



输入饱和约束下多四旋翼无人机有限时间容错编队控制研究

王晴^{1,2}, 程俊哲¹, 胡宏剑¹, 辛斌^{1,2*}, 董怡³

1. 北京理工大学自动化学院, 北京 100081

2. 自主智能无人系统全国重点实验室, 北京 100081

3. 同济大学电子与信息工程学院, 上海自主智能无人系统科学中心, 上海 200092

* E-mail: brucebin@bit.edu.cn

收稿日期: 2025-11-20; 接受日期: 2026-01-06; 网络版发表日期: 2026-03-09

国家自然科学基金基础科学中心项目(编号: 62088101)、北京市自然科学基金项目(编号: 4252050)和国家自然科学基金杰出青年科学基金项目(编号: 62425304)资助

摘要 针对具有输入饱和约束与执行器故障的多四旋翼无人机编队控制问题, 本文提出了一种基于命令滤波反步法的有限时间容错控制策略. 在现实复杂环境下运行的无人机系统面临多重挑战: 因机械磨损等因素易发生具有非线性耦合特征的执行器故障, 控制输入受限于物理器件功率而存在饱和约束, 同时系统还存在参数不确定性与外部扰动, 严重影响编队控制的可靠性、鲁棒性及暂态性能. 为此, 本文聚焦于上述多重复杂因素耦合条件下的有限时间领导-跟随编队跟踪控制问题. 具体而言, 首先引入有限时间命令滤波器, 以解决传统反步法中微分导致的高计算复杂度问题, 并设计相应补偿机制以消除滤波误差. 其次, 针对系统中的未知非线性动态, 采用径向基神经网络进行逼近, 并设计相应自适应律在线更新权值. 此外, 针对输入饱和问题, 设计了抗饱和补偿器以缓解其负面影响. 在此基础上, 基于有限时间稳定性理论, 对闭环系统的有限时间稳定性进行了严格分析, 证明了系统闭环信号的有限时间有界性. 最后, 通过两组仿真对比结果验证了所提控制算法的有效性. 结果显示, 本文所提控制算法在执行器故障及输入饱和约束的共同影响下, 能够确保无人机编队在有限时间内快速、准确地跟踪期望队形, 并展现了优秀的容错性能、鲁棒性及暂态响应特性, 为复杂不确定环境下无人机集群的高精度、高可靠协同控制提供了一种有效的解决方案.

关键词 四旋翼无人机, 编队控制, 容错控制, 输入饱和, 有限时间控制

1 引言

近年来, 随着无人机(unmanned aerial vehicles, UAVs)技术的高速发展, 其已在众多领域得到应用^[1,2].

目前常见的无人机依据形态主要可以分为固定翼飞机和旋翼型飞机两种, 其中四旋翼型无人机是其中较为常见的旋翼型无人机. 相较于固定翼无人机, 四旋翼型无人机不需要跑道即可实现便捷起降, 并能够实现

引用格式: 王晴, 程俊哲, 胡宏剑, 等. 输入饱和约束下多四旋翼无人机有限时间容错编队控制研究. 中国科学: 技术科学, 2026, 56: 681–696
Wang Q, Cheng J Z, Hu H J, et al. Finite-time fault-tolerant formation control of multiple quadrotor UAVs under input saturation (in Chinese). Sci Sin Tech, 2026, 56: 681–696, doi: [10.1360/SST-2025-0359](https://doi.org/10.1360/SST-2025-0359)

定点悬停和灵活的飞行姿态调整, 具有高机动性和控制相对简单的优势^[3]. 得益于这些特点, 四旋翼无人机已被广泛应用于空域巡逻、农业侦察、军事探测等领域^[4].

四旋翼无人机的实际应用离不开精确的姿态调整和位置跟踪, 控制算法设计是其中的关键一环. 目前, 针对四旋翼无人机位置和姿态控制的技术方法主要包括PID (proportional-integral-derivative)控制、滑模控制和反步控制方法. 汪震东等人^[5]对四旋翼无人机非线性动力学模型进行线性化处理后, 结合模型预测控制和传统PID控制设计了一种复合PID控制器以实现姿态角控制. Hou等人^[6]提出了一种基于反步滑模方法的四旋翼飞行器自适应鲁棒轨迹跟踪控制算法, 采用自适应估计来处理不确定的环境参数. Zhao等人^[7]通过集成命令滤波器提出了一种离散时间自适应模糊反步控制方案, 解决了四旋翼飞行器高度和姿态的跟踪控制问题. Wang等人^[8]设计了一种基于反步法的鲁棒自适应控制策略, 实现了在参数不确定、外部干扰和测量噪声影响下四旋翼飞行器轨迹跟踪的全局稳定性.

由于载荷、续航时间有限等客观因素, 单机往往难以独立完成大范围巡视、多点覆盖或协同运输等任务, 因此多无人机协作已成为提升系统整体能力与任务效率的重要途径, 其中, 多智能体协同一致性控制及分布式编队控制技术是实现多机协作的核心要素. 对此, Oh等人^[9]针对多智能体系统的编队控制研究进行了系统性的梳理. Liao等人^[10]针对存在外部扰动且通信拓扑为有向图的多智能体系统领导-跟随一致跟踪问题, 提出了一种基于扩张状态观测器与动态事件触发策略的分布式一致性控制方法, 在保证抗扰性能的同时显著降低了通信与计算负担. Dong等人^[11]针对二阶多智能体系统在切换拓扑条件下的时变编队跟踪问题, 提出了一种基于代数Riccati方程的分布式编队跟踪控制协议设计方法, 并进一步将该方法应用于四旋翼无人机编队围捕任务中. Jia等人^[12]针对具有有向切换拓扑的多机系统, 设计了一种基于分布式自适应神经网络的领导-跟随编队控制方法, 解决了非仿射纯反馈形式下不匹配未知动态的问题. Wang等人^[13]针对具有参数不确定性和外部干扰的四旋翼无人机编队系统提出了一种自适应控制方案, 实现了编队队形保持和参考速度跟踪的全局稳定性. 上述研究中的多智能体系统协同控制算法为多无人机机协同编队问题提供

了理论基础, 但对于实际复杂运行工况下的故障及饱和问题仍缺乏充分考虑, 此外四旋翼系统本身所具有的非线性、强耦合和欠驱动特性, 也为控制器的设计与稳定性分析带来额外挑战.

在实际复杂运行环境中, 无人机系统的稳定运行不仅面临风扰等外部不确定性, 还可能受到执行器故障、输入饱和约束以及部分模型参数未知等多重复杂因素的影响. 因此, 鲁棒性与容错性能是控制算法的关键设计目标. 具体而言, 由机械磨损、外部冲击或环境条件变化所引起的执行器故障(如输出衰减与偏差), 在四旋翼无人机这类具有非线性、强耦合和欠驱动特性的系统中, 往往与系统状态呈现高度复杂的非线性耦合关系, 导致故障模型通常具有非仿射形式. 例如某旋翼的桨叶轻微破损或电机轴弯曲, 将导致其产生的气动特性发生变化, 这不仅仅会引起推力减小等仿射型影响, 还会产生显著的、非线性的扭矩耦合, 因此对控制系统的鲁棒性和适应性提出了更高要求. 同时, 受限于物理执行机构的固有功率上限(如电机转矩或旋翼转速限制), 输入饱和问题在实际应用中亦难以避免, 若处理不当将严重影响系统的稳定性和跟踪性能. 针对这两类问题, Yu等人^[14]基于具有异构有限通信范围的多无人艇系统, 提出了一种由模糊神经网络构造的智能学习算法, 并引入Nussbaum函数来解决执行器故障和输入饱和问题. Tong等人^[15]对于有不可观状态和间歇性执行器故障的非线性多智能体系统提出了一种自适应神经网络事件触发编队容错控制器, 并设计了一种新的双通道事件触发机制. Cheng等人^[16]针对存在非仿射故障(non-affine fault, NAF)、未知控制方向、输入饱和的复杂非线性系统构建了一种基于神经网络的命令滤波容错控制器, 并通过自适应机制的设计降低了计算复杂度. Kim等人^[17]针对四旋翼无人机提出了一种利用Nussbaum函数增益的容错位姿跟踪控制器, 设计了一种新的非线性映射方法及预设性能函数, 并进一步引入梯度修正器来缓解Nussbaum型函数的数值不稳定性问题. Wang等人^[18]针对存在非仿射故障的非线性多智能体系统, 提出了一种基于神经网络的命令滤波反步容错控制算法, 并通过基于梯度调节器的Nussbaum函数方法缓解了执行器饱和及未知控制系数的影响. Zheng等人^[19]研究了具有非仿射故障的多架四旋翼无人机的容错姿态跟踪控制问题, 构造了一种基于神经网络和命令滤波反步方法的

固定时间控制算法. 通过上述对现有文献的梳理可以发现, 针对四旋翼无人机集群在存在执行器故障与输入饱和约束条件下的容错编队控制问题仍具有较多的研究空间, 亟待进一步深入探索. 具体而言, 在故障建模方面, 现有容错控制研究^[14,15,17]虽已对部分有效性损失、输出偏移等线性故障模型开展了较为系统的分析, 但对具有非线性耦合特性的非仿射故障模型的研究尚不充分. 一些文献^[19,20]虽探讨了非仿射故障下多智能体系统的协同控制, 但未同时考虑输入饱和约束, 限制了其在实际系统中的应用可行性. 部分研究^[16]尽管同时引入了故障与饱和约束, 但其基于渐近稳定的控制架构在收敛速度方面可能存在不足, 难以满足高动态无人机集群对控制快速性的要求.

如上所述, 除稳态精度与鲁棒性外, 控制系统的暂态性能同样是关键设计目标之一. 然而, 基于渐近稳定性的传统控制律存在固有局限: 其虽能在理论上保证时间趋于无穷时的最终收敛, 却无法对收敛过程的速度与时间做出明确约束, 难以适用于无人机等需要快速响应的高动态场景^[21]. 为解决上述暂态性能不足的问题, 有限时间控制技术被广泛研究和应用, 它通过确保系统状态在有限时间内收敛, 赋予控制系统更快的动态响应速度与更强的鲁棒性, 有效提升了整体暂态性能. 基于有限时间控制技术, Ji等人^[22]对于非线性非严格反馈多入多出系统提出一种有限时间自适应输出反馈控制方法, 同时考虑了执行器饱和及未知故障的影响, 并针对不可观高阶状态设计了一种模糊观测器, 最终实现整个闭环系统的有限时间稳定. Mofid等人^[23,24]综合考虑了四旋翼无人机系统在部分参数不确定性、外部扰动、输入饱和影响下的动态系统, 设计了一种有限时间镇定的自适应滑模控制技术, 通过自适应机制和补偿信号设计实现对无人机未知参数的实时估计和饱和问题的补偿. Cui等人^[25]研究了具有输入饱和的高阶多入多出非线性系统有限时间自适应模糊跟踪控制问题, 通过改进的命令滤波器和滤波误差补偿方法在实现有限时间收敛的同时避免了其他方法中使用符号函数而导致的抖振现象. Xu等人^[26]针对四旋翼无人机在输入饱和、未建模非线性动态和外部干扰下的位姿跟踪问题, 提出了一种新型有限时间自适应鲁棒控制策略, 为解决完全未知输入饱和约束的负面影响, 控制器设计中引入了一种非对称饱和非线性逼近器. 上述研究中的有限时间控制设计为提高算法的

收敛速率和鲁棒性构建了一条可靠路径, 但针对四旋翼无人机集群的高效、可靠、容错编队控制这一具体问题的解决方案设计仍有待进一步深入.

