho_l V_{l,j}^k = 0$, 因此, (2)式变为

$$m_{sn}^k = m_{sn}^{k-1} + \Delta t\rho_l V_{\inf,sn}^k - \Delta t E_{sn}^k. \tag{A.1}$$

在雪盖表层冻结时的情况, 将潜热项在上一步迭代(用上标 $k, m-1$ 表示)处展开, 可得到

$$\begin{aligned} &qlat^*(q_{v,\text{air}} - f_{rh}q_{vk,sat}(T_{sn})) = qlat^* \\ &\cdot\left[q_{sat,\text{air}}RH - q_{vi,sat}(T_{sn}^{k,m-1})f_{rh} + f_{rh}\frac{\partial q_{vi,sat}}{\partial T}\bigg|_{T=T_{sn}^{k,m-1}}^{(T_{sn}^{k,m-1}-T_{sn}^{k,m})\cdot f_{rh}}\right]. \end{aligned} \tag{A.2}$$

同理, 向上长波辐射项在 $T_{sn}^{k,m-1}$ 处展开为

$$\sigma(T_{sn}+273.15)^4 = \sigma(T_{sn}^{k,m-1}+273.15)^4 + 4\sigma(T_{sn}^{k,m-1}+273.15)^3(T_{sn}^{k,m}-T_{sn}^{k,m-1}). \tag{A.3}$$

将(A.1)~(A.3)式代入(22)式, 并将含有温度 $T_{sn}^{k,m}$ 的项都移到左边, 即

$$\begin{aligned} &T_{sn}^{k,m}[m_{sn}^{k-1}c_i + \Delta t(\rho_l c_i V_{\inf,sn}^k + E_{sn}^k(c_v - c_i) + (q_k^{n-1/2} + q^{\text{sea}}) \\ &+qlat^*\frac{\partial q_{vi,sat}}{\partial T}\bigg|_{T=T_{sn}^{k-1}} f_{rh} + 4\sigma\varepsilon(T_{sn}^{k,m-1}+273.15)^3)] \\ &-q_k^{n-1/2}T_{sn-1}^k\Delta t = L_{li}(m_{sn}^{k-1} + \Delta t\rho_l V_{\inf,sn}^k - \Delta t E_{sn}^k) + H_{sn}^{k-1} \\ &+\Delta t\cdot[R_{s,u}^n - R_{s,d}^n + \varepsilon(I_{sn,r}^{\downarrow} - \sigma(T_{sn}^{k,m-1}+273.15)^4 \\ &+4\sigma(T_{sn}^{k,m-1}+273.15)^3 T_{sn}^{k,m-1}) + q^{\text{sea}}T_{\text{air}} \\ &+qlat^*(q_{sat,\text{air}}RH - q_{vi,sat}(T_{sn}^{k,m-1})f_{rh} \\ &+\frac{\partial q_{vi,sat}}{\partial T}\bigg|_{T=T_{sn}^{k,m-1}} T_{sn}^{k,m-1}\cdot f_{rh}) + \rho_l C_l V_{\inf,sn}T_{prec}]. \end{aligned} \tag{A.4}$$

(A.4)式左边的 $T_{sn}^{k,m}E_{sn}^k(c_v - c_i)/LE_n^k$ 数量级在 10^{-3}, 因此 $T_{sn}^k E_{sn}^k(c_v - c_i)$ 项中的蒸发量可用上一迭代时刻蒸发量 $T_{sn}^{k,m-1}E_{sn}^k$ 代替本时刻. 而等式右边第一项中的 $L_{li}E_{sn}^k$ 由于量级原因, 不能用上一迭代时刻蒸发量代替, E_{sn}^k 是雪盖表层温度的函数 $E_{sn}^k(T_{sn}^{k,m})$, 即

$$E_{sn}^k = E_{sn}^k(T_{sn}^{k,m-1}) + \frac{\partial E}{\partial T}\bigg|_{T=T_{sn}^{k,m-1}}\cdot(T_{sn}^{k,m} - T_{sn}^{k,m-1}). \tag{A.5}$$

