



随机激励下高维强非线性系统瞬态响应联合概率密度的一种高效求解方法

肖扬洋^{1,2}, 陈林聪³, 段忠东^{1,2*}, 孙建桥⁴

1. 哈尔滨工业大学(深圳)智能土木与海洋工程学院, 深圳 518055

2. 广东省土木工程智能与韧性结构重点实验室, 深圳 518055

3. 华侨大学土木工程学院, 厦门 361021

4. Department of Mechanical Engineering, School of Engineering, University of California Merced, Merced, CA 95343, USA

* E-mail: duanzd@hit.edu.cn

收稿日期: 2025-04-13; 接受日期: 2025-08-25; 网络版发表日期: 2025-11-05

国家重点研发计划项目(编号: 2023YFC3805203)和国家自然科学基金(批准号: 52239008, 12072118, 12372029)资助项目

摘要 实际的工程结构可能因遭受强烈的非线性随机振动而发生失效, 但现有的理论和方法仍远未满足实际需求, 尤其对高维强非线性系统. 此外, 系统在达到稳态之前通常会经历较长时间的瞬态阶段, 此阶段系统就可能失效. 因此, 开展高维强非线性系统的瞬态响应分析具有重要意义. 到目前为止, 描述这类系统概率响应的经典理论仍然是Fokker-Planck-Kolmogorov(FPK)方程. 然而, 随着方程维数的增加, 求解此方程有限差分法和有限元等网格依赖型数值方法因为维数灾难, 求解效率很快降低, 甚至无法求解. 本文结合FPK方程降维策略, 提出一种无网格求解技术, 高效求解多维瞬态FPK方程(本文算例最高为5维). 具体而言, 利用子空间分解法, 对高维FPK方程进行降维. 随后, 结合物理与数据驱动的策略, 基于少量确定性分析的先验数据, 采用连续时间的径向基神经网络对复杂形状的时变等价漂移系数和扩散系数进行估计, 并基于短时高斯假设对具有奇异性的初始条件进行处理. 最后, 利用无网格的物理信息径向基神经网络结合超球体采样策略, 求解降维瞬态FPK方程, 获得感兴趣物理量的非高斯联合概率密度函数(probability density function, PDF). 通过两个高维非线性系统的数值算例, 并与蒙特卡罗模拟(Monte Carlo simulation, MCS)结果对比, 验证了所提方法的精度和效率. 结果表明, 仅需400次左右的确定性分析, 所提方法就能准确高效地捕捉到降维方程各个时刻响应的联合PDF, 其尾部精度达 10^{-4} 量级, 求解效率可达到MCS的3700倍.

关键词 高维强非线性系统, FPK方程, 径向基神经网络, 超球体采样策略, 联合PDF

1 引言

工程结构在服役期间不可避免地会经历强烈的非

线性随机振动, 这类问题在工程实践中普遍存在且影响重大^[1,2]. 例如, 高层建筑和长跨桥梁等大型基础设施在地震、强风等极端荷载作用下, 常发生剧烈的非

引用格式: 肖扬洋, 陈林聪, 段忠东, 等. 随机激励下高维强非线性系统瞬态响应联合概率密度的一种高效求解方法. 中国科学: 技术科学, 2025, 55: 1904–1916
Xiao Y Y, Chen L C, Duan Z D, et al. An efficient method for the solution of joint transient response PDF of high-dimension strongly nonlinear systems under random excitation (in Chinese). Sci Sin Tech, 2025, 55: 1904–1916, doi: 10.1360/SST-2025-0072

线性随机振动, 可能导致结构局部损伤甚至整体倒塌, 严重威胁人民生命财产安全和社会经济发展. 因此, 深入研究非线性随机振动问题具有重要的理论和工程意义.

自20世纪60年代以来, 国内外学者对非线性随机振动问题进行了系统性研究, 发展了多种分析方法, 如Fokker-Planck-Kolmogorov(FPK)方程法^[3]、统计矩法^[4]、等效线性化法^[5,6]、蒙特卡罗模拟(Monte Carlo simulation, MCS)法^[7]和路径积分法^[8,9]等, 这些方法都有一些优缺点. 近年来, 随着物理信息神经网络等数据驱动方法的兴起, FPK方程的近似求解和数值方法取得了显著进展. 然而, 现有方法在求解维度上仍面临重大挑战, 大部分方法仅适用于4维以内的低维系统, 极少数可扩展至8维^[10-12], 而实际工程系统往往涉及多自由度耦合、材料非线性和边界条件不确定性等因素, 维度可达几百甚至上千维. 这种维度限制严重制约了理论方法的工程适用性, 凸显了高维非线性随机振动分析的复杂性与挑战性.

降维是解决高维非线性随机振动问题的有效策略之一. 随机平均法是一种常用的降维方法, 若哈密顿系统可积, 平均系统维数可减半; 若不可积, 原系统可近似为一维系统^[13,14]. 子空间投影法是另一类重要降维技术, 该方法可将原高维FPK方程降维至仅包含感兴趣状态变量的任意维方程. Er首先采用等效线性化法推导了降维FPK方程未知系数的近似表达式, 但该方法不适用于本质非线性和纯参激等强非线性系统^[15]. Chen等人证明了降维FPK方程中的未知系数实质上是条件均值函数^[16], 并将其命名为等效漂移系数. 该团队进一步发展了基于随机模拟的系数估计方法, 并将该方法拓展至系统参数和外激励均随机的系统分析^[17]和应用泊松白噪声激励系统^[18]与碰撞系统^[19]. 最近, Xiao等人借助最优决策理论, 证明了降维FPK方程中未知系数的最优回归函数是样本点的条件均值函数; 引入径向基神经网络来估计强非线性系统中具有复杂形状的等价漂移和扩散系数函数, 并结合物理信息神经网络来加速降维FPK方程的求解, 为高维强非线性系统的随机振动分析提供了有效的工具^[20,21].

高维非线性系统的瞬态响应预测是非线性随机振动领域中最重要的问题之一^[22,23]. 一方面, 瞬态响应描述了系统的实时动态行为, 可用于系统的优化设计、系统控制和可靠性评估. 另一方面, 系统在达到

稳态之前会经历较长时间的瞬态阶段, 在此阶段, 系统就有可能发生失效. 以工程结构在地震作用下的响应为例, 在强震发生的初始阶段, 结构的瞬态响应往往起着决定性作用, 直接关系到结构的抗震性能和安全评估. 因此, 深入研究非线性系统在随机激励下的瞬态响应特性具有重要的理论意义和工程价值.

上述的子空间投影法仅将高维瞬态FPK方程降维至1~3维的方程, 进而仅能获得系统1~2个重要状态变量的联合分布, 主要原因是随着维度的增加, 传统的有限差分法和有限元法等网格依赖型数值方法因为维数灾难, 求解效率很快降低, 甚至无法求解. 实际工程可能关心更多状态变量的联合分布. 因此, 在作者前期研究的高维稳态FPK方程求解方法基础上, 本文尝试将其拓展至更为一般的加性和/或乘性白噪声激励下高维强非线性系统的联合瞬态响应预测. 全文结构如下: 第2节详细叙述了高维瞬态FPK方程的降维; 第3节叙述了所提方法和实施步骤; 第4节通过对两个高维强非线性系统的数值分析, 并将所提方法结果与MCS数据进行对比, 验证了其在精度和效率方面的优势; 第5节对全文进行了总结, 并展望了未来研究方向.

2 降维瞬态FPK

考虑如下受高斯白噪声激励的 n 维非线性系统:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\xi(t), \quad (1)$$

式中 $\mathbf{X}$ 为 $n \times 1$ 的状态向量; $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t)$ 为 $n \times 1$ 涉及阻尼和非线性力的向量; $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$ 为 $n \times r$ 的荷载影响矩阵; $\xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t)]^T$ 为 $r \times 1$ 的高斯白噪声激励, $\xi(t)$ 的均值 $E[\xi(t)] = \mathbf{0}$ 和协方差矩阵的均值 $E[\xi(t)\xi^T(t')] = 2\mathbf{D}\delta(t-t')$, 其中 $2\mathbf{D}$ 是 $r \times r$ 的强度矩阵, $\delta(\cdot)$ 是狄拉克函数.