因此, 基于上述研究现状, 本文采用命令滤波反步控制设计方法, 结合RBF (radial basis function)神经网络和抗饱和补偿机制, 提出一种适用于多四旋翼无人机系统的有限时间容错编队控制策略. 与现有成果相比, 本研究的主要贡献包括:

本文在领导-跟随框架下提出一种基于命令滤波反步法的有限时间容错控制方案, 为复杂不确定环境下无人机集群的高速、高精度、高可靠性协同控制提供了新的解决途径, 相较于文献^[6], 本文算法在同样跟踪精度的前提下, 在算法收敛速度上表现出显著优势.

本研究充分考虑了更具一般性的故障模型, 并通过RBF神经网络逼近技术, 设计了相应的自适应容错控制律. 相较于文献^[6,14,17], 本文模型能够适用于更多样化的复杂非线性故障场景, 增强了方法对复杂故障情形的容错性能、适应能力与应用广度, 为无人机系统在更多场景下的应用能力提供了理论支撑.

本研究提出了一种抗饱和补偿机制, 有效缓解了控制器输入饱和带来的影响. 相较于文献^[6~8,16~18], 本文的饱和补偿策略具有更清晰的抗饱和控制机理与更好的数值鲁棒性, 其优秀抗饱和性能也在实验中得到验证.

本文的后续内容的组织结构如下: 第2节主要介绍系统与问题描述及必要的基础知识; 第3节详述所提出控制算法的设计及其相应的有限时间稳定性分析; 第4节通过两组仿真对比实验验证控制器设计的有效性; 最后, 第5节对本研究进行全面总结.

2 背景知识与问题描述

本节主要介绍本研究开展的必要背景知识与预设条件, 包括图论基础、RBF神经网络、四旋翼无人机动力学模型、引理与假设.

2.1 基础图论

本文采用固定有向图 $G \triangleq (V, E)$ 表示无人机间的信息交换拓扑结构, 其中顶点集 $V \triangleq \{1, \dots, N\}$ 表示节点集合, N 为图中节点数量, 边集 $E \subseteq V \times V$ 表示连接

关系. 边 $(i, j) \in E$ 意味着节点 j 能从节点 i 接收信息, 但反之未必成立, 此时称节点 i 为父节点, 节点 j 为子节点, 节点 j 的邻居集合 $\mathcal{N}_j = \{i \mid (i, j) \in E\}$ 由其父节点构成. 系统的拓扑结构可通过邻接矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$ 进行量化描述, 其中 $a_{ij} > 0$ 表示存在从节点 j 指向节点 i 的边, 否则 $a_{ij} = 0$. 入度矩阵 $\mathbf{D}$ 定义为对角矩阵, 其对角线元素等于各节点的入度 $d_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}$. 由此可得系统稳定性分析中关键的拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$. 此外, 对角型领导者邻接矩阵 $\mathbf{B}$ 刻画了跟随者节点与领导者间的信息交互关系, 若节点可接收领导者的参考状态则对角元 $b_i = 1$, 否则 $b_i = 0$. 图论中与多智能体系统稳定性相关的另一个关键概念是有向生成树, 其存在表明图 G 至少包含一个能通过有向路径到达所有其他节点的根节点.

2.2 RBF神经网络

在多智能体协同控制问题中, 径向基函数(RBF)神经网络因其局部逼近特性和自适应学习能力, 常被用于解决系统中的非线性动力学、参数不确定性和外部扰动问题. 因此, 本文参考相关文献^[27,28]给出基础知识: 若函数 $f(\cdot)$ 在紧集 $\Omega_Z \subset R^q$ 上连续, 则对于任意预设精度 $\varepsilon > 0$, 存在满足以下条件的RBF神经网络:

$$f(\cdot) = \mathbf{\theta}^T \mathbf{S}(\mathbf{Z}) + \delta(\mathbf{Z}),$$

其中, 其中 $\mathbf{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T$ 表示理想权重向量, $m > 1$ 代表RBF神经网络的节点数量. $\delta(\mathbf{Z})$ 是满足 $|\delta(\mathbf{Z})| \leq \varepsilon$ 的逼近误差. $\mathbf{S}(\mathbf{Z}) = [s_1(\mathbf{Z}), \dots, s_m(\mathbf{Z})]^T$ 表示高斯基函数, 其形式为

$$s_i(\mathbf{Z}) = \exp \left[-\frac{(\mathbf{Z} - \mathbf{c}_i)^T (\mathbf{Z} - \mathbf{c}_i)}{2\sigma_i^2} \right],$$

其中, 其中 $\mathbf{Z} \in \Omega_Z$ 代表输入向量. $\mathbf{c}_i = [c_{i1}, \dots, c_{iq}]^T$ 表示第 i 个RBF神经元感受野的中心, $\sigma_i > 0$ 代表相应高斯函数的宽度.

2.3 系统描述

本文中用于理论分析和仿真验证的第 i 架四旋翼无人机六自由度(6DoF)动力学模型如图1所示, 具体表

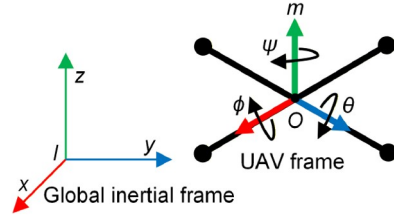


图1 (网络版彩图)四旋翼无人机模型示意图

Figure 1 (Color online) Schematic diagram of a quadrotor UAV model.

达式如下^[6,23,24]:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_i &= q_{1i,1} + q_{1i,2} k_{\phi,i} \dot{\phi}_i^2 + q_{1i,3} u_{i,1}^a + \beta_{i,\phi} h_{i,\phi} + d_{i,\phi}, \\ \ddot{\theta}_i &= q_{2i,1} + q_{2i,2} k_{\theta,i} \dot{\theta}_i^2 + q_{2i,3} u_{i,2}^a + \beta_{i,\theta} h_{i,\theta} + d_{i,\theta}, \\ \ddot{\psi}_i &= q_{3i,1} + q_{3i,2} k_{\psi,i} \dot{\psi}_i^2 + q_{3i,3} u_{i,3}^a + \beta_{i,\psi} h_{i,\psi} + d_{i,\psi}, \\ \ddot{x}_i &= \frac{q_{4i}}{m_i} u_{i,4}^a - \frac{k_{x,i}}{m_i} \dot{x}_i + \beta_{i,x} h_{i,x} + d_{i,x}, \\ \ddot{y}_i &= \frac{q_{5i}}{m_i} u_{i,4}^a - \frac{k_{y,i}}{m_i} \dot{y}_i + \beta_{i,y} h_{i,y} + d_{i,y}, \\ \ddot{z}_i &= \frac{q_{6i}}{m_i} u_{i,4}^a - g - \frac{k_{z,i}}{m_i} \dot{z}_i + \beta_{i,z} h_{i,z} + d_{i,z}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中,

$$\begin{aligned} q_{1i,1} &= \frac{I_{y,i} - I_{z,i}}{I_{x,i}} \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i, \quad q_{1i,2} = -\frac{1}{I_{x,i}}, \quad q_{1i,3} = \frac{l_i}{I_{x,i}}, \\ q_{2i,1} &= \frac{I_{z,i} - I_{x,i}}{I_{y,i}} \dot{\phi}_i \dot{\psi}_i, \quad q_{2i,2} = -\frac{1}{I_{y,i}}, \quad q_{2i,3} = \frac{l_i}{I_{y,i}}, \\ q_{3i,1} &= \frac{I_{x,i} - I_{y,i}}{I_{z,i}} \dot{\phi}_i \dot{\theta}_i, \quad q_{3i,2} = -\frac{1}{I_{z,i}}, \quad q_{3i,3} = \frac{l_i}{I_{z,i}}, \\ q_{4i} &= \cos \psi_i \sin \theta_i \cos \phi_i + \sin \psi_i \sin \phi_i, \\ q_{5i} &= \sin \psi_i \sin \theta_i \cos \phi_i - \cos \psi_i \sin \phi_i, \\ q_{6i} &= \cos \theta_i \cos \phi_i. \end{aligned}$$

此外, x_i, y_i, z_i 表示其在全局惯性坐标系 I_{xyz} 中的空间坐标. ϕ_i, θ_i, ψ_i 分别表示无人机的滚转、俯仰、偏航角. $u_{i,k}^a$ 表示执行器信号($k = 1, 2, 3, 4$). $d_{i,k}$ 为未知外部扰动($\mu = x, y, z, \phi, \theta, \psi$). $I_{x,i}, I_{y,i}, I_{z,i}$ 分别为环 x, y, z 轴的转动惯量. $k_{x,i}, k_{y,i}, k_{z,i}$ 表示未知空气阻力系数. $k_{\phi,i}, k_{\theta,i}, k_{\psi,i}$ 为未知的陀螺效应系数. m_i 和 g 分别代表无人机的质量和重力加速度. l_i 为旋翼电机中心到无人机质心的距离. $\beta_{i,k} h_{i,k}$ 表示非仿射故障项, 其中 $h_{i,k}$ 代表故障引起的未知非线性扰动, $\beta_{i,k}$ 表征故障的时间特性, 其满足

$$\beta_{i,\mu}(t-T_{0i,\mu}) = \begin{cases} 0, & t < T_{0i,\mu}, \\ 1 - e^{-R_{i,\mu}(t-T_{0i,\mu})}, & t \geq T_{0i,\mu}, \end{cases}$$

其中, $T_{0i,\mu}$ 表示未知的故障发生时间, $R_{i,\mu}$ 为故障演化速率.

在系统(1)中, 控制器受到输入饱和的约束, 其表达式如下:

$$u_{i,k}^a = \begin{cases} u_{i,k,\max}, & u_{i,k} \geq u_{i,k,\max}, \\ u_{i,k}, & u_{i,i,\min} < u_{i,k} < u_{i,k,\max}, \\ u_{i,k,\min}, & u_{i,k} \leq u_{i,k,\min}, \end{cases}$$

其中 $u_{i,k,\max} \geq 0$ 和 $u_{i,k,\min} \leq 0$ 分别为执行器输出的上下限, $u_{i,k}$ 表示理论控制输入. 因此, 实际执行器输出与理论控制器信号之间的差值可表示为

$$\Delta u_{i,k} = u_{i,k}^a - u_{i,k}. \quad (2)$$

2.4 必要预备条件

假设1^[16,18] 有向图 G 包含一棵以领航者无人机为根节点的生成树.

假设2^[16,18] 领航者无人机的参考轨迹信号及其一阶导数连续且有界.

假设3^[6,29] 四旋翼无人机的姿态角满足有界条件: 滚转角 $-\pi/2 < \phi_i < \pi/2$, 俯仰角 $-\pi/2 < \theta_i < \pi/2$, 偏航角 $-\pi < \psi_i < \pi$.

