中国科学: 地球科学 2013 年 第 43 卷 第 3 期: 499 ~ 502
www.scichina.com earth.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

非线性陆架坡度作用下的陆架地形波

冯立成[①*], 巢纪平[①②]

① 国家海洋环境预报中心, 北京 100081;
② 国家海洋局第一海洋研究所, 青岛 266061
* E-mail: fenglich@gmail.com

收稿日期: 2012-01-16; 接受日期: 2012-07-18
国家自然科学基金(批准号: 40906014, 40976015)和国家海洋局青年海洋科学基金(编号: 2010218)资助

摘要 应用浅水模式研究了非线性陆架坡度作用下陆架地形波的性质, 指出在地形强迫下陆架海域存在两支陆架地形-Rossby 波和两支惯性重力波. 其中向北传播的陆架地形-Rossby 波和惯性重力波在长波波段耦合为不稳定波动. 随着陆架坡度的增大向北传播的陆架地形-Rossby 波仍在长波波段和惯性重力波耦合为不稳定波动, 但频率减小. 将其应用于中国南海, 则表明在陆架地形的强迫下西边界附近会出现不稳定波动, 在非线性情况下, 不稳定振幅进一步增大发展成涡旋是可能的. 实际观测中中国南海西边界存在强的边界流, 且南海中尺度涡旋发育丰富. 环流的多涡结构的生消和迁移与南海环流变化关系密切. 因此本文的研究给出了南海涡旋生成的一种可能机制.

关键词
非线性陆架坡度
陆架地形 Rossby 波
波动不稳定

陆架海域是海洋重要的组成部分, 陆架海中存在多种形式的运动如陆架波、沿岸上升流、沿岸急流和陆架中尺度涡旋等. 陆架海域的运动虽然是在 f 平面上进行的, 但由于陆架坡度可以起到类似于 β 的作用, 因而在 f 平面上的运动也具有某些 β 平面上运动的特色, 形成陆架波动[1]. Wang 等[2]及 Hong 和 Wang[3]还研究了非线性陆架坡与斜压层结的相互作用. Robinson[1]研究陆架波时, 指出陆架坡度可以激发出类似于 Rossby 波的慢波, 自此陆架波动成为陆架动力学研究热点之一. 回顾以往的大部分工作都直接应用无辐散近似(如 Buchwald 和 Adams[4], Adams 和 Buchwald[5], Allen[6]), 有的还加上对沿岸流的地转平衡, 即长波近似[7], 由于这些近似的引入, 因此从未给出陆架波系中应有的成员. 巢纪平和徐小标[8,9]利用浅水模式研究了陆架波动系统成员, 指出陆架区域存在着惯性重力波、Kelvin 波、Rossby 波和有条件的 Rossby 重力混合波, 并提出了一种 El Niño 信号传播的机制. 简单起见, 上述研究中陆架地形取线性变化, 实际地形多呈非线性变化, 因而有些波动特征没有揭示出来. 本文将在上述工作基础上, 进一步讨论非线性陆架坡度下的波动.

1 基本运动方程

设海洋的深度为 h_s+h_c, h_s 为海面扰动高度, $h_c(x)$ 为陆架的高度(海底至平均海平面). 海岸线沿 y 方向, x 轴垂直于海岸, 海盆的特征宽度为 L. 不考虑风应力的作用, 在 f 平面上线性化的浅水运动方程为

中文引用格式: 冯立成, 巢纪平. 非线性陆架坡度作用下的陆架地形波. 中国科学: 地球科学, 2013, 43: 499–502
英文引用格式: Feng L C, Chao J P. Continental shelf waves forced by nonlinear continental shelf topography. Science China: Earth Sciences, 2012, 55: 1702–1705, doi: 10.1007/ s11430-012-4463-7

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-g'\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-g'\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}x}u=0. \tag{3}$$

式中 g'为视重力, 未加微分号的 h 已用 H 代替. 引进重力波波速:

$$C=\sqrt{g'H}. \tag{4}$$

取特征量

$$t\propto 1/f,\quad (x,y)\propto C/f,\quad (u,v)\propto C,\quad h\propto H,\quad h_c\propto H. \tag{5}$$

于是有无量纲方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u=-\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-v=-\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}x}\right)u=0. \tag{8}$$

由(6), (7)式得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+v=\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial^2 h}{\partial t\partial y}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+u=-\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial^2 h}{\partial t\partial x}. \tag{10}$$

(8)式乘以$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+1\right)$后, 再利用(9)和(10)式, 最后有

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+1-\left(\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial}{\partial x}-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]\frac{\partial h}{\partial t}-\left(\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial h}{\partial y}=0. \tag{11}$$