引入Wong-Zakai修正项, 式(1)可转化为如下的伊藤随机微分方程^[24]:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)dt + \sqrt{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)}d\mathbf{W}(t), \quad (2)$$

式中的漂移项和扩散项分别为

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)}{\partial X_l} (\mathbf{D}) \mathbf{B}_l^T(\mathbf{X}, t), \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{B}(2\mathbf{D})\mathbf{B}^T, \end{cases} \quad (3)$$

且 $\mathbf{W}(t)$ 是 $r \times 1$ 的维纳过程向量。

当不考虑初始条件随机性时, 描述了系统状态变量 $\mathbf{X}$ 的实时概率密度函数(probability density function, PDF) $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)$ 的瞬态FPK方程为

$$\frac{\partial p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial [\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)]}{2 \partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial [A_i(\mathbf{x}, t) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)]}{\partial x_i}, \quad x_i, x_j \in \mathbb{R}_{\mathbf{X}}^n. \quad (4)$$

边界条件为^[15]

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{x}, t) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) \Big|_{x_i \rightarrow \infty} &= 0, \\ \frac{\partial [\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)]}{\partial x_i} \Big|_{x_i \rightarrow \infty} &= 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

归一化条件、非负性条件和初始条件为

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= 1, \\ p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) &\geq 0, \\ p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t_0) &= \prod_{j=1}^n \delta(x_j - x_{j0}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

在式(4)中, $A_i(\mathbf{x}, t)$ 为漂移系数矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$ 的分量; σ_{ij} 为扩散系数矩阵 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)$ 的分量。

当考虑初始条件的随机性时, FPK方程式(4)的初始条件从式(6)中的第3式变为

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t_0) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0, t_0), \quad (7)$$

式中 $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0, t_0)$ 表示初始时刻系统的状态变量满足的分布。

由于维度灾难的限制, 高维FPK难以求解。实际工程中通常只关心一些关键的物理量的联合分布, 比如大跨桥梁的跨中位移和速度。本研究采取对高维瞬态FPK方程降维的策略。

为了方便, 把状态变量 $\mathbf{X}$ 分成感兴趣的物理量 $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}_{\mathbf{X}_1}^n$ 和不感兴趣的量 $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}_{\mathbf{X}_2}^n$, 也就是 $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\} \in \mathbb{R}_{\mathbf{X}}^n = \mathbb{R}_{\mathbf{X}_1}^n \times \mathbb{R}_{\mathbf{X}_2}^n$ 。感兴趣物理量 $\mathbf{X}_1$ 的PDF用 $p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1, t)$ 表示。引入等价漂移系数 $a_i^e(\mathbf{x}_1, t)$ ^[16]和等价扩散系数 $b_{ij}^e(\mathbf{x}_1, t)$, 结合边界条件式(5), 对式(4)进行降维, 可得到如下的降维瞬态FPK方程^[20]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1, t)}{\partial t} &= \frac{\partial [b_{ij}^e(\mathbf{x}_1, t) p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1, t)]}{2 \partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial [a_i^e(\mathbf{x}_1, t) p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1, t)]}{\partial x_i}, \quad x_i, x_j \in \mathbb{R}_{\mathbf{X}_1}^n, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $a_i^e(\mathbf{x}_1, t)$ 和 $b_{ij}^e(\mathbf{x}_1, t)$ 分别为原系统漂移系数 $A_i(\mathbf{x}, t)$ 和扩散系数 $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ 在给定 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1$ 下的条件期望, 具体表达式如下:

$$\begin{cases} a_i^e(\mathbf{x}_1, t) = E[A_i(\mathbf{x}, t) | \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1], \\ b_{ij}^e(\mathbf{x}_1, t) = E[\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1]. \end{cases} \quad (9)$$

不考虑与考虑初始条件的随机性, 降维FPK方程式(8)的初始条件可以分别写为下面的两个表达式:

$$p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1, t_0) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n_1} \delta(x_j - x_{j0}), & x_j \in \mathbb{R}_{\mathbf{X}_1}^n, \\ p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_{1,0}, t_0), \end{cases} \quad (10)$$

式中 n_1 表示 $\mathbf{X}_1$ 的维度, $p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_{1,0}, t_0)$ 表示 t_0 时刻感兴趣状态变量 $\mathbf{X}_1$ 满足的分布。

注意, 降维FPK方程式(8)只与感兴趣的物理量 $\mathbf{X}_1$ 有关, 与系统整体维数无关, 有效地避免了维数灾难问题。同时该方法具有广泛适用性, 可应用于外激、纯参激及外激与参激励耦合情形, 为高维非线性系统的瞬态响应分析提供了强有力的理论工具。对于更为一般的非白噪声激励情形, 可采用扩展状态变量, 将原系统和以白噪声为输入的滤波系统组成为扩展的系统, 建立相应的FPK方程, 然后再对方程进行降维^[24]。接下来, 将结合物理和数据驱动的策略, 基于少量确定性分析的先验数据, 采用神经网络的方法来求解方程式(8)。

3 降维瞬态FPK方程的数值计算方法

3.1 连续时间的径向基神经网络回归

文献[20]基于统计决策理论证明了回归分析的最优解是给定样本的条件均值函数。因此, 可以通过回归的方法估计条件均值函数 $a_i^e(\mathbf{x}_1, t)$ 和 $b_{ij}^e(\mathbf{x}_1, t)$ 。对于本文研究的问题, 可通过一定数量的确定性分析给出样本。下面结合物理和数据驱动的策略, 基于少量确定性分析的先验数据, 采用连续时间的径向基神经网络回归模型估计 $a_i^e(\mathbf{x}_1, t)$ 和 $b_{ij}^e(\mathbf{x}_1, t)$, 即

$$\hat{u}(\mathbf{x}_1, t) = \sum_{j=1}^N w_j \Phi_j(\mathbf{x}_1, \nabla_j), \quad (11)$$

其中 $\hat{u}(\mathbf{x}_p, t)$ 为近似的 $a_i^e(\mathbf{x}_p, t)$ 或 $b_{ij}^e(\mathbf{x}_p, t)$; $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_p, t)^T$ 为网络的输入; w_j 和 N 分别为基函数 $\Phi_j(\mathbf{x}_p, \nabla_j)$ 的权重和个数. 选择高斯函数作为基函数, 表达式为

$$\Phi_j(\mathbf{x}_p, \nabla_j) = \exp\left[-\frac{\|\mathbf{x}_1 - \nabla_j\|^2}{2\sigma_j^2}\right], j = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

式中 ∇_j 和 σ_j 为第 j 个基函数的中心点和宽度. 选用均方误差作为损失函数:

$$\text{MSE} = \frac{1}{m_1} \sum_{k=1}^{m_1} [u^{(k)}(\mathbf{x}_p, t) - \hat{u}^{(k)}(\mathbf{x}_p, t)]^2, \quad (13)$$

式中 m_1 表示分布在整个时空域内用于训练的样本点数; $u^{(k)}(\mathbf{x}_p, t)$ 为通过确定性分析获得的时变漂移系数或扩散系数样本. 选用Adam优化器^[25]训练该模型获得 $\hat{u}^{(k)}(\mathbf{x}_p, t)$ 的最优估计. 径向基神经网络近似时变等价漂移或者扩散系数的示意图如图1所示. 注意, 选用径向基神经网络估计 $a_i^e(\mathbf{x}_p, t)$ 和 $b_{ij}^e(\mathbf{x}_p, t)$ 的时候, 是直接将整个时空域内的样本点放入网络进行训练, 这样能充分考虑不同时刻所估计系数之间的相关性. 同时, 样本点覆盖区域内估计的系数精度较好, 通过外插得到的非覆盖区域的系数可能存在一些误差^[20].

3.2 初始条件

当考虑初始条件的随机性时, 降维FPK方程的初始条件一般表达为以概率密度函数表示的随机变量(即式(10)的第2式), 无需特殊处理. 当初始条件为确定性时, 降维FPK方程的初始条件为具有奇异性的狄拉克函数(即式(10)的第1式). 为处理其奇异性, 根据短时

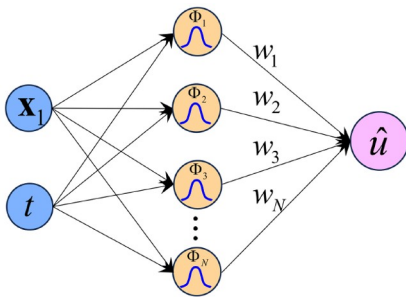


图1 (网络版彩图) 径向基神经网络近似时变等价漂移或者扩散系数

Figure 1 (Color online) Radial basis neural networks approximate the time-varying equivalent drift or diffusion coefficients.