假设4 控制输入误差 $\Delta u_{i,k}$ 有一未知正常数上界 $\bar{b}_{i,k}$, 即 $|\Delta u_{i,k}| \leq \bar{b}_{i,k}$.

假设5^[6,29] 外界扰动 $d_{i,\mu}$ 存在一未知正常数上界 $\bar{d}$, 即 $|d_{i,\mu}| \leq \bar{d}$.

假设6^[16,18] 模型故障存在一未知非线性函数上界 $f_{i,\mu}$, 即 $|\beta_{i,\mu} h_{i,\mu}| \leq f_{i,\mu}$.

附注1 本文理论框架的构建依赖于上述必要假设. 其中, 假设1, 2, 5, 6 是多智能体系统容错协同控制领域广泛采用的前提条件, 分别约束了通信拓扑的有效性、期望轨迹的合理性以及外部扰动与故障影响的有界性, 这些假设确保了控制器的可实现性; 假设3 主要将无人机的滚转角与俯仰角约束在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 范围内, 其目的在于将无人机姿态限定在常规任务的安全范围内, 避免欧拉角参数化引起姿态角运动学方程的奇异性问题; 假设4 源于物理执行器的饱和特性, 该假设使得饱和效应得以被量化分析, 是本文进行稳定性

分析和补偿器设计的必要数学前提. 综上, 上述假设共同构成了本文算法在理论上的严格运行边界, 它们均源于实际系统的物理约束或数学必要性, 具有坚实的工程背景.

引理1^[21] 若李雅普诺夫函数 $V(x)$ 满足不等式

$$\dot{V}(x) + \lambda_1 V(x) + \lambda_2 V^\gamma(x) \leq 0,$$

则当 $t \geq T_r$ 时 $x(t) \equiv 0$. 且收敛时间 T_r 满足

$$T_r \leq t_0 + \frac{1}{\lambda_1(1-\gamma)} \ln \frac{\lambda_1 V^{1-\gamma}(t_0) + \lambda_2}{\lambda_2},$$

其中 λ_1, λ_2 和 $0 < \gamma < 1$ 为正常数.

引理2^[30] 考虑系统 $\dot{x} = f(x)$, 若存在李雅普诺夫函数 $V(x)$ 及正常数 $\eta, \lambda_1, \lambda_2$ 和 $0 < \gamma < 1$ 使得

$$\dot{V}(x) \leq -\lambda_1 V(x) - \lambda_2 V^\gamma(x) + \eta,$$

则该系统的轨迹具有有限时间稳定性, 且满足

$$\lim_{t \rightarrow T_r} |V(x)| \leq \min \left\{ \frac{\eta}{(1-\theta_0)\lambda_1}, \left(\frac{\eta}{(1-\theta_0)\lambda_2} \right)^{1/\gamma} \right\},$$

其中 $0 < \theta_0 < 1$, 收敛时间满足

$$T_r \leq \max \left\{ t_0 + \frac{1}{\theta_0 \lambda_1 (1-\gamma)} \ln \frac{\theta_0 \lambda_1 V^{1-\gamma}(t_0) + \lambda_2}{\lambda_2}, t_0 + \frac{1}{\lambda_1 (1-\gamma)} \ln \frac{\lambda_1 V^{1-\gamma}(t_0) + \theta_0 \lambda_2}{\theta_0 \lambda_2} \right\}.$$

3 控制器设计与稳定性分析

本节针对领导-跟随框架下存在非仿射故障、输入饱和、部分参数未知、外部扰动的多四旋翼无人机系统(1), 提出有限时间容错编队控制设计方案. 控制器整体架构如图2所示. 具体而言, 本节依次针对姿态内环和位置外环采用命令滤波反步法设计有限时间控制器, 随后分析闭环系统的有限时间稳定性.

为简化后续推导过程, 将系统状态重新标识为

$$[\phi_i, \dot{\phi}_i, \theta_i, \dot{\theta}_i, \psi_i, \dot{\psi}_i] = [x_{1i,1}, x_{1i,2}, x_{2i,1}, x_{2i,2}, x_{3i,1}, x_{3i,2}],$$

$$[x_i, \dot{x}_i, y_i, \dot{y}_i, z_i, \dot{z}_i] = [x_{4i,1}, x_{4i,2}, x_{5i,1}, x_{5i,2}, x_{6i,1}, x_{6i,2}].$$

此外, 为避免反步法中重复微分导致的“复杂性爆炸”问题, 本文引入了一种有限时间命令滤波器(finite-time command filter, FTCTF)^[31], 表达式为

$$\dot{\alpha}^f = -\gamma_1 \tanh[\varrho(\alpha^f - \alpha)] - \gamma_2(\alpha^f - \alpha), \quad (3)$$

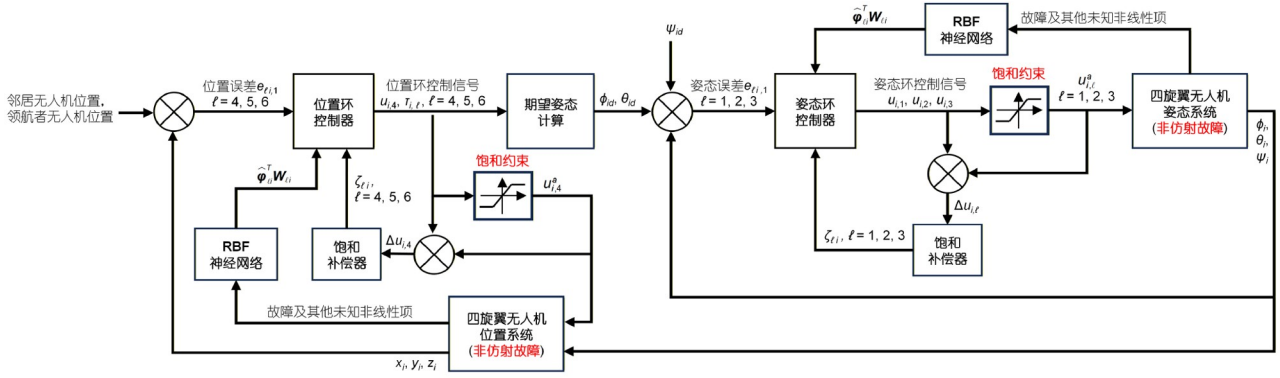


图 2 (网络版彩图)控制结构框图

Figure 2 (Color online) Block diagram of the control structure.

其中, α^f 和 $\dot{\alpha}^f$ 分别表示滤波器的状态量和输出, α 为滤波器的输入. γ_1, γ_2 和 q 为正设计参数.

3.1 姿态内环

首先, 定义第 i 架无人机的姿态跟踪误差为

$$\begin{aligned} e_{\bar{i},1} &= x_{\bar{i},1} - x_{\bar{i},d}, \\ e_{\bar{i},2} &= x_{\bar{i},2} - \alpha_{\bar{i}}^f, \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\ell = 1, 2, 3$. $x_{\ell i,d}$ 表示期望姿态角. $\alpha_{\bar{i}}^f$ 是以虚拟控制信号 $\alpha_{\ell i}$ 为输入的命令滤波器(3)的输出.

由于命令滤波器的引入不可避免地会导致滤波误差 $\alpha_{\bar{i}}^f - \alpha_{\bar{i}}$, 因此本文设计了相应的滤波补偿机制, 补偿后的跟踪误差表达式为

$$\begin{aligned} v_{\bar{i},1} &= e_{\bar{i},1} - \zeta_{\bar{i},1}, \\ v_{\bar{i},2} &= e_{\bar{i},2} - \zeta_{\bar{i},2}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\zeta_{\ell i,1}$ 和 $\zeta_{\ell i,2}$ 为补偿信号, 其设计如下:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{\bar{i},1} &= \alpha_{\bar{i}}^f - \alpha_{\bar{i}} - c_{\bar{i},1}\zeta_{\bar{i},1} - \kappa_{\bar{i}}\text{sgn}(\zeta_{\bar{i},1}), \\ \dot{\zeta}_{\bar{i},2} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $c_{\ell i,1}$ 和 $\kappa_{\ell i}$ 为正设计参数. $\text{sgn}(\cdot)$ 代表符号函数. 补偿信号初值 $\zeta_{\ell i,1}(0) = \zeta_{\ell i,2}(0) = 0$.

姿态环虚拟控制信号及姿态控制器设计为

$$\begin{aligned} \alpha_{\bar{i}} &= -c_{\bar{i},1}e_{\bar{i},1} - k_{\bar{i},1}v_{\bar{i},1}^{2p-1} + \dot{x}_{\bar{i},d}, \\ u_{i,\ell} &= \frac{1}{q_{\bar{i},3}} \left(-c_{\bar{i},2}v_{\bar{i},2} - k_{\bar{i},2}v_{\bar{i},2}^{2p-1} - \hat{\phi}_{\bar{i}}^T \mathbf{W}_{\bar{i}} - q_{\bar{i},1} + \dot{\alpha}_{\bar{i}}^f - v_{\bar{i},1} \right) \\ &\quad + \gamma_{\bar{i}} \zeta_{\bar{i}}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $k_{\ell i,1}, k_{\ell i,2}, c_{\ell i,2}, \gamma_{\ell i}$ 为正设计参数. $0.5 < p < 1$ 是一

个以奇数为分母的分数. $\hat{\phi}_{\bar{i}}^T \mathbf{W}_{\bar{i}}$ 代表 RBF 神经网络. $\zeta_{\ell i}$ 是为执行器抗饱和设计的补偿信号, 表达式为

$$\dot{\zeta}_{\bar{i}} = -\eta_{\bar{i},1}\zeta_{\bar{i}} - \eta_{\bar{i},2}\zeta_{\bar{i}}^{2p-1} + \eta_{\bar{i},3}\Delta u_{i,\ell}, \quad (8)$$

其中, $\eta_{\ell i,1}, \eta_{\ell i,2}, \eta_{\ell i,3}$ 为正常数参数. $\zeta_{\ell i}(0) = 0$. 由上式的饱和补偿设计, 能够在控制信号发生饱和时产生逆向补偿信号, 从而将控制器牵引回非饱和区间.