考虑到实际的陆架坡度在近岸会很陡, 取无量纲形式为

$$h_c=1-\mathrm{e}^{-\alpha x}. \tag{12}$$

2 色散关系

设解的形式为

$$h=\hat{h}(x)\mathrm{e}^{i(ky+\sigma t)}, \tag{13}$$

并做坐标变换, 令

$$\xi=\mathrm{e}^{-\alpha x}, \tag{14}$$

(11)式变为

$$\xi^2\frac{\mathrm{d}^2\hat{h}}{\mathrm{d}\xi^2}-\xi(\xi-1)\frac{\mathrm{d}\hat{h}}{\mathrm{d}\xi}+\left(\frac{\sigma^2-k^2-1}{\alpha^2}+\frac{k}{\alpha\sigma}\xi\right)\hat{h}=0. \tag{15}$$

此方程的边界条件, 在岸边 u=0, 由(10)式给出

$$\xi=1,\quad \frac{\mathrm{d}\hat{h}}{\mathrm{d}\xi}-\frac{k}{\alpha\sigma}\hat{h}=0. \tag{16}$$

在离岸远处

$$\xi\to 0,\quad \hat{h}\to 0. \tag{17}$$

方程(15)在近岸区域可求得解析解. 这时 $\xi\to 1$, 方程(15)近似地有

$$\xi^2\frac{\mathrm{d}^2\hat{h}}{\mathrm{d}\xi^2}+\left(\frac{\sigma^2-k^2-1}{\alpha^2}+\frac{k}{\alpha\sigma}\xi\right)\hat{h}=0. \tag{18}$$

作变换(参见文献[10]):

$$a=\frac{\sigma^2-k^2-1}{\alpha^2},\quad b=\frac{k}{\alpha\sigma},$$

$$l=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{\alpha^2}\left(\sigma^2-k^2-1\right)}\right),\quad \eta=2\sqrt{b\xi}, \tag{19}$$

$$\hat{h}=\xi^l\phi(\eta). \tag{20}$$

由(19)式, 为了保证 l 是实数, 要求

$$\sigma^2<\frac{\alpha^2}{4}+k^2+1=\sigma_c^2, \tag{21}$$

即上述变化只对低频成立, 因此在这个意义上可称为低频近似. 这时有方程

$$\eta\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2}+(4l-1)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}+\eta\phi=0. \tag{22}$$

方程(22)有一特解:

$$\phi=\eta^{1-2l}J_p(\eta), \tag{23}$$

为 p 阶 Bessel 函数, 式中 $p=1-2l$.

注意到, $x\to\infty$, $\xi\to 0$ 时 $\eta\to 0$, 因此这个函数 $J_p\to 0$, 它自动满足无穷远处的条件. 在 x=0 处, 条件(16)在新变量下写成:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}+\left(\frac{2l}{\eta}-\frac{\eta}{2}\right)\phi=0. \tag{24}$$

由于 $x=0$, $\xi=1$时, $\eta=2\sqrt{b}$ 故有

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}+\left(\frac{l}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\phi=0, \tag{25}$$

取解为

$$\phi = \eta^{1-2l} J_p(\eta). \tag{26}$$

将(26)式代入(25)式, 给出

$$\frac{\mathrm{d}J_P}{\mathrm{d}\eta} + \left(\frac{(1-2l)}{\eta} + \left(\frac{l}{\sqrt{b}} - \sqrt{b} \right) \right) J_p(\eta) = 0. \tag{27}$$

注意到, 对任意阶的 *Bessel* 函数 C_ν 有公式

$$\eta \frac{\mathrm{d}C_\nu}{\mathrm{d}\eta} + \nu C_\nu(\eta) = \eta C_{\nu-1},$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}J_p}{\mathrm{d}\eta} = J_{p-1}(\eta) - \frac{p}{\eta} J_p(\eta).$$

将此式代入(27)式, 并当 $x = 0$, $\eta = 2\sqrt{b}$ 时, 给出

$$J_{p-1}(\eta) + \left(\frac{(1-2l)}{2\sqrt{b}} + \left(\frac{l}{\sqrt{b}} - \sqrt{b} - \frac{p}{2\sqrt{b}} \right) \right) J_p(\eta) = 0. \tag{28}$$

重新写出式中参数, 分别为

$$b = \frac{k}{\alpha\sigma}, \quad l = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2}(k^2 - \sigma^2 - 1)} \right),$$

$$p = 1 - 2l = \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2}(\sigma^2 - k^2 - 1)}. \tag{29}$$

因此(28)式是当海底地形呈指数分布时在近岸区的色散公式.