高斯假设^[24], 可近似假设初始时刻附近的PDF $p_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_p, \tilde{t}_0)$ 满足正态分布, 本文取 $\tilde{t}_0 = 0.1$ s, $p_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_p, \tilde{t}_0)$ 的表达式为

$$p_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_p, \tilde{t}_0) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu})\right]}{\sqrt{(2\pi)^{n_1} \det(\boldsymbol{\Sigma})}}, \quad (14)$$

式中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 分别表示 $n_1 \times n_1$ 的协方差矩阵和均值矩阵, 可通过确定性分析的结果来估计. 随后, 从 $\tilde{t}_0$ 时刻开始, 采用物理信息的径向基神经网络逐时间步求解降维FPK方程^[26,27].

3.3 超球体采样策略

神经网络求解微分方程始于20世纪90年代. 2019年, 布朗大学Raissi等人系统重构了该方法, 命名为物理信息神经网络^[28]. 相比于有限差分法、有限元法和路径积分法等传统网格依赖型的数值方法, 该方法作为无网格方法, 在计算效率和高维问题求解上具有优势. Wang等人成功地将物理信息径向基神经网络用于求解瞬态FPK方程, 但随着维数增加, 训练数据量呈指数增长, 导致高维FPK方程求解面临存储和计算挑战^[26,27]. 在实际工程中, 系统状态变量的联合PDF集中在中心区域并呈径向衰减(如图2), 使用均匀选点策略会浪费计算资源. 为此, 本文采用高效的超球体采样法^[29], 来消除冗余的径向基函数中心点和训练样本点, 从而降低计算成本. 步骤如下.

(1) 在 n_1 维单位超立方体中生成均匀分布的数据点 $\vartheta_{j,k}$:

$$\vartheta_{j,k} \in [-1, 1]^{n_1}, j = 1, 2, \dots, n_1, k = 1, 2, \dots, N_0, \quad (15)$$

式中 N_0 表示总的的数据点数.

(2) 选出单位超球体内的样本点 $\vartheta_{j,k}$, 记为 $\hat{\vartheta}_{j,k}$, $\hat{\vartheta}_{j,k}$ 满足如下条件:

$$\sum_{j=1}^{n_1} \hat{\vartheta}_{j,k}^2 \leq 1. \quad (16)$$

2维情况下单位超球内所选数据点的示意图见图3(a). 为了评估超球体采样策略的有效性, 引入筛选率 ρ , 其表达式为

$$\rho = \frac{\hat{N}}{N_0}, \quad (17)$$

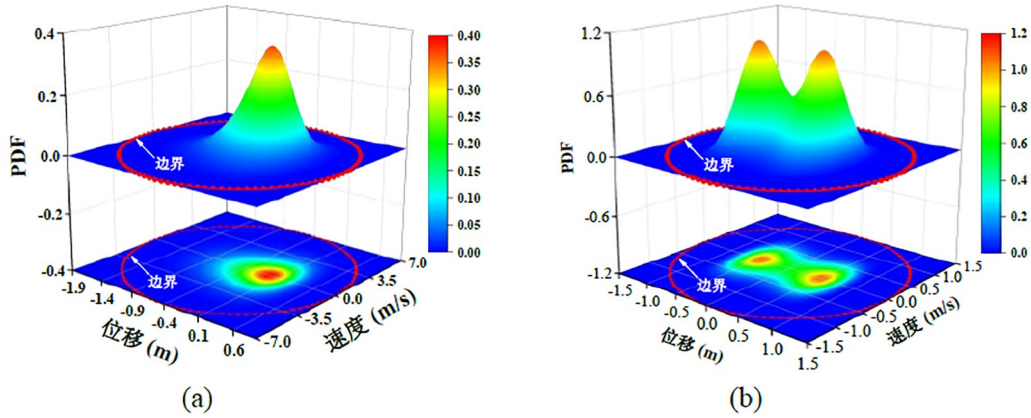


图 2 (网络版彩图)实际工程中的联合PDF. (a) 案例1; (b) 案例2

Figure 2 (Color online) Joint PDFs in practical engineering. (a) Case 1; (b) case 2.

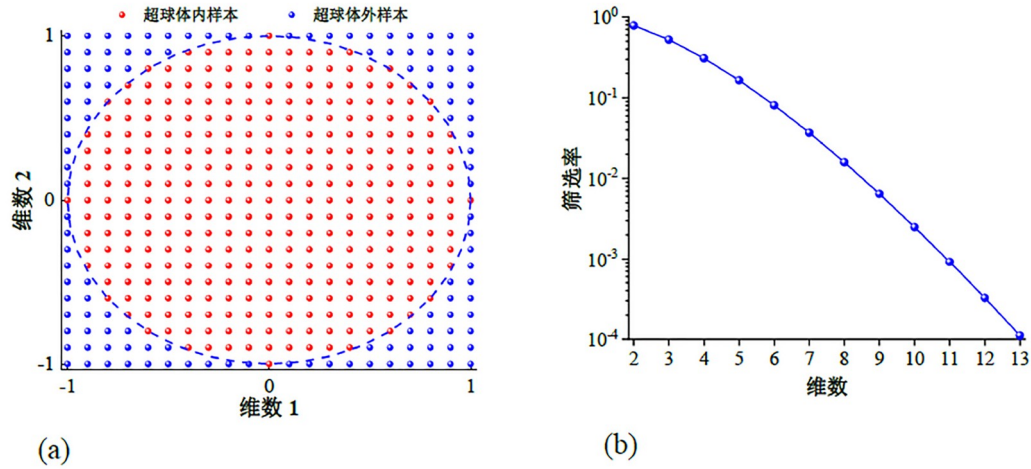


图 3 (网络版彩图)超球采样方法示意图. (a) 超球体内的样本点($n_1 = 2$); (b) 理想筛选率与维数的关系

Figure 3 (Color online) Diagram of hypersphere sampling method. (a) The samples within and outside the hypersphere ($n_1 = 2$); (b) the ideal screening ratio VS the dimension.

式中 $\hat{N}$ 表示单位超球内保留的数据点数. 如果选择的数据点足够密集, 筛选比就可以近似计算为单位超球体与单位超立方体的体积之比:

$$\rho = \frac{U_{n_1}}{M_{n_1}} = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n_1}{2}}}{2^{n_1} \left(\frac{n_1}{2}\right)!}, & n_1 = 2, 4, \dots, 2k, \\ \frac{\left(\frac{n_1-1}{2}\right)! \pi^{\frac{n_1-1}{2}}}{n_1!}, & n_1 = 3, 5, \dots, 2k+1, \end{cases} \quad (18)$$

式中 U_{n_1} 和 M_{n_1} 分别表示单位超球体与单位超立方体的

体积. 从图3(b)中可以看出, 筛选率随着维数的增加呈指数下降, 说明超球体采样方法可以有效地减少计算资源, 尤其是在维数较大的情况下.

(3) 对选定的数据点 $\hat{g}_{j,k}$ 执行缩尺和平移变换:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{j,k} &= \bar{a}_j \hat{g}_{j,k} + \bar{b}_j \\ &= (\bar{a}_1 \hat{g}_{1,k} + \bar{b}_1, \bar{a}_2 \hat{g}_{2,k} + \bar{b}_2, \dots, \bar{a}_{n_1} \hat{g}_{n_1,k} + \bar{b}_{n_1}), \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $\bar{g}_{j,l}$ 表示径向基函数中心点或训练样本点, $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n_1})$ 和 $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{n_1})$ 分别表示其对应的半径和中心位置.

3.4 实施步骤

本文所提的方法具体实施步骤如下.

第一步: 对高维的瞬态FPK方程进行降维, 得到降维的瞬态FPK方程式(8).

第二步: 生成 m 条白噪声样本曲线 $\{\xi^{(k)}(t)\}_{k=1}^m$ 并逐条代入式(1), 然后采用4阶Runge-Kutta法^[30,31]对式(1)进行确定性分析, 得到先验时程数据 $\{\mathbf{X}_1^{(k)}(t)\}_{k=1}^m$, $\{A_i^{(k)}(\mathbf{X}, t)\}_{k=1}^m$ 和 $\{\sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{X}, t)\}_{k=1}^m$.

第三步: 基于先验数据对 $\{\mathbf{X}_1^{(k)}(t), A_i^{(k)}(\mathbf{X}, t)\}_{k=1}^m$ 和 $\{\mathbf{X}_1^{(k)}(t), \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{X}, t)\}_{k=1}^m$, 采用连续时间的径向基神经网络近似整个时空域内的等价漂移系数 $a_i^e(\mathbf{x}_p, t)$ 和等价扩散系数 $b_{ij}^e(\mathbf{x}_p, t)$. 同时基于 $\{\mathbf{X}_1^{(k)}(t = \tilde{t}_0)\}_{k=1}^m$, 利用式(14)估计初始时刻附近的PDF $p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_p, \tilde{t}_0)$.