具体反步设计步骤如下所示:

步骤1: 首先, 构造如下李雅普诺夫函数:

$$V_{\bar{i},1} = \frac{1}{2}v_{\bar{i},1}^2, \quad (9)$$

其一阶导可计算为

$$\dot{V}_{\bar{i},1} = v_{\bar{i},1}(\alpha_{\bar{i}}^f - \alpha_{\bar{i}} + \alpha_{\bar{i}} + v_{\bar{i},2} + \zeta_{\bar{i},2} - \dot{x}_{\bar{i},d} - \dot{\zeta}_{\bar{i},1}). \quad (10)$$

将前述虚拟控制律(7)及滤波补偿设计(6)代入上式可得

$$\dot{V}_{\bar{i},1} = -c_{\bar{i},1}v_{\bar{i},1}^2 - k_{\bar{i},1}v_{\bar{i},1}^{2p} + \kappa_{\bar{i}}v_{\bar{i},1}\text{sgn}(\zeta_{\bar{i},1}) + v_{\bar{i},1}v_{\bar{i},2}. \quad (11)$$

步骤2: 构造李雅普诺夫函数:

$$V_{\bar{i},2} = V_{\bar{i},1} + \frac{1}{2}v_{\bar{i},2}^2 + \frac{1}{2\lambda_{\bar{i}}}\hat{\phi}_{\bar{i}}^T \hat{\phi}_{\bar{i}} + \frac{1}{2}\zeta_{\bar{i}}^2, \quad (12)$$

其中, $\tilde{\phi}_{\bar{i}} = \phi_{\bar{i}} - \hat{\phi}_{\bar{i}}$. $\lambda_{\ell i}$ 为正常数. 对 $V_{\ell i,2}$ 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\bar{i},2} &= \dot{V}_{\bar{i},1} + v_{\bar{i},2}[q_{\bar{i},1} + q_{\bar{i},2}\mathbf{k}_{\mu,r}x_{\bar{i},2}^2 + q_{\bar{i},3}(u_{i,\ell} + \Delta u_{i,\ell}) \\ &\quad + \beta_{i,\mu}h_{i,\mu} + d_{i,\mu} - \dot{\alpha}_{\bar{i}}^f - \dot{\zeta}_{\bar{i},2}] \\ &\quad - \frac{1}{\lambda_{\bar{i}}}\hat{\phi}_{\bar{i}}^T \dot{\hat{\phi}}_{\bar{i}} + \zeta_{\bar{i}}\dot{\zeta}_{\bar{i}}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\ell = 1, 2, 3$ 分别对应 $\mu = \phi, \theta, \psi$. 为估计式(13)中的未知非线性项, 引入 RBF 神经网络如下:

$$q_{\bar{a},i} k_{\mu,i} x_{\bar{a},2}^2 + \beta_{i,\mu} h_{i,\mu}(\mathbf{Z}_{\bar{a}}) = \boldsymbol{\Phi}_{\bar{a}}^T \mathbf{W}_{\bar{a}}(\mathbf{Z}_{\bar{a}}^f) + \Delta_{\bar{a}}, \quad (14)$$

其中, $\boldsymbol{\Phi}_{\bar{a}}^T$ 和 $\mathbf{W}_{\bar{a}}(\mathbf{Z}_{\bar{a}}^f)$ 分别表示理想权向量和高斯径向基函数. $\Delta_{\bar{a}}$ 为估计误差, 其存在未知正上界 $\bar{\Delta}_{\bar{a}}$, 即 $|\Delta_{\bar{a}}| \leq \bar{\Delta}_{\bar{a}}$. 参数 $\mathbf{Z}_{\bar{a}} = [u_{i,\ell}, \mathbf{x}_{\bar{a}}]^T$, $\mathbf{Z}_{\bar{a}}^f = [u_{i,\ell}^f, \mathbf{x}_{\bar{a}}]^T$, 其中 $\mathbf{x}_{\bar{a}} = [x_{1i,1}, x_{1i,2}, x_{2i,1}, x_{2i,2}, x_{3i,1}, x_{3i,2}]$, 此处 $u_{i,\ell}^f \approx u_{i,\ell}$ 表示通过巴特沃斯低通滤波器^[32]生成的滤波控制信号 $u_{i,\ell}^f = H_{i,\ell}^L(s)u_{i,\ell}$, 用于避免代数环问题.

RBF神经网络实际权向量的更新律设计如下:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\Phi}}}_{\bar{a}} = \lambda_{\bar{a}} v_{\bar{a},2} \mathbf{W}_{\bar{a}}(\mathbf{Z}_{\bar{a}}^f) - \sigma_{\bar{a}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}, \quad (15)$$

其中, $\sigma_{\bar{a}}$ 为正常数.

至此, 将姿态控制器设计(7)、补偿信号(6)和(8)及RBF神经网络更新律(15)代入式(13), 可以进一步得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\bar{a},2} = & -c_{\bar{a},1} v_{\bar{a},1}^2 - c_{\bar{a},2} v_{\bar{a},2}^2 - k_{\bar{a},1} v_{\bar{a},1}^{2p} - k_{\bar{a},2} v_{\bar{a},2}^{2p} \\ & - \eta_{\bar{a},1} \zeta_{\bar{a}}^2 - \eta_{\bar{a},2} \zeta_{\bar{a}}^{2p} + \eta_{\bar{a},3} \zeta_{\bar{a}} \Delta u_{i,\ell} \\ & + v_{\bar{a},2} (q_{\bar{a},3} \gamma_{\bar{a}} \zeta_{\bar{a}} + \Delta_{\bar{a}} + q_{\bar{a},3} \Delta u_{i,\ell} + d_{i,\mu}) \\ & + \kappa_{\bar{a}} v_{\bar{a},1} \text{sgn}(\zeta_{\bar{a},1}) + \frac{\sigma_{\bar{a}}}{\lambda_{\bar{a}}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}^T \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}. \end{aligned} \quad (16)$$

由假设4、5及杨氏不等式, 可以得到

$$\begin{aligned} \kappa_{\bar{a}} v_{\bar{a},1} \text{sgn}(\zeta_{\bar{a},1}) & \leq \frac{1}{2} \kappa_{\bar{a}}^2 + \frac{1}{2} v_{\bar{a},1}^2, \\ v_{\bar{a},2} q_{\bar{a},3} \gamma_{\bar{a}} \zeta_{\bar{a}} & \leq \frac{q_{\bar{a},3}^2}{2} v_{\bar{a},2}^2 + \frac{\gamma_{\bar{a}}^2}{2} \zeta_{\bar{a}}^2, \\ v_{\bar{a},2} q_{\bar{a},3} \Delta u_{i,\ell} & \leq \frac{q_{\bar{a},3}^2}{2} v_{\bar{a},2}^2 + \frac{1}{2} \bar{b}_{i,\ell}^2, \\ v_{\bar{a},2} \Delta_{\bar{a}} & \leq \frac{1}{2} v_{\bar{a},2}^2 + \frac{1}{2} \bar{\Delta}_{\bar{a}}^2, \\ v_{\bar{a},2} d_{i,\mu} & \leq \frac{1}{2} v_{\bar{a},2}^2 + \frac{1}{2} \bar{d}^2, \\ \frac{\sigma_{\bar{a}}}{\lambda_{\bar{a}}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}^T \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}} & \leq -\frac{3\sigma_{\bar{a}}}{4\lambda_{\bar{a}}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}^T \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}} + \frac{\sigma_{\bar{a}}}{\lambda_{\bar{a}}} \boldsymbol{\Phi}_{\bar{a}}^T \boldsymbol{\Phi}_{\bar{a}}, \\ \eta_{\bar{a},3} \zeta_{\bar{a}} \Delta u_{i,\ell} & \leq \frac{\eta_{\bar{a},3}^2}{2} \zeta_{\bar{a}}^2 + \frac{1}{2} \bar{b}_{i,\ell}^2. \end{aligned} \quad (17)$$

因此, 式(16)可进一步界定为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\bar{a},2} \leq & -\left(c_{\bar{a},1} - \frac{1}{2}\right) v_{\bar{a},1}^2 - \left(c_{\bar{a},2} - q_{\bar{a},3}^2 - 1\right) v_{\bar{a},2}^2 - k_{\bar{a},1} v_{\bar{a},1}^{2p} \\ & - k_{\bar{a},2} v_{\bar{a},2}^{2p} - \frac{3\sigma_{\bar{a}}}{4\lambda_{\bar{a}}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}^T \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}} - \left(\eta_{\bar{a},1} - \frac{\gamma_{\bar{a}}^2}{2} - \frac{\eta_{\bar{a},3}^2}{2}\right) \zeta_{\bar{a}}^2 \\ & - \eta_{\bar{a},2} \zeta_{\bar{a}}^{2p} + D_{\bar{a}}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $D_{\bar{a}} = \frac{1}{2} \kappa_{\bar{a}}^2 + \bar{b}_{i,\ell}^2 + \frac{1}{2} \bar{\Delta}_{\bar{a}}^2 + \frac{1}{2} \bar{d}^2 + \frac{\sigma_{\bar{a}}}{\lambda_{\bar{a}}} \boldsymbol{\Phi}_{\bar{a}}^T \boldsymbol{\Phi}_{\bar{a}}$ 为一正常数.

定理1 考虑满足假设3~5的无人机姿态系统(1). 通过采用姿态控制输入(7), 结合式(6)和(8)中的补偿信号及RBF神经网络(15), 姿态环内的所有信号将在有限时间内实现半全局一致最终有界. 且通过适当的参数设计, 姿态跟踪误差能够收敛至原点邻域内.

证明 构造李雅普诺夫函数为

$$V_A = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^3 V_{\bar{a},2}. \quad (19)$$

由式(18)可得 V_A 的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_A \leq & -\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^3 \left(c_{\bar{a},1}^s v_{\bar{a},1}^2 + c_{\bar{a},2}^s v_{\bar{a},2}^2 + \eta_{\bar{a},1}^s \zeta_{\bar{a}}^2 + \frac{3\sigma_{\bar{a}}}{4\lambda_{\bar{a}}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}^T \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}} \right) \\ & - \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^3 \left(k_{\bar{a},1} v_{\bar{a},1}^{2p} + k_{\bar{a},2} v_{\bar{a},2}^{2p} + \eta_{\bar{a},2}^s \zeta_{\bar{a}}^{2p} + \sigma_{\bar{a}} \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}^T \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}}{2\lambda_{\bar{a}}} \right)^p \right) \\ & - \sigma_{\bar{a}} \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}^T \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}}{2\lambda_{\bar{a}}} \right)^p + \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^3 D_{\bar{a}}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中, 通过适当的参数设计, 使得 $c_{\bar{a},1}^s = c_{\bar{a},1} - 0.5$,

$c_{\bar{a},2}^s = c_{\bar{a},2} - q_{\bar{a},3}^2 - 1$, $\eta_{\bar{a},1}^s = \eta_{\bar{a},1} - \frac{\gamma_{\bar{a}}^2}{2} - \frac{\eta_{\bar{a},3}^2}{2}$ 均为正常数.