当陆架坡度陡时(α 较大), 可求出(28)式的近似色散关系.

即取近似

$$p = \sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2}(\sigma^2 - k^2 - 1)} \approx 1, \tag{30}$$

(28)式的近似形式为

$$J_0(\eta) + \left(\frac{(1-2l)}{2\sqrt{b}} + \left(\frac{l}{\sqrt{b}} - \sqrt{b} - \frac{1}{2\sqrt{b}} \right) \right) J_1(\eta) = 0. \tag{31}$$

应用 Bessel 函数展开式的最低阶项, 给出

$$1 + \left(\frac{1-p}{2} - b \right) = 0, \tag{32}$$

将各符号值代入后, 得到

$$\sigma^4 + (2\alpha^2 - k^2 - 1)\sigma^2 - 3k\alpha\sigma + k^2 = 0. \tag{33}$$

这是一个关于 σ 的一元四次方程, 其解法参见文献[11].

3　波动色散性质

由上面得到的色散关系式可见波动的稳定性与陆架坡度 α 相关. 图 1(a)给出了南中国海(SCS)沿北纬 12°N 断面的地形(资料来自 Etopo5), 图 1(b)给出了不同 α 下的理想化地形图.

图 2 给出了不同 α 取值下的(33)式求得的波动.

由图 2 可见, 此系统中存在一支向南传播的陆架地形-Rossby 波(实线)、一支向南传播的惯性重力波(点线)、一支向北传播的陆架地形-Rossby 波(虚线)和一支向北传播的惯性重力波(点划线), 且均满足(21)式的低频条件. 其中向北传播的陆架地形-Rossby 波和惯性重力波在长波波段耦合为不稳定波

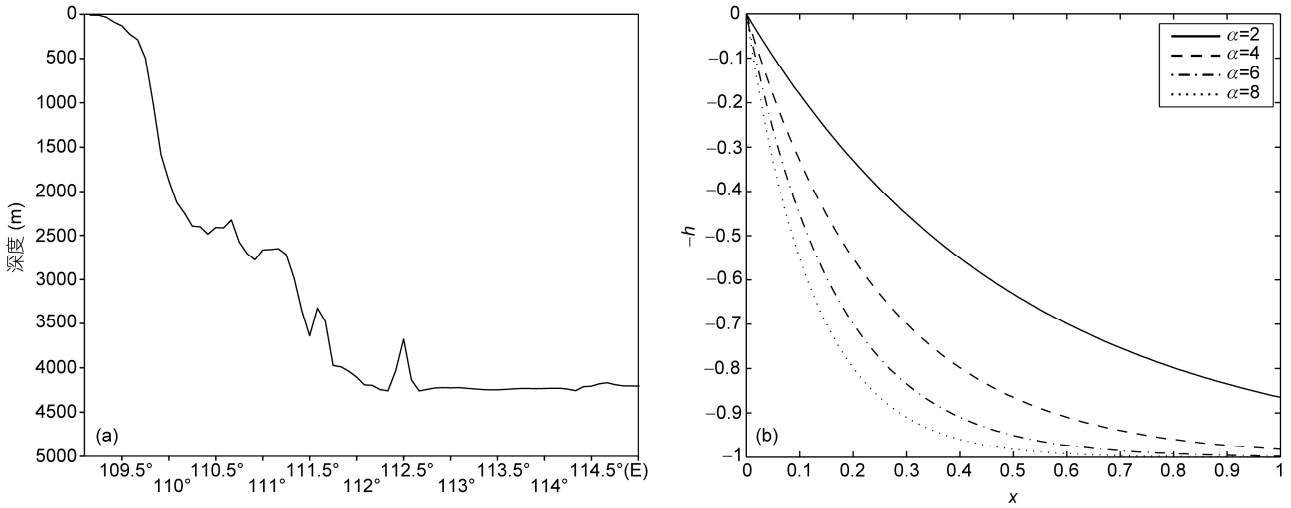

图 1　南海沿 12°N 断面地形(a)及理想化地形(b)