第四步: 将 $a_i^e(\mathbf{x}_p, t)$, $b_{ij}^e(\mathbf{x}_p, t)$ 和 $p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_p, \tilde{t}_0)$ 代入降维的FPK方程式(8), 采用物理信息的径向基神经网络结合超球体采样策略对其进行求解.

4 数值算例

本文通过两个数值算例并与MCS数据对比, 来验证所提方法的精度和效率.

4.1 算例1: 10自由度Van der pol系统

Van der pol系统常用于描述电子管电路中的非线性振荡现象、心脏电生理活动以及工程结构振动控制系统中的非线性阻尼特性等. 由于系统中位移的平方与速度之间存在强非线性耦合, 系统的PDF呈现多峰形态, 常用于检测各种非线性随机振动方法的精度. 本文考察一个受加性和乘性高斯白噪声激励下的10自由度Van der pol系统^[32], 其运动方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \mu_1(a_1x_1^2 - 1)\dot{x}_1 + (1 + \eta_1 + \nu_1)x_1 - \nu_1x_2 \\ = \xi_1(t) + x_1\xi_2(t), \\ \ddot{x}_i + \mu_i(a_ix_i^2 - 1)\dot{x}_i - \nu_ix_{i-1} + (1 + \eta_i + \nu_i)x_i - \nu_ix_{i+1} \\ = \xi_{2i-1}(t) + x_i\xi_{2i}(t), \quad i = 2, 3, \dots, 9, \\ \ddot{x}_{10} + \mu_{10}(a_{10}x_{10}^2 - 1)\dot{x}_{10} - \nu_{10}x_9 + (1 + \eta_{10} + \nu_{10})x_{10} \\ = \xi_{19}(t) + x_{10}\xi_{20}(t), \end{aligned} \quad (20)$$

式中 x_i , $\dot{x}_i$ 和 $\ddot{x}_i$ 分别表示无量纲的位移、速度和加速度; $\mu_i = 1.5$, $a_i = 4$, $\eta_i = 0.1$, $\nu_i = 1$; ξ_i 表示相互独立的高斯白噪声激励, 强度为 $2D = 1$. 本算例不考虑初始条件的随机性.

假设关心物理量 x_1 和 $\dot{x}_1$ 的联合分布, 建立如下的3维降维FPK方程:

$$\frac{\partial p(x_1, \dot{x}_1, t)}{\partial t} = \frac{\partial [b_{22}^e(x_1, \dot{x}_1, t)p]}{2\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_1} - \frac{\partial [a_1^e(x_1, \dot{x}_1, t)p]}{\partial x_1} - \frac{\partial [a_2^e(x_1, \dot{x}_1, t)p]}{\partial \dot{x}_1}. \quad (21)$$

根据定义^[20], 式(21)中 $a_1^e(x_1, \dot{x}_1, t)$ 和 $b_{22}^e(x_1, \dot{x}_1, t)$ 存在解析解, $a_2^e(x_1, \dot{x}_1, t)$ 需要结合物理和数据驱动的策略来近似, 各系数表达式为

$$\begin{cases} a_1^e(x_1, \dot{x}_1, t) = E[\dot{x}_1 | X_1(t) = x_1, \dot{X}_1(t) = \dot{x}_1] = \dot{x}_1, \\ a_2^e(x_1, \dot{x}_1, t) = E[\nu_1x_2 - \mu_1(a_1x_1^2 - 1)\dot{x}_1 - (1 + \eta_1 + \nu_1)x_1 | X_1(t) = x_1, \dot{X}_1(t) = \dot{x}_1], \\ b_{22}^e(x_1, \dot{x}_1, t) = 2D(1 + x_1^2). \end{cases} \quad (22)$$

注意, 虽然本算例考察系统的漂移和扩散系数是非时变的, 但是等价漂移系数 $a_2^e(x_1, \dot{x}_1, t)$ 与系统响应有关. 因此, 该系数为时变的, 更具体的可以参考文献^[33]. 基于400次确定性分析的数据, 采用径向基神经网络来近似 $a_2^e(x_1, \dot{x}_1, t)$, 近似的 $a_2^e(x_1, \dot{x}_1, t)$ 在 $t = 1$ 和16 s时如图4所示. 由图可知近似的 $a_2^e(x_1, \dot{x}_1, t)$ 呈现复杂的S形状, 与确定性分析的数据点吻合得很好, 测试集上的均方误差为0.002, 表明使用径向基神经网络估计的时变等价漂移系数具有较高的精度.

图5给出了 $t = 1, 3, 20$ s时刻所提方法获得的边缘PDF位移 $p(x_1, t)$ 和速度 $p(\dot{x}_1, t)$ 与 4×10^7 MCS结果的对比. 由图可知, 随着时间的演化, 位移PDF从单峰向双峰过渡, 速度PDF一直呈现单峰形状, 但响应的范围逐渐增大. 在初始3 s内, 系统响应的PDF变化较大, 之后的响应变化相对较小. 同时, 所提方法获得的PDF与MCS结果在线性和对数坐标系下对比得很好, 尾部精度达到 10^{-4} , 展示了所提方法的高精度性, 可用于可靠度评估. 所提方法与 4×10^7 MCS法获得的联合PDF $p(x_1, \dot{x}_1, t)$ 在 $t = 1, 20$ s时刻如图6所示. 可以发现所提方法获得的联合PDF比MCS结果在峰值附近更为

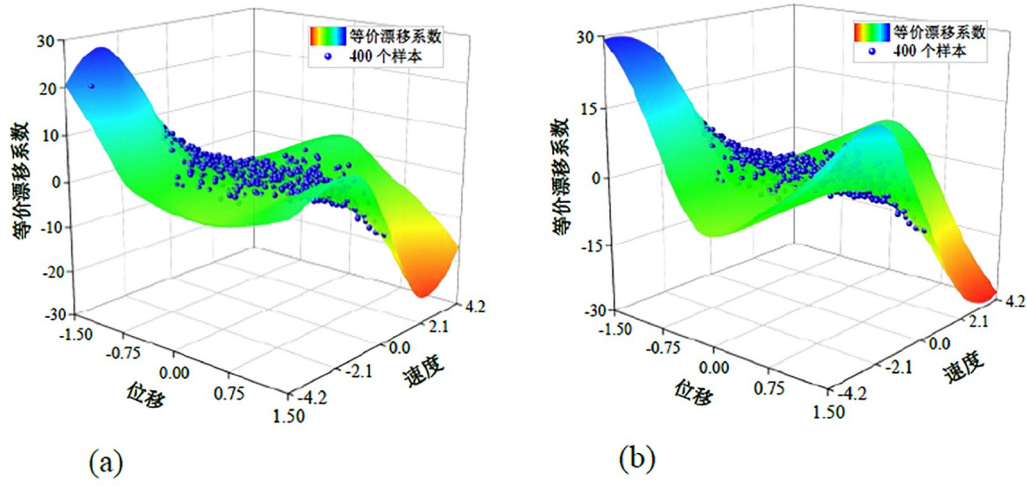


图 4 (网络版彩图)估计的等价漂移系数 $a_1^e(x_1, \dot{x}_1, t)$. (a) $a_1^e(x_1, \dot{x}_1, t)(t = 1 \text{ s})$; (b) $a_1^e(x_1, \dot{x}_1, t)(t = 16 \text{ s})$
 Figure 4 (Color online) The estimated equivalent drift coefficient $a_1^e(x_1, \dot{x}_1, t)$. (a) $a_1^e(x_1, \dot{x}_1, t)(t = 1 \text{ s})$; (b) $a_1^e(x_1, \dot{x}_1, t)(t = 16 \text{ s})$.