由杨氏不等式, 可得

$$\sigma_{\bar{a}} \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}^T \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}}{2\lambda_{\bar{a}}} \right)^p \leq \frac{\sigma_{\bar{a}}}{2\lambda_{\bar{a}}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}}^T \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\bar{a}} + \sigma_{\bar{a}} (1-p) p^{\frac{p}{1-p}}. \quad (21)$$

由此, 式(20)可被进一步界定为

$$\dot{V}_A \leq -\Lambda_{A1} V_A - \Lambda_{A2} V_A^p + D_A, \quad (22)$$

其中, 对于 $i = 1, \dots, N$ 及 $\ell = 1, 2, 3$, 参数为

$$\Lambda_{A1} = \min \left\{ 2c_{\bar{a},1}^s, 2c_{\bar{a},2}^s, 2\eta_{\bar{a},1}^s, \frac{1}{2}\sigma_{\bar{a}} \right\} > 0,$$

$$\Lambda_{A2} = \min \{ 2^p k_{\bar{a},1}, 2^p k_{\bar{a},2}, 2^p \eta_{\bar{a},2}^s, \sigma_{\bar{a}} \} > 0,$$

$$D_A = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^3 \left[D_{\bar{a}} + \sigma_{\bar{a}} (1-p) p^{\frac{p}{1-p}} \right].$$

因此由引理2可得, 对于 $0 < \delta_A < 1$, $\ell = 1, 2, 3$, $i = 1, \dots, N$ 及 $k = 1, 2$, V_A 将在有限时间 T_{A1} 内收敛至集

$$\text{合} |v_{\bar{a},k}| \leq \min \left\{ \sqrt{\frac{2D_A}{(1-\delta_A)\Lambda_{A1}}}, \sqrt{\left(\frac{2D_A}{(1-\delta_A)\Lambda_{A2}} \right)^{1/p}} \right\}, \text{ 且}$$

$$T_{A1} \leq \max \left\{ t_0 + \frac{1}{\delta_A \Lambda_{A1}(1-p)} \ln \frac{\delta_A \Lambda_{A1} V_A^{1-p}(t_0) + \Lambda_{A2}}{\Lambda_{A2}}, \right. \\ \left. t_0 + \frac{1}{\Lambda_{A1}(1-p)} \ln \frac{\Lambda_{A1} V_A^{1-p}(t_0) + \delta_A \Lambda_{A2}}{\delta_A \Lambda_{A2}} \right\},$$

其中, t_0 代表初始时间。

在此基础上, 根据式(5)可得, 若 $\zeta_{\ell i, k}$ 在有限时间内有界, 则姿态跟踪误差 $e_{\ell i, k}$ 也将在有限时间内收敛。因此, 构造附加李雅普诺夫函数如下:

$$V_{\zeta A} = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^3 \left(\frac{1}{2} \zeta_{\ell i, 1}^2 + \frac{1}{2} \zeta_{\ell i, 2}^2 \right). \quad (23)$$

基于补偿信号设计(6), 可得式(23)的导数为

$$\dot{V}_{\zeta A} = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^3 \left[(\alpha_{\ell i}^f - \alpha_{\ell i}) \zeta_{\ell i, 1} - c_{\ell i, 1} \zeta_{\ell i, 1}^2 - \kappa_{\ell i} |\zeta_{\ell i, 1}| \right]. \quad (24)$$

根据文献[31]中的FTCF设计可知, 对于给定上界 $\varpi_{\ell i}$, 通过适当的参数设计可在有限时间 $T_{\ell i}^f$ 内实现 $|\alpha_{\ell i}^f - \alpha_{\ell i}| \leq \varpi_{\ell i}$ 。因此当 $t \geq T_A^f = \max \{T_{\ell i}^f\}$ 时, 式(24)可进一步界定为

$$\dot{V}_{\zeta A} \leq \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^3 \left[\varpi_{\ell i} |\zeta_{\ell i, 1}| - c_{\ell i, 1} \zeta_{\ell i, 1}^2 - \kappa_{\ell i} |\zeta_{\ell i, 1}| \right] \\ \leq -\Lambda_{\zeta A1} V_{\zeta A} - \Lambda_{\zeta A2} V_{\zeta A}^{\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

其中, 在适当的参数设计下, 对于 $\ell = 1, 2, 3$ 及 $i = 1, \dots, N$, 可得 $\Lambda_{\zeta A1} = 2 \min \{c_{\ell i, 1}\} > 0$, $\Lambda_{\zeta A2} = \sqrt{2} \min \{\kappa_{\ell i} - \varpi_{\ell i}\} > 0$ 。

那么, 根据引理1可知, $\zeta_{\ell i, k}$ 将在有限时间 T_{A2} 内收敛至原点, 且

$$T_{A2} \leq T_A^f + \frac{2}{\Lambda_{\zeta A1}} \ln \frac{\Lambda_{\zeta A1} V_{\zeta A}^{\frac{1}{2}}(T_A^f) + \Lambda_{\zeta A2}}{\Lambda_{\zeta A2}}.$$

基于以上结论, 当 $t \geq \max \{T_{A1}, T_{A2}\}$ 时, 可得

$$|e_{\ell i, k}| \leq \min \left\{ \sqrt{\frac{2D_A}{(1-\delta_A)\Lambda_{A1}}}, \sqrt{\left(\frac{2D_A}{(1-\delta_A)\Lambda_{A2}} \right)^{1/p}} \right\},$$

表明姿态环内所有信号在有限时间内是半全局一致最终有界的。至此证明完毕。

3.2 位置外环

首先, 将虚拟位置控制信号重写为

$$\tau_{i, \ell}^a = q_{\ell i}^a \mu_{i, 4}^a, \quad \tau_{i, \ell} = q_{\ell i} \mu_{i, 4}, \quad \Delta \tau_{i, \ell} = q_{\ell i} \Delta \mu_{i, 4}, \quad (26)$$

其中, $\ell = 4, 5, 6$ 。

第 i 架无人机的编队跟踪误差定义为

$$e_{\ell i, 1} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{i, j} [(x_{\ell i, 1} - r_{\ell i}) - (x_{\ell j, 1} - r_{\ell j})] \\ + b_i (x_{\ell i, 1} - r_{\ell i} - x_{\ell d}), \quad (27) \\ e_{\ell i, 2} = x_{\ell i, 2} - \alpha_{\ell i}^f,$$

其中, $x_{\ell d}$ 代表领航无人机的轨迹。 $r_{\ell i}$ 表示第 i 架无人机相对于领航无人机的期望位置偏移量。 $\alpha_{\ell i}^f$ 是以虚拟控制信号 $\alpha_{\ell i}$ 为输入的FTCF(3)的输出。类似地, 补偿后的跟踪误差构造如下:

$$v_{\ell i, 1} = e_{\ell i, 1} - \zeta_{\ell i, 1}, \quad (28) \\ v_{\ell i, 2} = e_{\ell i, 2} - \zeta_{\ell i, 2},$$

其中 $\zeta_{\ell i, 1}$ 和 $\zeta_{\ell i, 2}$ 是设计为如下的补偿信号:

$$\dot{\zeta}_{\ell i, 1} = (d_i + b_i)(\alpha_{\ell i}^f - \alpha_{\ell i}) - c_{\ell i, 1} \zeta_{\ell i, 1} - \kappa_{\ell i} \text{sgn}(\zeta_{\ell i, 1}), \quad (29) \\ \dot{\zeta}_{\ell i, 2} = 0,$$

其中 $c_{\ell i, 1}$ 和 $\kappa_{\ell i}$ 是正设计参数, 且 $\zeta_{\ell i, 1}(0) = \zeta_{\ell i, 2}(0) = 0$ 。

在本研究考虑的无人机编队控制问题中, 各无人机的期望位置坐标与偏航角为预设轨迹, 而期望滚转角和俯仰角则通过虚拟位置控制信号的反向解算获得。具体算法如下[6]:

$$\phi_{id} = \arcsin \left(\frac{\tau_{i, 4} \sin \psi_i - \tau_{i, 5} \cos \psi_i}{u_{i, 4}} \right), \quad (30) \\ \theta_{id} = \arctan \left(\frac{\tau_{i, 4} \cos \psi_i + \tau_{i, 5} \sin \psi_i}{\tau_{i, 6}} \right),$$

位置环的虚拟控制律设计为

$$\alpha_{\ell i} = \frac{1}{d_i + b_i} \left(-c_{\ell i, 1} e_{\ell i, 1} - k_{\ell i, 1} v_{\ell i, 1}^{2p-1} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{i, j} x_{\ell j, 2} + b_i \dot{x}_{\ell d} \right), \quad (31) \\ \tau_{i, \ell} = m_i [-c_{\ell i, 2} v_{\ell i, 2} - k_{\ell i, 2} v_{\ell i, 2}^{2p-1} - \dot{\Phi}_{\ell i}^T \mathbf{W}_{\ell i} + c_{\ell z} \mathbf{g} + \dot{\alpha}_{\ell i}^f \\ - (d_i + b_i) v_{\ell i, 1}] + \gamma_{\ell i} \zeta_{\ell i},$$

其中 $k_{\ell i, 1}$, $k_{\ell i, 2}$, $c_{\ell i, 2}$ 和 $\gamma_{\ell i}$ 为正设计参数。当 $\ell = 6$ 时 $c_{\ell z} = 1$, 否则 $c_{\ell z} = 0$ 。 $\zeta_{\ell i}$ 为抗饱和和补偿信号, 其设计如下:

$$\dot{\zeta}_{\ell i} = -\eta_{\ell i, 1} \zeta_{\ell i} - \eta_{\ell i, 2} \zeta_{\ell i}^{2p-1} + \eta_{\ell i, 3} \Delta \tau_{i, \ell}, \quad (32)$$

其中, $\eta_{\ell i, 1}$, $\eta_{\ell i, 2}$, $\eta_{\ell i, 3}$ 为正设计参数, 且 $\zeta_{\ell i}(0) = 0$ 。

因此由式(26), 控制信号 $u_{i, 4}$ 可表示为

$$u_{i,4} = \sqrt{\tau_{i,4}^2 + \tau_{i,5}^2 + \tau_{i,6}^2}. \quad (33)$$

详细的反步法设计步骤如下:

步骤1: 构造李雅普诺夫函数为

$$V_{\ell i,1} = \frac{1}{2}v_{\ell i,1}^2. \quad (34)$$

通过虚拟控制律设计(31)与滤波补偿信号设计(29), 可得 $V_{\ell i,1}$ 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\ell i,1} = & -c_{\ell i,1}v_{\ell i,1}^2 - k_{\ell i,1}v_{\ell i,1}^{2p} + \kappa_{\ell i}v_{\ell i,1}\text{sgn}(\zeta_{\ell i,1}) \\ & + (d_i + b_i)v_{\ell i,1}v_{\ell i,2}. \end{aligned} \quad (35)$$

步骤2: 构造李雅普诺夫函数为

$$V_{\ell i,2} = V_{\ell i,1} + \frac{1}{2}v_{\ell i,2}^2 + \frac{1}{2\lambda_{\ell i}}\tilde{\Phi}_{\ell i}^T\tilde{\Phi}_{\ell i} + \frac{1}{2}\zeta_{\ell i}^2, \quad (36)$$

其中, $\lambda_{\ell i}$ 为一正常数. 则(36)的导数可表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\ell i,2} = & \dot{V}_{\ell i,1} + v_{\ell i,2} \times \\ & \left[\frac{1}{m_i}(\tau_{i,\ell} + \Delta\tau_{i,\ell}) - \frac{k_{\mu,i}}{m_i}x_{\ell i,2} + \beta_{i,\mu}h_{i,\mu} + d_{i,\mu} - c_{\ell i}g - \dot{\alpha}_{\ell i}^f - \dot{\zeta}_{\ell i,2} \right] \\ & - \frac{1}{\lambda_{\ell i}}\tilde{\Phi}_{\ell i}^T\dot{\tilde{\Phi}}_{\ell i} + \zeta_{\ell i}\dot{\zeta}_{\ell i}, \end{aligned} \quad (37)$$