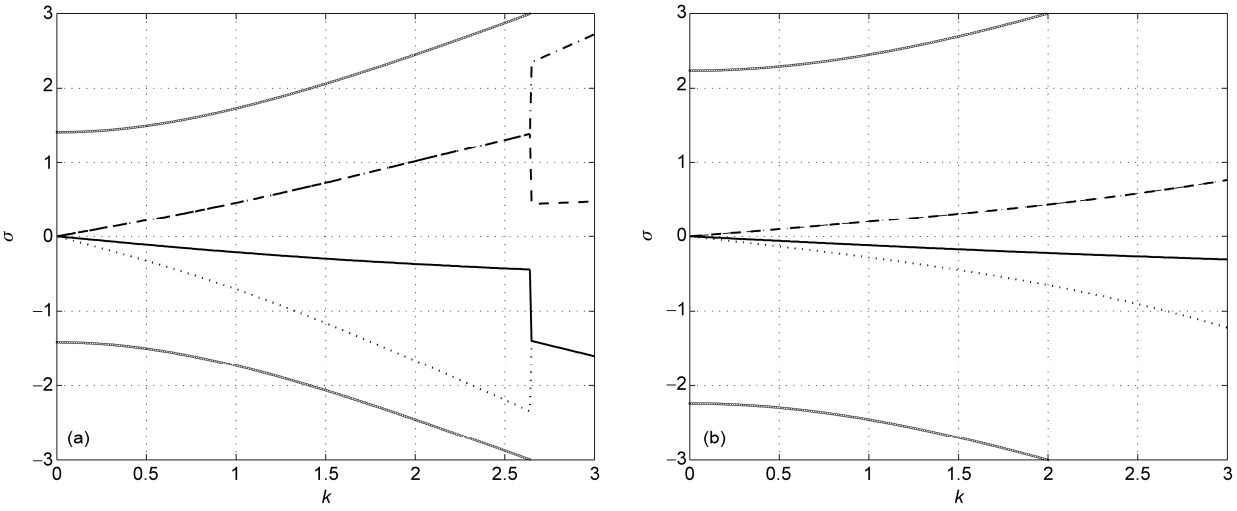

图 2　波动色散关系

(a)和(b)分别为$\alpha=2$及$\alpha=4$时的色散关系. 横坐标 k 为无量纲波数, 纵坐标σ为无量纲频率, 图中空心圆线为σ_c

动, 向南传播的陆架地形-Rossby 波和惯性重力波在短波波段耦合为不稳定波动. 随着陆架坡度 α 的增大(图 2(b))向北传播的陆架地形-Rossby 波仍在长波波段和惯性重力波耦合为不稳定波动, 但频率减小. 向南传播的陆架地形-Rossby 波和惯性重力波则在长波波段保持稳定, 且频率减小.

4　讨论和结论

本文应用线性化的浅水模式通过一系列的变化得到了色散关系方程, 研究了非线性陆架坡度下陆架地形波的性质, 指出在地形强迫下陆架海域存在两支陆架地形-Rossby 波和两支惯性重力波. 其中向北传播的陆架地形-Rossby 波和惯性重力波在长波波段耦合为不稳定波动.

实际观测表明中国南海有两个重要的特征, 一是西边界存在强的边界流, 另外一个是多涡结构, 两者之间存在密切联系. 南海存在非线性陆架坡度(图 1(a)), 因此西边界有可能出现不稳定波动, 并进一步发展成涡旋. 本文的研究从陆架地形波和惯性重力波耦合的角度给出了南海涡旋生成的一种可能机制. 需要指出的是上述结果是在简化模型下得到的, 因而还需要用原始方程模式进行进一步的验证.

参考文献

1　Robinson A R. Continental shelf waves and the response of sea level to weather system. J Geophys Res, 1964, 69: 367–368

2　Wang D X, Hong B, Gan J P, et al. Numerical investigation on propulsion of the counter-wind current in the northern South China Sea in winter. Deep-Sea Res Part I-Oceanogr Res Pap, 2010, 57: 1206–1221

3　Hong B, Wang D X. Sensitivity study of the seasonal mean circulation in the northern South China Sea. Adv Atmos Sci, 2008, 25: 824–840, doi: 10.1007/s00376-008-0824-8

4　Buchwald V T, Adams J K. The propagation of shelf waves. Proc R Soc A-Math Phys Eng Sci, 1968, 305: 225–250

5　Adams J K, Buchwald V T. The generation of shelf waves. J Fluid Mech, 1969, 35: 815–826

6　Allen J S. On forced, long continental shelf waves on an f-plane. J Phys Oceanogr, 1976, 6: 426–431

7　Gill A E. Schumann E H. The generation of long shelf waves by wind. J Phys Oceanogr, 1974, 4: 83–90

8　巢纪平, 徐小标. 论陆架波系动力学及其在厄尔尼诺信号传播中的作用. 气象学报, 2001, 59: 515–523

9　巢纪平, 徐小标. 一类陆架地形波系在 El Niño 信号传播中的作用. 自然科学进展, 2002, 12: 398–402

10　Murphy G M. Ordinary Differential Equations and Their Solution. Princeton: Van Nostrand, 1960. 401

11　叶其孝, 沈永欢. 实用数学手册. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2006. 17–18