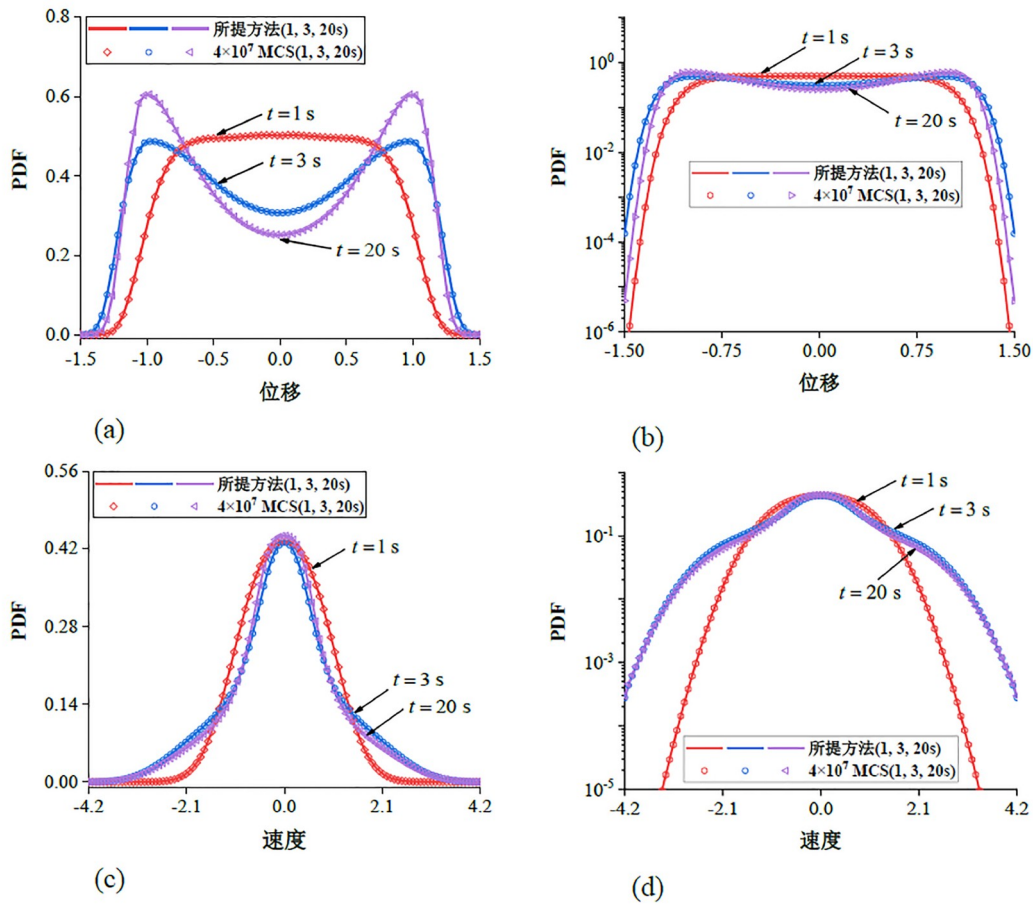


图 5 (网络版彩图) $t = 1, 3, 20 \text{ s}$ 时刻边缘PDF位移 $p(x_1, t)$ 和速度 $p(\dot{x}_1, t)$. (a) 位移 x_1 (线性坐标系); (b) 位移 x_1 (对数坐标系); (c) 速度 $\dot{x}_1$ (线性坐标系); (d) 速度 $\dot{x}_1$ (对数坐标系)
 Figure 5 (Color online) The marginal PDF of displacement $p(x_1, t)$ and velocity $p(\dot{x}_1, t)$ at $t = 1, 3, 20 \text{ s}$. (a) Displacement x_1 (linear scale); (b) displacement x_1 (log scale); (c) velocity $\dot{x}_1$ (linear scale); (d) velocity $\dot{x}_1$ (log scale).

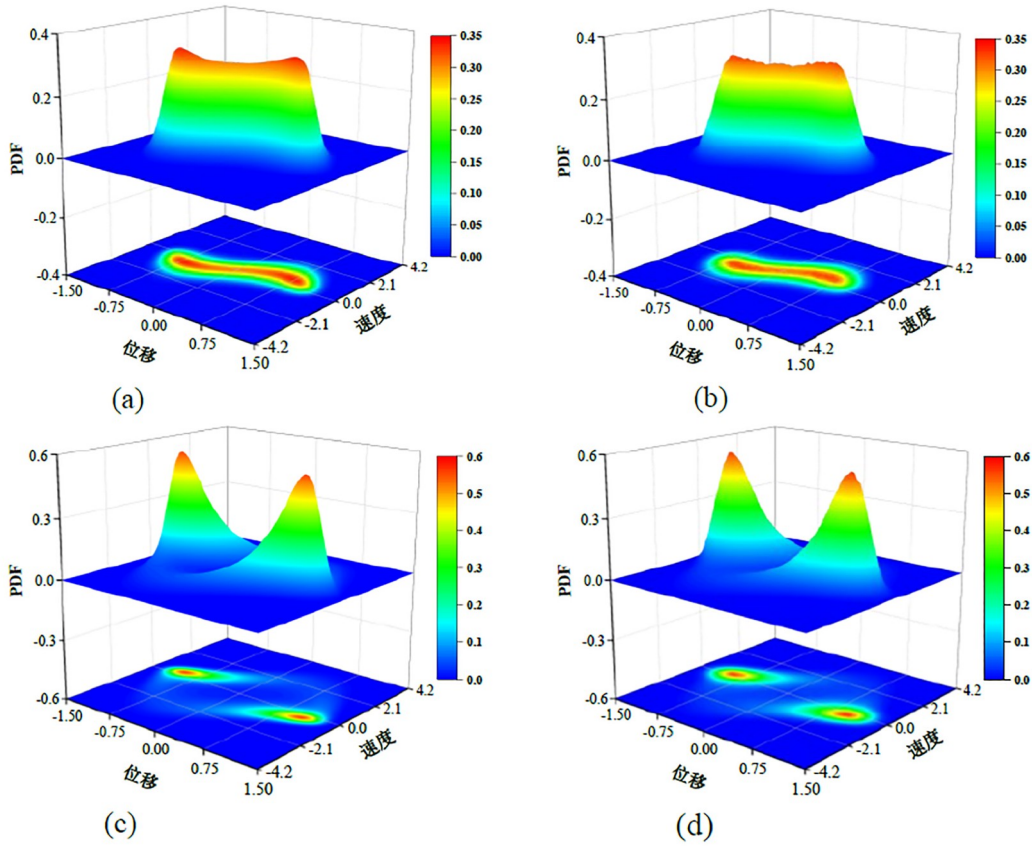


图 6 (网络版彩图) $t = 1, 20$ s 时刻联合 PDF $p(x_1, \dot{x}_1, t)$. (a) 所提方法($t = 1$ s); (b) MCS($t = 1$ s); (c) 所提方法($t = 20$ s); (d) MCS($t = 20$ s)

Figure 6 (Color online) The joint PDF $p(x_1, \dot{x}_1, t)$ at $t = 1, 20$ s. (a) Proposed method ($t = 1$ s); (b) MCS($t = 1$ s); (c) Proposed method ($t = 20$ s); (d) MCS($t = 20$ s).

光滑.

在求解效率方面, 所提方法总用时为196 s, 包括400次确定性分析6 s, 近似时变等价漂移系数100 s, 求解降维瞬态FPK方程90 s. 4×10^7 MCS用时为164 h. 所提方法的效率为MCS的3012倍. 此外, 由于求解降维FPK方程耗时较少, 该算例没有采用超球体采样策略. 注意, 对于更高维的系统, 确定性分析的时长将增加, 而所提方法中近似时变等价漂移系数和求解降维FPK方程的时长不变, 因此所提方法求解效率将更为突出.

图7描述了 $\bar{t}_0$ 取值对边缘位移PDF $p(x_1, t)$ 和速度PDF $p(\dot{x}_1, t)$ 的影响. 可以发现当 $\bar{t}_0 = 0$ 时, 即不对具有奇异性的初始条件进行处理, 所提方法的位移PDF $p(x_1, t)$ 与MCS的结果有较大的误差, 而速度PDF

$p(\dot{x}_1, t)$ 只在峰值处有一定的误差. 而当 $\bar{t}_0 = 0.1$ 或 0.3 s 时, 即利用短时高斯假设对具有奇异性的初始条件进行了处理, 所提方法的边缘位移PDF $p(x_1, t)$ 和速度PDF $p(\dot{x}_1, t)$ 均与MCS的结果对比得很好.