其中, 当 $\ell = 4, 5, 6$ 时, μ 分别对应 x, y, z . 为近似式(37)中的未知项, 引入RBF神经网络如下:

$$-\frac{k_{\mu,i}}{m_i}x_{\ell i,2} + \beta_{i,\mu}h_{i,\mu}(\mathbf{Z}_{\ell i}) = \Phi_{\ell i}^T\mathbf{W}_{\ell i}(\mathbf{Z}_{\ell i}^f) + \Delta_{\ell i}, \quad (38)$$

其中, $\Phi_{\ell i}^T$ 和 $\mathbf{W}_{\ell i}(\mathbf{Z}_{\ell i}^f)$ 分别为理想权向量和高斯径向基函数. $\Delta_{\ell i}$ 代表存在未知正上界 $\bar{\Delta}_{\ell i}$ 的估计误差, 即 $|\Delta_{\ell i}| \leq \bar{\Delta}_{\ell i}$. 参数 $\mathbf{Z}_{\ell i} = [\tau_{i,\ell}, \mathbf{x}_{\ell i}]^T$, $\mathbf{Z}_{\ell i}^f = [\tau_{i,\ell}^f, \mathbf{x}_{\ell i}^f]^T$, 其中 $\mathbf{x}_{\ell i} = [x_{4i,1}, x_{4i,2}, x_{5i,1}, x_{5i,2}, x_{6i,1}, x_{6i,2}]$, $\tau_{i,\ell}^f$ 为通过巴特沃斯低通滤波后的 $\tau_{i,\ell}$. 并且位置环的实际RBF神经网络权值向量更新律设计为

$$\dot{\hat{\Phi}}_{\ell i} = \lambda_{\ell i}v_{\ell i,2}\mathbf{W}_{\ell i}(\mathbf{Z}_{\ell i}^f) - \sigma_{\ell i}\hat{\Phi}_{\ell i}, \quad (39)$$

其中, $\sigma_{\ell i}$ 为一正常数.

将式(29), (31), (32), (38)和(39)代入式(37)后, 可进一步得到 $V_{\ell i,2}$ 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\ell i,2} = & -c_{\ell i,1}v_{\ell i,1}^2 - c_{\ell i,2}v_{\ell i,2}^2 - k_{\ell i,1}v_{\ell i,1}^{2p} - k_{\ell i,2}v_{\ell i,2}^{2p} - \eta_{\ell i,1}\zeta_{\ell i}^2 \\ & - \eta_{\ell i,2}\zeta_{\ell i}^{2p} + \eta_{\ell i,3}\zeta_{\ell i}\Delta\tau_{i,\ell} + \kappa_{\ell i}v_{\ell i,1}\text{sgn}(\zeta_{\ell i,1}) \\ & + v_{\ell i,2}\left(\frac{1}{m_i}\Delta\tau_{i,\ell} + \frac{\gamma_{\ell i}}{m_i}\zeta_{\ell i} + \Delta_{\ell i} + d_{i,\mu}\right) + \frac{\sigma_{\ell i}}{\lambda_{\ell i}}\tilde{\Phi}_{\ell i}^T\dot{\tilde{\Phi}}_{\ell i}. \end{aligned} \quad (40)$$

于是, 根据假设4, 5和杨氏不等式, 可以类似地得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\ell i,2} \leq & -\left(c_{\ell i,1} - \frac{1}{2}\right)v_{\ell i,1}^2 - \left(c_{\ell i,2} - \frac{1}{m_i^2} - 1\right)v_{\ell i,2}^2 - k_{\ell i,1}v_{\ell i,1}^{2p} \\ & - k_{\ell i,2}v_{\ell i,2}^{2p} - \left(\eta_{\ell i,1} - \frac{\gamma_{\ell i}^2}{2} - \frac{\eta_{\ell i,3}^2}{2}\right)\zeta_{\ell i}^2 - \eta_{\ell i,2}\zeta_{\ell i}^{2p} \\ & - \frac{3\sigma_{\ell i}}{4\lambda_{\ell i}}\tilde{\Phi}_{\ell i}^T\dot{\tilde{\Phi}}_{\ell i} + D_{\ell i}, \end{aligned} \quad (41)$$

其中, $D_{\ell i} = \frac{1}{2}\kappa_{\ell i}^2 + \bar{b}_{i,4}^2 + \frac{1}{2}\bar{\Delta}_{\ell i}^2 + \frac{1}{2}\bar{d}^2 + \frac{\sigma_{\ell i}}{\lambda_{\ell i}}\Phi_{\ell i}^T\Phi_{\ell i}$ 是一个正常数.

定理2 考虑满足假设1~5的多四旋翼无人机系统(1). 通过实施式(31), (33)中的位置控制输入, 结合式(29), (32)中的补偿信号以及式(39)中的RBF神经网络, 位置环内的所有信号将在有限时间内实现半全局一致最终有界. 并且通过适当选择设计参数, 编队跟踪误差能够收敛至原点邻域内.

证明 构造李雅普诺夫函数

$$V_P = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=4}^6 V_{\ell i,2}. \quad (42)$$

根据式(41)和杨氏不等式, 可以类似地得到

$$\dot{V}_P \leq -\Lambda_{P1}V_P - \Lambda_{P2}V_P^p + D_P, \quad (43)$$

其中, 通过适当的参数设计, 参数 $c_{\ell i,1}^s = c_{\ell i,1} - 0.5$, $c_{\ell i,2}^s = c_{\ell i,2} - \frac{1}{m_i^2} - 1$, $\eta_{\ell i,1}^s = \eta_{\ell i,1} - \frac{\gamma_{\ell i}^2}{2} - \frac{\eta_{\ell i,3}^2}{2}$ 应均为正常数. 则对于 $i = 1, \dots, N$ 及 $\ell = 4, 5, 6$ 可得

$$\Lambda_{P1} = \min\left\{c_{\ell i,1}^s, c_{\ell i,2}^s, \eta_{\ell i,1}^s, \frac{1}{2}\sigma_{\ell i}\right\} > 0,$$

$$\Lambda_{P2} = \min\{2^p k_{\ell i,1}, 2^p k_{\ell i,2}, 2^p \eta_{\ell i,2}, \sigma_{\ell i}\} > 0,$$

$$D_P = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=4}^6 \left[D_{\ell i} + \sigma_{\ell i}(1-p)p^{\frac{p}{1-p}} \right].$$

由此根据引理2可知, 对于参数 $0 < \delta_p < 1$, V_P 将在有限时间 T_{P1} 内收敛至集合

$$|v_{\ell i,k}| \leq \min\left\{\sqrt{\frac{2D_P}{(1-\delta_p)\Lambda_{P1}}}, \sqrt{\left(\frac{2D_P}{(1-\delta_p)\Lambda_{P2}}\right)^{1/p}}\right\},$$

稳定时间满足

$$T_{P1} \leq \max \left\{ t_0 + \frac{1}{\delta_p \Lambda_{P1}(1-p)} \ln \frac{\delta_p \Lambda_{P1} V_P^{1-p}(t_0) + \Lambda_{P2}}{\Lambda_{P2}}, \right. \\ \left. t_0 + \frac{1}{\Lambda_{P1}(1-p)} \ln \frac{\Lambda_{P1} V_P^{1-p}(t_0) + \delta_p \Lambda_{P2}}{\delta_p \Lambda_{P2}} \right\}.$$

类似地, 构造附加李雅普诺夫函数如下:

$$V_{\xi P} = \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=4}^6 \left(\frac{1}{2} \xi_{\ell i,1}^2 + \frac{1}{2} \xi_{\ell i,2}^2 \right). \quad (44)$$

对于正常数 $\varpi_{\ell i}$, $|\alpha_{\ell i}^f - \alpha_{\ell i}| \leq \varpi_{\ell i}$ 可在有限时间 $T_{\ell i}^f$ 内实现, 因此当 $t \geq T_P^f = \max \{T_{\ell i}^f\}$ 时, 可得

$$\dot{V}_{\xi P} \leq -\Lambda_{\xi P1} V_{\xi P} - \Lambda_{\xi P2} V_{\xi P}^{\frac{1}{2}}, \quad (45)$$

其中, 通过适当选取参数, 对于 $\ell = 4, 5, 6$ 和 $i = 1, \dots, N$, 有 $\Lambda_{\xi P1} = 2 \min \{c_{\ell i,1}\} > 0$, $\Lambda_{\xi P2} = \sqrt{2} \min \{\kappa_{\ell i} - (d_i + b_i) \varpi_{\ell i}\} > 0$. 则根据引理1可知, $V_{\xi P}$ 将在有限时间 T_{P2} 内收敛至原点, 且稳定时间满足

$$T_{P2} \leq T_P^f + \frac{2}{\Lambda_{\xi P1}} \ln \frac{\Lambda_{\xi P1} V_{\xi P}^{\frac{1}{2}}(T_P^f) + \Lambda_{\xi P2}}{\Lambda_{\xi P2}}.$$

因此可知, 当 $t \geq \max \{T_{P1}, T_{P2}\}$ 时, 可以达成

$$|e_{\ell i,k}| \leq \min \left\{ \sqrt{\frac{2D_P}{(1-\delta_p)\Lambda_{P1}}}, \sqrt{\left(\frac{2D_P}{(1-\delta_p)\Lambda_{P2}} \right)^{1/p}} \right\},$$

则位置环内所有信号在有限时间内是半全局一致最终有界的. 此外, 通过合适的参数设置, 跟踪误差能收敛至原点邻域. 至此证明完成.

附注2 本文控制器包含多项关键参数, 其选取关系到控制性能乃至闭环系统的稳定性, 其中多数参数的取值原则已在对应公式下方注明, 应依据相应条件选择以确保系统稳定性. 在允许的取值范围内, 部分参数的选取大致将对控制器性能产生如下影响: 增大控制系数 $c_{\ell i,1}$, $c_{\ell i,2}$ 与有限时间控制参数 $k_{\ell i,1}$, $k_{\ell i,2}$ 通常能提升算法的收敛速度与跟踪精度, 但同时也会增加控制器负担与系统超调量. 减小有限时间幂次 p 能提升系统收敛速度, 但过小的取值会带来系统稳定性的隐患. 更大的 $\gamma_{\ell i}$ 及 $\eta_{\ell i,3}$ 取值有助于提高补偿信号针对饱和效应的响应速度和效果, 但需要搭配合适的 $\eta_{\ell i,1}$, $\eta_{\ell i,2}$ 取值以确保系统稳定性. 此外, 增大自适应参数 $\lambda_{\ell i}$ 可加快RBF神经网络对故障等未知非线性项的逼近速度, 但需与权重更新系数 $\sigma_{\ell i}$ 配合调节以避免过度调整.

在实际参数调节中, 建议遵循先内环后外环、先稳态精度后动态性能的递进原则, 并在收敛速度、跟踪精度与控制代价间取得工程折中.

4 仿真实验结果

在本节中, 将通过两组对比仿真算例验证所提控制策略的有效性, 其中:

(1) 实验场景1将在非仿射故障场景及输入饱和约束影响下对比本文所提算法与文献[6]中所提出的反步滑模控制方法(backstepping sliding mode control, BSMC)的轨迹跟踪效果;

(2) 实验场景2考虑故障表现形式为部分有效性损失场景下的多机编队控制问题, 除对比BSMC算法外还分别添加了用于验证饱和补偿机制及RBF神经网络设计有效性的消融实验.