所以, 可得

$$\begin{aligned} E = LE/L_{lv} &= qlat^*[q_{sat,\text{air}}RH - q_{vi,sat}(T_{sn})\cdot f_{rh}]/L_{lv} \\ &= qlat^*[q_{sat,\text{air}}RH - q_{vi,sat}(T_{sn}^{k,m-1})\cdot f_{rh} \\ &\quad + \frac{\partial q_{vi,sat}}{\partial T}\bigg|_{T=T_{sn}^{k,m-1}}(T_{sn}^{k,m-1} - T_{sn}^{k,m})\cdot f_{rh}]/L_{lv}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

其中,

$$qlat^*[q_{sat,\text{air}}RH - q_{vi,sat}(T_{sn}^{k,m-1})\cdot f_{rh}]/L_{lv} = LE(T_{sn}^{k,m-1})/L_{lv} = E_{sn}^k(T_{sn}^{k,m-1}). \tag{A.7}$$

$$qlat^*\cdot f_{rh}/L_{lv}\cdot\frac{\partial q_{vi,sat}(T)}{\partial T}\bigg|_{T=T_{sn}^{k,m-1}} = -\frac{\partial E}{\partial T}\bigg|_{T=T_{sn}^{k,m-1}}. \tag{A.8}$$

因此(A.4)式右边第一项可写为

$$\begin{aligned} m_{i,sn}^{k}L_{li} &= (m_{sn}^{k-1} - \Delta t E_{sn}^{k} + \Delta t \rho_l V_{\mathrm{inf},sn}^{k})L_{li} \\ &= [m_{sn}^{k-1} - \Delta t(E_{sn}^{k}(T_{sn}^{k,m-1}) + \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{T=T_{sn}^{k,m-1}} \cdot (T_{sn}^{k,m} - T_{sn}^{k,m-1})) + \rho_l V_{\mathrm{inf},sn}^{k})]L_{li}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

将上式代入(A.4)并重组后, 可得

$$\begin{aligned} &[m_{sn}^{k-1}c_i + \Delta t(\rho_l c_i V_{\mathrm{inf},sn}^{k} + E_{sn}^{k}(T_{sn}^{k,m-1})(c_v - c_i) \\ &+(q_k^{n-1/2} + q^{\mathrm{sea}}) + qlat^{*}\left.\frac{\partial q_{vi,sat}}{\partial T}\right|_{T=T_{sn}^{k,m-1}} f_{rh} \\ &+4\sigma\varepsilon(T_{sn}^{k,m-1} + 273.15)^3 + \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{T=T_{sn}^{k,m-1}} L_{li})]T_{sn}^{k} - q_k^{n-1/2}T_{sn-1}^{k}\Delta t \\ &= (m_{sn}^{k-1} + \Delta t \rho_l V_{\mathrm{inf},sn}^{k} - \Delta t E_{sn}^{k}(T_{sn}^{k,m-1}) - \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{T=T_{sn}^{k,m-1}} T_{sn}^{k,m-1})L_{li} + H_{sn}^{k-1} \\ &+\Delta t[R_{s,u}^{n} - R_{s,d}^{n} + \varepsilon(I_{sn,r}^{\downarrow} - \sigma(T_{sn}^{k,m-1} + 273.15)^4 \\ &+4\sigma(T_{sn}^{k,m-1} + 273.15)^3 T_{sn}^{k,m-1}) + q^{\mathrm{sea}}T_{\mathrm{air}} \\ &+qlat^{*}(q_{sat,\mathrm{air}}RH - q_{vi,sat}(T_{sn}^{k,m-1})f_{rh} \\ &+\left.\frac{\partial q_{vi,sat}}{\partial T}\right|_{T=T_{sn}^{k,m-1}} T_{sn}^{k,m-1} \cdot f_{rh}) + \rho_l C_l V_{\mathrm{inf},sn}T_{prec}]. \end{aligned} \tag{A.10}$$