4.2 算例2: 20自由度链式非线性系统

链式多自由度系统常用于描述实际工程中的多层建筑^[34]、多跨桥^[35]、多叶片涡轮机^[36]等. 本文考察一个受乘性高斯白噪声激励的20自由度链式非线性系统, 如图8所示. 该系统的运动方程为

$$m_i \ddot{x}_i + C_i + K_i + \tilde{K}_i - \tilde{K}_{i-1} = F_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 20, \quad (23)$$

式中 m_i 表示质量; C_i 表示非线性阻尼力; K_i 表示恢复力; $\tilde{K}_i$ 表示相邻单元之间的耦合非线性恢复力. 其

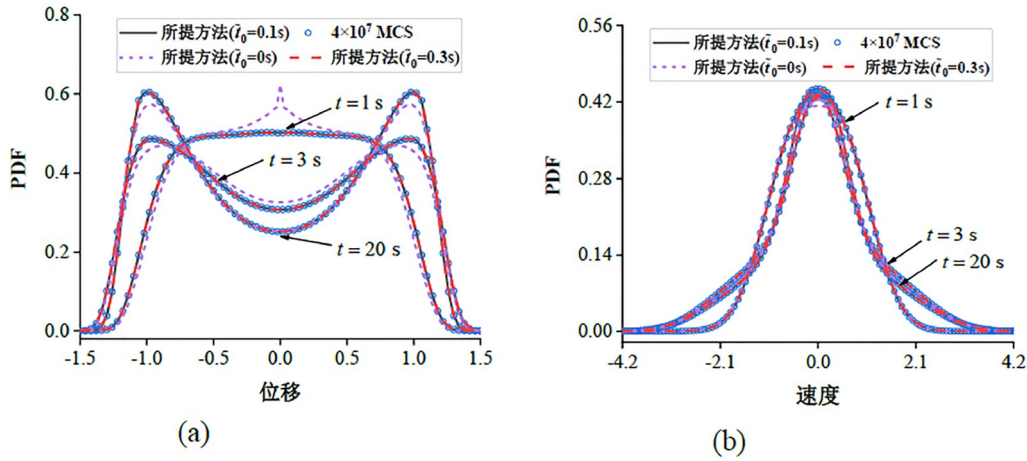


图 7 (网络版彩图) $\bar{t}_0$ 取值对边缘 PDF 位移 $p(x_1, t)$ 和速度 $p(\dot{x}_1, t)$ 的影响. (a) 位移 x_1 ; (b) 速度 $\dot{x}_1$.
Figure 7 (Color online) The marginal PDF of displacement $p(x_1, t)$ and velocity $p(\dot{x}_1, t)$ under various $\bar{t}_0$. (a) Displacement x_1 ; (b) velocity $\dot{x}_1$.

中 $\tilde{K}_0 = \tilde{K}_{20} = 0$, C_i , K_i 和 $\tilde{K}_i$ 的表达式为

$$\begin{aligned} C_i &= \alpha_i \dot{x}_i + \beta_i \dot{x}_i^3, \quad i = 1, 2, \dots, 20, \\ K_i &= k_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, 20, \\ \tilde{K}_i &= a_i(x_i - x_{i+1}) + b_i(x_i - x_{i+1})^3, \quad i = 1, 2, \dots, 19, \end{aligned} \quad (24)$$

式中 k_i 表示刚度; a_i 和 b_i 分别表示线性和非线性刚度系数; α_i 和 β_i 分别表示线性和非线性阻尼系数. 各参数取值见表 1. $F_i(t)$ 表示随机激励, 其表达式为

$$F_i(t) = x_i \zeta_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 20, \quad (25)$$

式中 $\zeta_i(t)$ 表示相互独立的高斯白噪声激励, 具有相同的强度 $2D = 0.04 \text{ m}^2/\text{s}^3$.

假设关心第一个单元的位移 x_1 和速度 $\dot{x}_1$ 与第 20 个单元的位移 x_{20} 和速度 $\dot{x}_{20}$ 的联合 PDF, 也就是 $\mathbf{X}_1 = \{x_1, \dot{x}_1, x_{20}, \dot{x}_{20}\}$, 建立如下 5 维瞬态 FPK 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1, t)}{\partial t} &= \frac{\partial [b_{1,1}^e(\mathbf{x}_1, t) p_{\mathbf{X}_1}]}{2 \partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial [b_{39,39}^e(\mathbf{x}_1, t) p_{\mathbf{X}_1}]}{2 \partial x_{20} \partial x_{20}} \\ &\quad - \frac{\partial [a_1^e(\mathbf{x}_1, t) p_{\mathbf{X}_1}]}{\partial x_1} - \frac{\partial [a_2^e(\mathbf{x}_1, t) p_{\mathbf{X}_1}]}{\partial \dot{x}_1} \\ &\quad - \frac{\partial [a_{39}^e(\mathbf{x}_1, t) p_{\mathbf{X}_1}]}{\partial x_{20}} - \frac{\partial [a_{40}^e(\mathbf{x}_1, t) p_{\mathbf{X}_1}]}{\partial \dot{x}_{20}}, \end{aligned} \quad (26)$$

$x_1, \dot{x}_1, x_{20}, \dot{x}_{20} \in \mathbb{R}_{\mathbf{X}_1}^{40}$

根据定义, 式(26)中 $a_1^e(\mathbf{x}_1, t) = \dot{x}_1$, $a_{40}^e(\mathbf{x}_1, t) = \dot{x}_{20}$, $b_{1,1}^e(\mathbf{x}_1, t) = x_1^2$, $b_{39,39}^e(\mathbf{x}_1, t) = x_{20}^2$. 基于 400 次确定性分析的先验数据, 等价漂移系数 $a_2^e(\mathbf{x}_1, t)$ 和 $a_{39}^e(\mathbf{x}_1, t)$ 通过径

向基神经网络进行估计, 估计的系数在测试集上的均方误差分别为 0.004 和 0.07, 表明使用径向基神经网络估计的等价漂移系数具有较高的精度.

对于有限差分法、有限元法和路径积分法, 随着 FPK 方程维度的增加, 系数矩阵的维数呈指数级增长, 导致数据存储需求急剧上升. 因此, 该方法难以适用于 4 维及以上维度的 FPK 方程应用. 本算例选用无网格的物理信息神经网络结合超球体采样策略来求解 5 维的 FPK 方程式(26). 经过超球体采样策略的筛选, 保留的中心点和训练点均为 85568 和 576496, 筛选率分别为 22.6% 和 23.1%. 注意, 5 维瞬态 FPK 方程求解一直是一个难题. 本文借助于超球体采样策略, 删除不必要配置的中心点和样本点, 无网格的物理信息径向基神经网络可以高效地求解 5 维的瞬态 FPK 方程.

由图 9 可知, 所提方法获得的 PDF 与 MCS 的结果对比很好, 尾部精度可达到 10^{-4} . 随着时间的演化, 位移和速度的 PDF 一直呈现单峰形状, 响应的范围逐渐增大. 初始几秒内系统响应的 PDF 变化较大, 之后放缓. 图 10 为通过所提方法获得的边缘联合 PDF 与 10^7 MCS 结果的对比, 发现所提方法获得的联合 PDF 会比 MCS 的结果更为光滑. 上述结果表明该方法可用于考虑多个重要状态变量耦合的可靠度评估.

对于该算例, 总耗时 5.96 h, 其中 400 次确定性分析 35 s, 近似未知系数 100 s, 求解降维的 5 维 FPK 方程 5.92 h. 由于本研究关心 4 个重要状态变量的联合分布, 因此计算时间主要消耗在求解降维的 5 维 FPK 方程上.

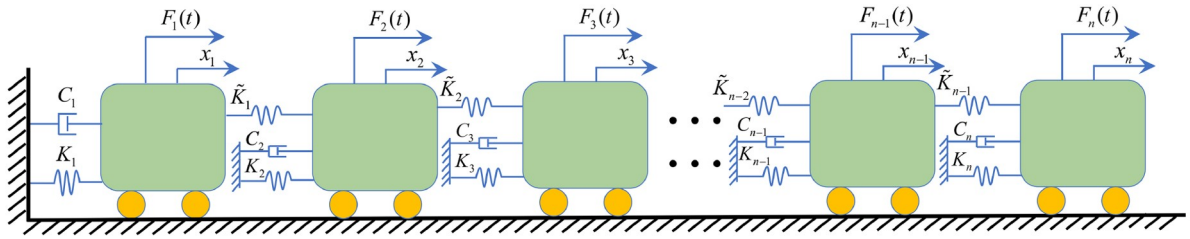


图 8 (网络版彩图)链式多自由度非线性系统

Figure 8 (Color online) Chain-like nonlinear system with multiple degrees of freedom.