两组实验场景下系统均包含一架虚拟领航者无人机和四架跟随者无人机, 其通信拓扑结构如图3所示, 其中0号无人机代表领航者, 其余1至4号为跟随者, 飞机编号与后续实验结果图中图线对应. 对比算法及消融实验算法的通信条件及初始条件均参照1号无人机进行设置. 仿真实验所采用无人机模型参数参照文献[23,24]设置, 如表1所示.

4.1 仿真实验场景1

本实验场景中, 领航者无人机的参考轨迹设置为 $[x_d, y_d, z_d] = [2\cos(0.2t), 2\sin(0.2t), 0.5t+1]$, 期望偏航角预设为 $0.25\pi + 0.2\sin(0.5t)$. 各跟随者无人机的期望编队期望位置偏移量设置分别为: x 轴 $[r_{41}, r_{42}, r_{43}, r_{44}] = [-1, 0, 1, 0]$, y 轴 $[r_{51}, r_{52}, r_{53}, r_{54}] = [0, 1, 0, -1]$, z 轴 $r_{6i} = 0$.

跟随者无人机初始状态设置为: $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [1.1, 2.2, 2.95, 1.9]$, $[y_1, y_2, y_3, y_4] = [0.1, 1.2, -0.1, -0.9]$, $z_i = 0$, $\phi_i = 0$, $\theta_i = 0$, $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4] = [0.8, 0.6, 0.7, 0.65]$. 对比算法BSMC的无人机的初始状态设为 $[x_c, y_c, z_c] = [2.1, 0.1, 0]$, $[\phi_c, \theta_c, \psi_c] = [0, 0, 0.8]$, 以保证其初始误差与1号无人机保持一致.

本场景中控制器所使用的RBF神经网络每个输入参数对应5个节点, 其中心均匀设置在区间 $[-5, 5]$ 内, 高斯函数宽度设置为2. 巴特沃斯低通滤波器设为 $H_i^L(s) = 1/(s^2 + 1.414s + 1)$. 控制器中其余参数设置如

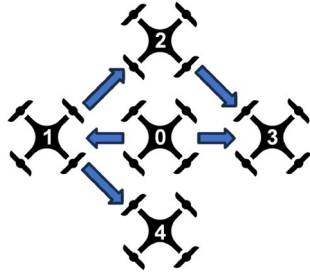


图 3 (网络版彩图)有向通信拓扑示意图

Figure 3 (Color online) Diagram of directed communication topology.

表 1 四旋翼无人机模型参数

Table 1 Quadrotor UAV model parameters

参数符号	参数取值	单位
m_i	0.486	kg
l_i	0.25	m
g	9.8	m/s ²
$I_{x,i}, I_{y,i}, I_{z,i}$	3.828, 3.828, 7.657	10 ⁻³ Nm/(rad s ⁻²)
$k_{x,i}, k_{y,i}, k_{z,i}$	5.567, 5.567, 6.354	10 ⁻⁴ N/(m s ⁻¹)
$k_{\phi,i}, k_{\theta,i}, k_{\psi,i}$	5.567, 5.567, 6.354	10 ⁻⁴ N/(m s ⁻¹)

表2所示. 实验考虑位置环和姿态环的外部扰动分别为 $0.01\cos t$ 和 $0.01\sin t$. 控制信号饱和和约束条件为: $u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3} \in [-3, 3], u_{i,4} \in [0, 3mg]$. 非仿射故障演化设置为 $R_{i,\mu} = 5$, 姿态环与位置环的故障发生时间分别为第10和15 s, 故障函数 $h_{i,\mu}$ 设置为

$$\begin{cases} h_{i,\phi} = 10\sin(2\phi_i\theta_i)\cos(0.5u_{i,1}) + 2, \\ h_{i,\theta} = 5\cos(0.5\theta_i\dot{\theta}_i^2) + 4\sin(u_{i,2} + 1.5), \\ h_{i,\psi} = 4\sin(\phi_i\theta_i + \psi_i)^2 + 5u_{i,3} - 2, \\ h_{i,x} = \cos(\dot{z}_i\dot{x}_i^2) + \sin(\tau_{i,4}), \\ h_{i,y} = 5\sin(\tau_{i,5}\cos(\dot{x}_i\dot{y}_i)), \\ h_{i,z} = 2\sin(\dot{z}_i)^2 - 1. \end{cases}$$

仿真结果中, 图4展示了此仿真实验场景下各无人机的三维飞行轨迹图, 显示出本文算法快速、高精度的编队轨迹跟踪效果. 图5和6对比了所提算法与BSMC的跟踪误差情况, 其中红色虚线对应对比算法BSMC, 图5详细展示了各无人机六维状态量的跟踪误差变化情况, 图6描绘了无人机总位置跟踪误差曲线. 图7描绘了非仿射故障项的影响曲线, 故障与系统状态量呈现复杂非线性耦合关系, 图8则展示了相应的

表 2 (仿真场景1)控制器参数设置

Table 2 (Simulation scenario 1) Controller parameter settings

参数符号	参数取值
$c_{1i,1}, c_{2i,1}, c_{3i,1}$	8, 8, 8
$c_{1i,2}, c_{2i,2}, c_{3i,2}$	8, 8, 8
$c_{4i,1}, c_{5i,1}, c_{6i,1}$	4, 4, 4
$c_{4i,2}, c_{5i,2}, c_{6i,2}$	8, 8, 8
$k_{\ell i,1}, k_{\ell i,2}$	0.5, 0.5
$\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}$	6, 6, 6
$\lambda_{4i}, \lambda_{5i}, \lambda_{6i}$	8, 8, 8
$\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \sigma_{3i}$	6, 6, 6
$\sigma_{4i}, \sigma_{5i}, \sigma_{6i}$	4, 4, 4
$\eta_{\ell i,1}, \eta_{\ell i,2}, \eta_{\ell i,3}, \gamma_{\ell i}$	5, 3, 2, 2
$\kappa_{\ell i}$	0.1
p	95/101
$\gamma_1, \gamma_2, \varrho$	15, 15, 20

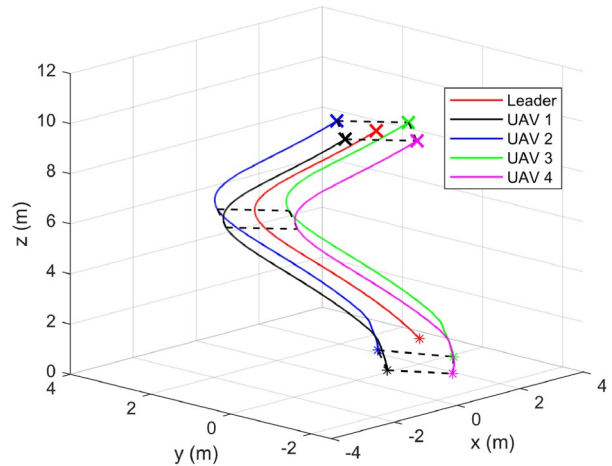


图 4 (网络版彩图)无人机飞行三维轨迹

Figure 4 (Color online) 3D trajectory of the UAVs.

控制器输出(以1号无人机为例).

从图5和6可以看出, 得益于有限时间控制设计, 本文所提算法跟踪误差的收敛速度显著快于BSMC方法. 在相同的初始误差条件下, BSMC方法的总位置误差收敛至0.01精度用时约2.54 s, 而本文算法下的1号无人机仅用时约1.08 s, 收敛速度提升约135%, 本文算法在保持同样高精度跟踪效果的同时实现了更快的收敛速度. 此外, 在发生非仿射故障后, BSMC方法因缺乏显式容错机制, 跟踪精度出现明显下降, 其总位置跟踪

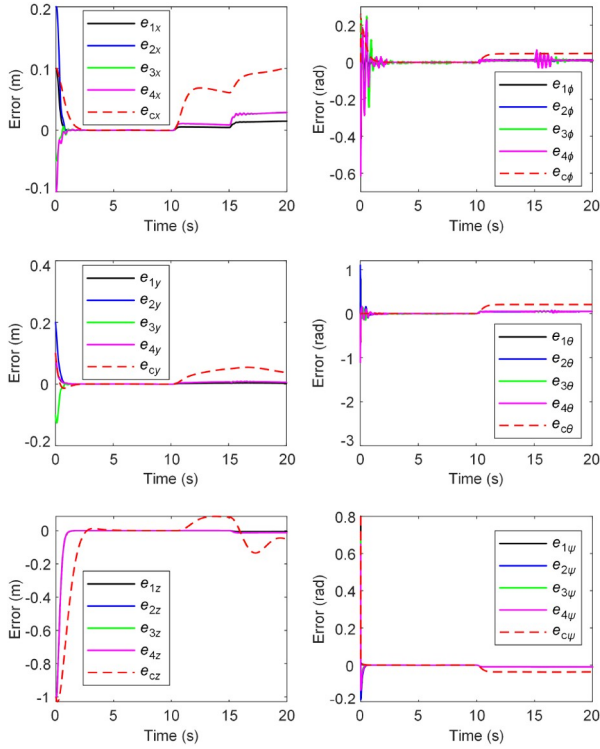


图 5 (网络版彩图)位置环与姿态环跟踪误差

Figure 5 (Color online) Tracking error of the position-loop and attitude-loop.

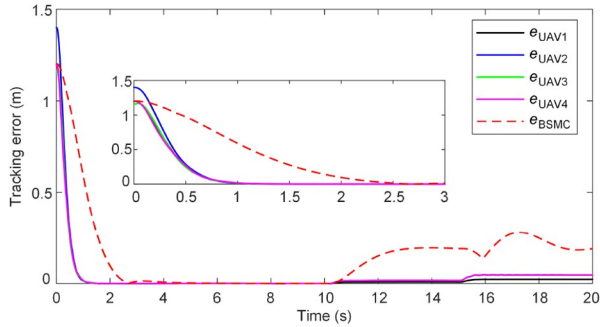


图 6 (网络版彩图)无人机总位置跟踪误差

Figure 6 (Color online) Total position tracking error of UAV.

误差由0.001上升至约0.195; 而本文算法通过引入RBF神经网络有效逼近了故障引起的非线性动态, 并在控制器中实现对故障的主动补偿, 从而在非仿射故障条件下仍保持了较高的跟踪精度, 具体而言, 发生姿态环故障后总位置误差最大约0.017, 同时出现位置与姿态故障后集群最大总位置误差仍小于0.048, 展现出优秀的容错性能。

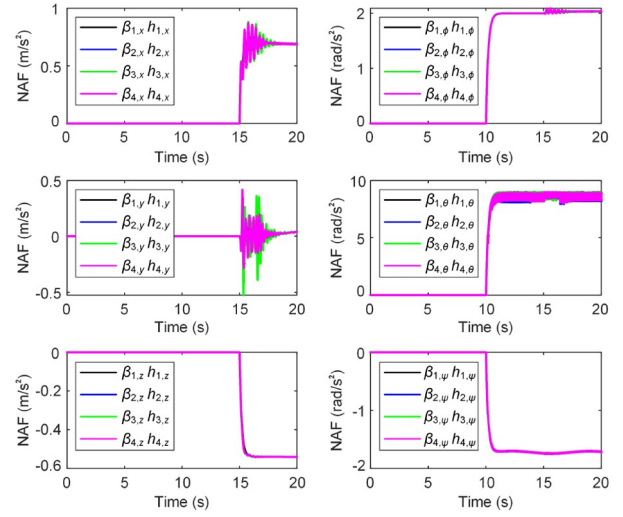


图 7 (网络版彩图)执行器故障曲线

Figure 7 (Color online) Actuator fault curves.