表 1 模型参数值

Table 1 The parameter in the model

自由度号 <i>i</i>	1~4	5~8	9~12	13~16	17~20
m_i	20	20	40	40	60
k_i	200	200	210	210	220
a_i	4	4.2	4.4	4.6	4.8
b_i	3	3.1	3.2	3.3	3.4
α_i	0.3	0.31	0.32	0.33	0.34
β_i	0.2	0.21	0.22	0.23	0.24

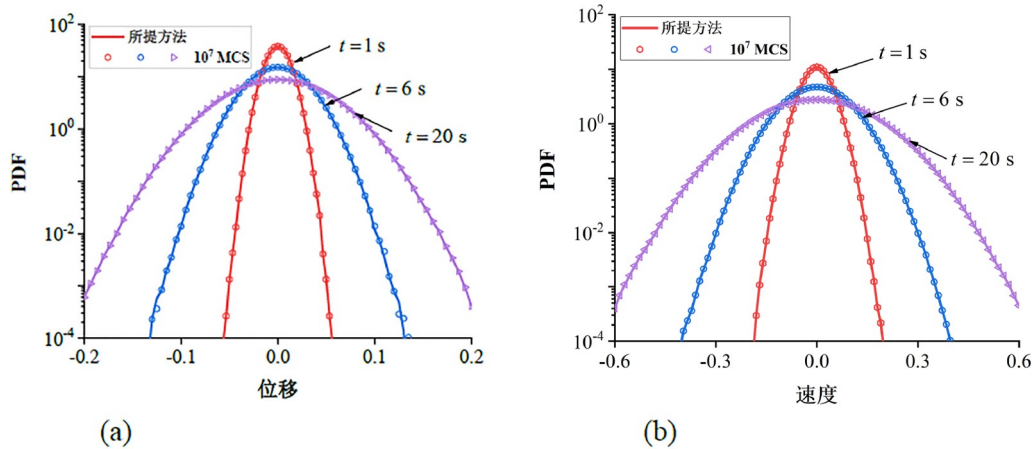


图 9 (网络版彩图) $t = 1, 6, 20$ s时刻位移 x_1 和速度 $\dot{x}_1$ 的PDF. (a) 位移 x_1 (对数坐标); (b) 速度 $\dot{x}_1$ (对数坐标)

Figure 9 (Color online) The PDFs of displacement x_1 and velocity $\dot{x}_1$ at $t = 1, 6, 20$ s. (a) Displacement x_1 (log scale); (b) velocity $\dot{x}_1$ (log scale).

相比之下, 10^7 MCS耗时244 h, 表明本文所提方法仍然具有显著的计算效率优势. 注意, 若像算例1一样, 仅关心2维的联合分布, 本方法的计算效率将达到MCS的3700倍, 这主要得益于计算时间主要消耗在确定性分析阶段.

5 结论与讨论

本文基于FPK方程理论, 提出了一种随机激励下高维强非线性系统联合瞬态响应的高效求解方法. 首先, 对高维FPK方程进行降维, 得到仅支配原系统感兴

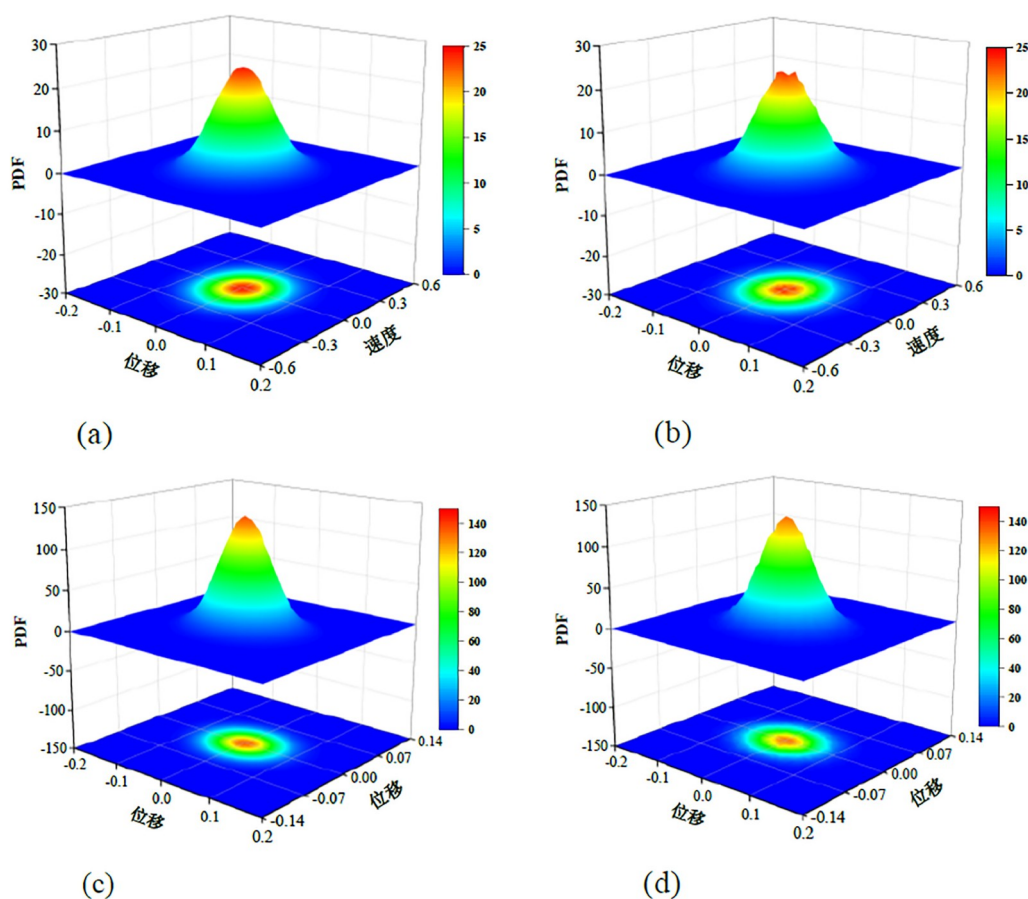


图 10 (网络版彩图) $t = 20$ s 时刻 2 维联合 PDF. (a) $p(x_1, \dot{x}_1)$ (所提方法); (b) $p(x_1, \dot{x}_1)$ (MCS); (c) $p(x_1, x_{20})$ (所提方法); (d) $p(x_1, x_{20})$ (MCS)

Figure 10 (Color online) The joint PDFs at $t = 20$ s. (a) $p(x_1, \dot{x}_1)$ (proposed method); (b) $p(x_1, \dot{x}_1)$ (MCS); (c) $p(x_1, x_{20})$ (proposed method); (d) $p(x_1, x_{20})$ (MCS).

趣状态变量 PDF 的降维 FPK 方程. 接着, 结合物理与数据驱动的方法, 利用少量确定性分析的先验数据, 采用连续时间的径向基神经网络对等价漂移系数和扩散系数进行估计. 同时, 基于短时高斯假设, 对具有奇异性的初始条件进行处理. 最后, 通过无网格的物理信息径向基神经网络结合超球体采样策略, 求解降维后的瞬态 FPK 方程, 获得感兴趣物理量的非高斯联合 PDF. 通过 10 自由度的强非线性 Van der Pol 系统和 20 自由度的链式非线性系统的数值实验, 并与 MCS 数据对比, 验

证了该方法的精度和效率. 结果表明, 仅基于 400 次左右确定性分析的结果, 径向基神经网络能很好地估计复杂形状的时变等价漂移和扩散系数, 进而高效地捕捉高维强非线性系统在各个时刻响应的联合 PDF, 甚至是具有挑战性的 5 维 FPK 方程的求解. 尾部精度达 10^{-4} 且求解效率为 MCS 的 3700 倍. 研究成果为多失效模式耦合的高维非线性系统可靠度评估和优化设计提供了有效的理论工具和技术手段, 在大型土木工程抗震设计、航空航天结构安全评估等领域具有重要应用价值.

参考文献

- 1 Ma Y, Tang X, Wang Y, et al. Design of nonlinear metal rubber isolator subjected to random vibration. *Mech Syst Signal Processing*, 2023, 197: 110375
- 2 Xiao Y, Wu Z, Wang T, et al. Experimental and numerical investigation on hydrodynamic behavior of a long curved pipeline system with

- multiple floating bodies in immersion construction. [Ocean Eng](#), 2023, 270: 113629
- 3 Cross E J, Worden K. Approximation of the Duffing oscillator frequency response function using the FPK equation. [J Sound Vib](#), 2011, 330: 743–756
 - 4 Wu W F, Lin Y K. Cumulant-neglect closure for non-linear oscillators under random parametric and external excitations. [Int J Non-Linear Mech](#), 1984, 19: 349–362
 - 5 Fujimura K, Der Kiureghian A. Tail-equivalent linearization method for nonlinear random vibration. [Probab Eng Mech](#), 2007, 22: 63–76
 - 6 Tsuchida T, Kimura K. Stationary response analysis for a linear system under non-Gaussian random excitation by the equivalent non-Gaussian excitation method and the Hermite moment model. [Probab Eng Mech](#), 2023, 74: 103504
 - 7 Wall F J, Bucher C G. Sensitivity of expected exceedance rate of SDOF-system response to statistical uncertainties of loading and system parameters. [Probab Eng Mech](#), 1987, 2: 138–146
 - 8 Naess A, Johnsen J M. Response statistics of nonlinear, compliant offshore structures by the path integral solution method. [Probab Eng Mech](#), 1993, 8: 91–106
 - 9 Yu J S, Cai G Q, Lin Y K. A new path integration procedure based on Gauss-Legendre scheme. [Int J Non-Linear Mech](#), 1997, 32: 759–768
 - 10 Zhang H, Xu Y, Liu Q, et al. Solving Fokker-Planck equations using deep KD-tree with a small amount of data. [Nonlinear Dyn](#), 2022, 108: 4029–4043
 - 11 Tang K, Wan X, Liao Q. Adaptive deep density approximation for Fokker-Planck equations. [J Comput Phys](#), 2022, 457: 111080
 - 12 Qian J, Chen L, Sun J Q. Non-stationary stochastic response determination of vibro-impact system under combination harmonic and Gaussian white noise excitations. [Eng Struct](#), 2024, 304: 117677
 - 13 Huang Z L, Zhu W Q. Stochastic averaging of quasi-integrable Hamiltonian systems under bounded noise excitations. [Probab Eng Mech](#), 2004, 19: 219–228
 - 14 Zhu W Q, Huang Z L. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated partially integrable Hamiltonian systems. [Int J Non-Linear Mech](#), 2001, 36: 39–48
 - 15 Er G K. Methodology for the solutions of some reduced Fokker-Planck equations in high dimensions. [Annalen der Physik](#), 2011, 523: 247–258
 - 16 Chen J, Rui Z. Dimension-reduced FPK equation for additive white-noise excited nonlinear structures. [Probab Eng Mech](#), 2018, 53: 1–13
 - 17 Chen J B, Lyu M Z. Globally-evolving-based generalized density evolution equation for nonlinear systems involving randomness from both system parameters and excitations. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*. 2022. 20220356
 - 18 Chen J B, Lyu M Z. Probabilistic response determination of high-dimensional nonlinear dynamical systems enforced by parametric multiple Poisson white noises. [Nonlinear Dyn](#), 2024, 112: 11283–11298
 - 19 Sun T, Chen J. Physically driven exact dimension reduction of a class of nonlinear multidimensional systems subjected to additive white noise. [ASCE-ASME J Risk Uncertainty Eng Syst Part A-Civ Eng](#), 2022, 8: 04022012
 - 20 Xiao Y, Chen L, Duan Z, et al. An efficient method for solving high-dimension stationary FPK equation of strongly nonlinear systems under additive and/or multiplicative white noise. [Probab Eng Mech](#), 2024, 77: 103668
 - 21 Xiao Y, Chen L, Duan Z, et al. Joint stationary response prediction of high-dimension strongly nonlinear systems with both uncertain parameters and stochastic excitation by solving FPK equation. [Probab Eng Mech](#), 2025, 81: 103795
 - 22 Guo S S. Transient responses of stochastic systems under stationary excitations. [Probab Eng Mech](#), 2018, 53: 59–65
 - 23 Starikov V, Shchipanov A, Demyanov V, et al. Feature extraction and pattern recognition in time-lapse pressure transient responses. [Geoenergy Sci Eng](#), 2024, 242: 213160
 - 24 Sun J Q. *Stochastic Dynamics and Control*. Amsterdam: Elsevier Science, 2006
 - 25 Kingma D P, Ba J. Adam: A method for stochastic optimization.. arXiv: [1412.6980](#)
 - 26 Wang X, Jiang J, Hong L, et al. Random vibration analysis with radial basis function neural networks. [Int J Dynam Control](#), 2022, 10: 1385–1394
 - 27 Wang X, Jiang J, Hong L, et al. Radial basis function neural networks solution for stationary probability density function of nonlinear stochastic systems. [Probab Eng Mech](#), 2023, 71: 103408
 - 28 Raissi M, Perdikaris P, Karniadakis G E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. [J Comput Phys](#), 2019, 378: 686–707
 - 29 Xin F, Wang P, Wang Q, et al. Parallel adaptive ensemble of metamodels combined with hypersphere sampling for rare failure events. [Reliability Eng Syst Saf](#), 2024, 246: 110090

- 30 Butcher J C. On Runge-Kutta processes of high order. *J Aust Math Soc*, 1964, 4: 179–194
- 31 Iserles A. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2009
- 32 Hirano N, Rybicki S. Existence of limit cycles for coupled van der Pol equations. *J Differ Equ*, 2003, 195: 194–209
- 33 Sun T, Lyu M, Chen J. Property of intrinsic drift coefficients in globally-evolving-based generalized density evolution equation for the first-passage reliability assessment. *Acta Mech Sin*, 2023, 39: 722471
- 34 Nayeri R D, Masri S F, Ghanem R G, et al. A novel approach for the structural identification and monitoring of a full-scale 17-story building based on ambient vibration measurements. *Smart Mater Struct*, 2008, 17: 025006
- 35 Zhou M, Zhong W, Williams F W. Wave propagation in substructural chain-type structures excited by harmonic forces. *Int J Mech Sci*, 1993, 35: 953–964
- 36 Lei Y, Qiu H, Zhang F. Identification of structural element mass and stiffness changes using partial acceleration responses of chain-like systems under ambient excitations. *J Sound Vib*, 2020, 488: 115678

An efficient method for the solution of joint transient response PDF of high-dimension strongly nonlinear systems under random excitation

XIAO YangYang^{1,2}, CHEN LinCong³, DUAN ZhongDong^{1,2} & SUN JianQiao⁴

¹ School of Intelligent Civil and Ocean Engineering, Harbin Institute of Technology (Shenzhen), Shenzhen 518055, China

² Guangdong Provincial Key Laboratory of Intelligent and Resilient Structures for Civil Engineering, Shenzhen 518055, China

³ College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China

⁴ Department of Mechanical Engineering, School of Engineering, University of California Merced, Merced, CA 95343, USA

Engineering structures may fail under strong nonlinear random vibrations, yet existing theories and methods still fall from the need in practical engineering, especially for the high-dimension strongly nonlinear systems. Moreover, systems often undergo a prolonged transient phase before reaching a steady state, during which failures may occur. Therefore, conducting transient response analysis for high-dimension strongly nonlinear systems is of significant importance. To date, the classical theory for describing the probabilistic response of such systems remains the Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) equation. However, as dimensionality increases, conventional mesh-dependent numerical methods like finite difference and finite element methods suffer from the curse of dimensionality, leading to rapidly declining efficiency or even computational infeasibility. This paper proposes a novel meshless solution technique combined with dimension-reduced FPK equation strategy to efficiently solve multidimensional transient FPK equations (up to 5-dimensional in our case studies). Specifically, the subspace decomposition method is employed to reduce the dimension of the high-dimensional FPK equation. Subsequently, by integrating physics-based and data-driven strategies with a small amount of prior data from deterministic analysis, a continuous-time radial basis function neural network regression model is employed to estimate the complex-shaped equivalent drift and diffusion coefficients. Singular initial conditions are handled via a short-time Gaussian assumption. Finally, a meshless physics-informed radial basis function neural network combined with a hypersphere sampling strategy is used to solve the reduced transient FPK equation, obtaining the non-Gaussian joint probability density function (PDF) of the interested quantities. Two numerical examples of high-dimensional nonlinear systems validate the accuracy and efficiency of the proposed method against Monte Carlo simulations (MCS). Results show that with only 400 deterministic analyses, the method accurately captures the joint PDFs of the reduced system responses at all time instants, achieving a tail accuracy of 10^{-4} and a computational efficiency up to 3700 times that of MCS.

high-dimension strongly nonlinear systems, FPK equation, radial basis function neural network, hypersphere sampling strategy, joint PDF

doi: [10.1360/SST-2025-0072](https://doi.org/10.1360/SST-2025-0072)