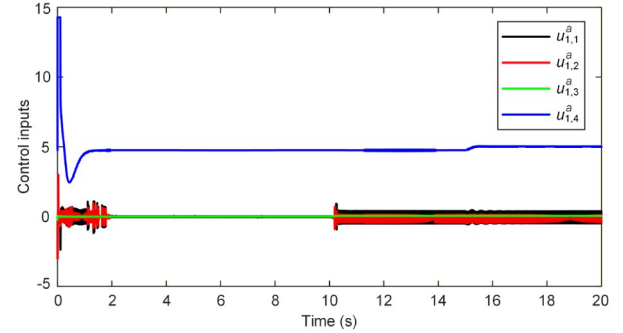


图 8 (网络版彩图)实际控制信号

Figure 8 (Color online) Actual control signal.

4.2 仿真实验场景2

本实验场景中, 领航者无人机的参考轨迹设置为 $[x_d, y_d, z_d] = [\sin(0.5t), t, 6]$, 期望偏航角为 $0.5\sin(0.2t)$. 各跟随者无人机的期望编队期望位置偏移量设置分别为: x 轴 $[r_{41}, r_{42}, r_{43}, r_{44}] = [-1, -0.5, 1, 0.5]$, y 轴 $r_{5i} = 0$, z 轴 $[r_{61}, r_{62}, r_{63}, r_{64}] = [1, 0.5, -1, -0.5]$.

跟随者无人机初始状态设置为: $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [-2, 0, 2, 0]$, $[y_1, y_2, y_3, y_4] = [0, 1, 0, -1]$, $z_i = 0$, $\phi_i = 0$, $\theta_i = 0$, $[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4] = [0.1, 0.05, -0.15, 0]$. 对比算法BSMC的无人机的初始误差与1号无人机保持一致.

本实验场景中控制器所使用的RBF神经网络和巴特沃斯低通滤波器设置与实验场景1相同. 控制器中其余参数设置如表3所示. 本实验中考虑的外部扰动与输

入饱和约束条件与实验场景1相同. 本实验考虑故障表现形式为执行器部分有效性损失故障的情况, 以验证本文算法对常见故障类型的广泛容错性能, 其中, 自第0 s开始, 控制输入 $u_{i,1}$, $u_{i,2}$, $u_{i,3}$ 分别损失10%, 15%, 20%的输出幅值, 自第5 s开始, 控制信号 $u_{i,4}$ 的执行器输出下降为原本的80%.

仿真结果中, 图9展示了此仿真实验场景下各无人机的三维飞行轨迹图, 尽管具有很大的初始误差, 本文算法仍能达成很好地编队跟踪效果. 图10详细展示了

表 3 (仿真场景2)控制器参数设置

Table 3 (Simulation scenario 2) Controller parameter settings

参数符号	参数取值
$c_{1i,1}, c_{2i,1}, c_{3i,1}$	6, 6, 6
$c_{1i,2}, c_{2i,2}, c_{3i,2}$	8, 8, 8
$c_{4i,1}, c_{5i,1}, c_{6i,1}$	2, 2, 2
$c_{4i,2}, c_{5i,2}, c_{6i,2}$	3, 3, 3
$k_{\ell i,1}, k_{\ell i,2}$	0.5, 0.5
$\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}$	5, 5, 5
$\lambda_{4i}, \lambda_{5i}, \lambda_{6i}$	7, 7, 7
$\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \sigma_{3i}$	6, 6, 6
$\sigma_{4i}, \sigma_{5i}, \sigma_{6i}$	4, 4, 4
$\eta_{\ell i,1}, \eta_{\ell i,2}, \eta_{\ell i,3}, \gamma_{\ell i}$	5, 3, 2, 2
$\kappa_{\ell i}$	0.1
p	90/101
$\gamma_1, \gamma_2, \varrho$	10, 15, 15

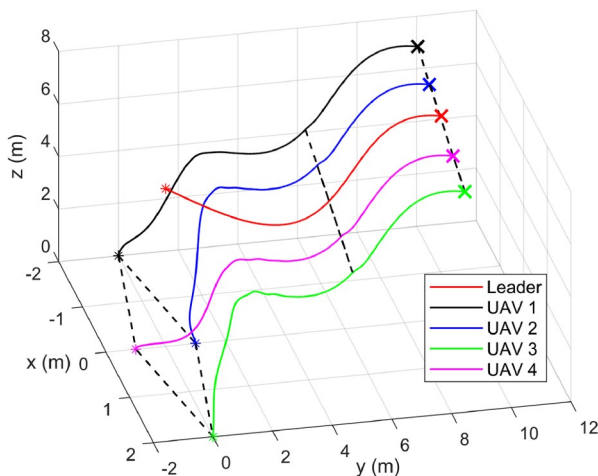


图 9 (网络版彩图)无人机飞行三维轨迹
Figure 9 (Color online) 3D trajectory of the UAVs.

所提算法与BSMC的位置环及姿态环跟踪误差情况, 图11中除BSMC外, 还添加了用于验证本文算法设计有效性的消融实验结果, 其中图中红色虚线对应BSMC方法结果. 图12描绘了执行器故障对于系统的影响效果, 图13展示了相应的控制器输出(以1号无人机为例).

由图11所示, 相较于BSMC方法, 本文算法在收敛

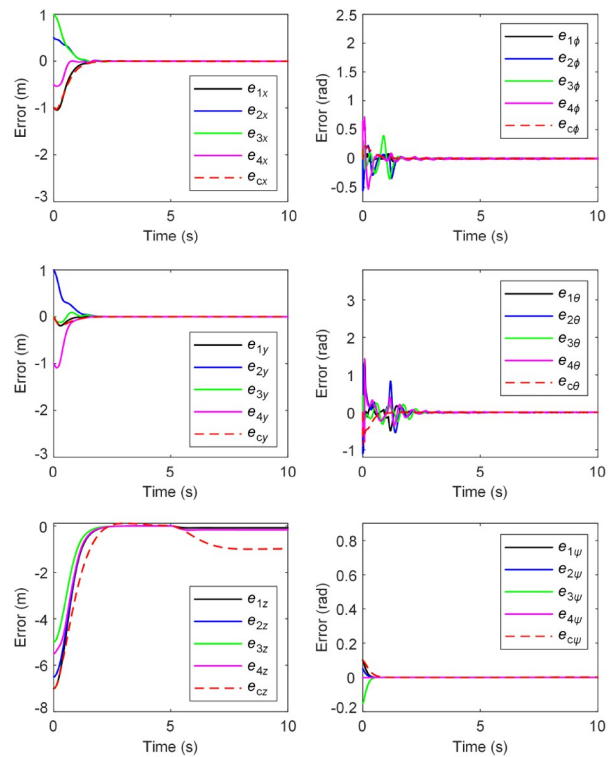


图 10 (网络版彩图)位置环与姿态环跟踪误差

Figure 10 (Color online) Tracking error of the position-loop and attitude-loop.

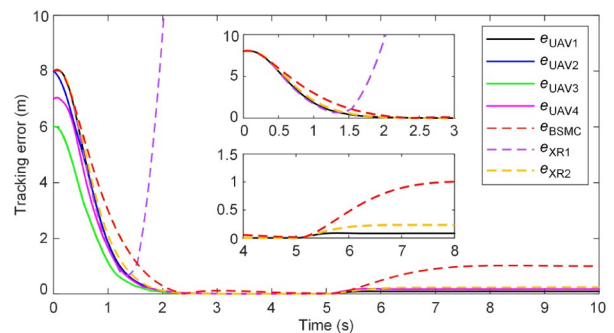


图 11 (网络版彩图)无人机总位置跟踪误差

Figure 11 (Color online) Total position tracking error of UAV.

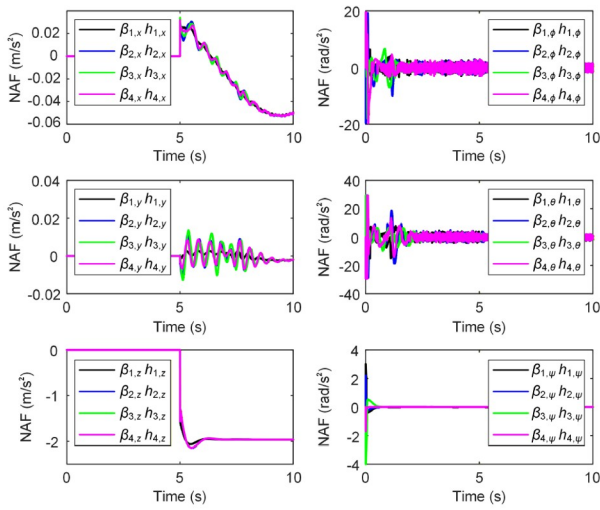


图 12 (网络版彩图) 执行器故障曲线
Figure 12 (Color online) Actuator fault curves.

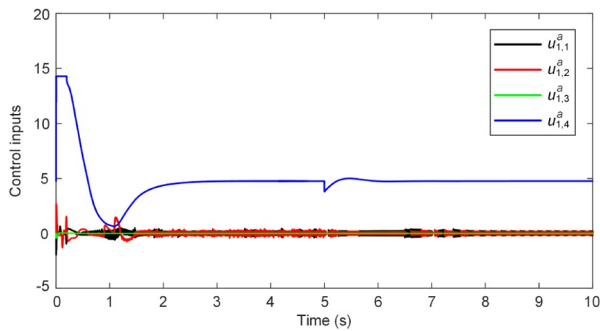


图 13 (网络版彩图) 实际控制信号
Figure 13 (Color online) Actual control signal.

速度方面仍具明显优势, 相同初始误差条件下, 本文算法下1号无人机与BSMC的总位置误差收敛至0.02精度用时分别为2.57与4.85 s, 收敛速度提升约89%。此外, 在本仿真场景中, 还设置了两项消融实验以验证所提算法的关键设计模块: 分别为移除饱和补偿模块(记为XR1)和移除RBF神经网络模块(记为XR2)。为便于直观对比, 消融实验仅针对1号无人机进行。在消融实验

结果中, XR1(无饱和补偿)的跟踪误差 e_{XR1} 在初始阶段收敛速度虽略快于 e_{UAV1} , 但由于缺乏抗饱和补偿机制, 控制信号无法被有效引导回非饱和区域, 导致执行器持续饱和, 控制系统逐渐发散。该结果证明了本文所设计的饱和补偿机制在维持系统稳定性方面的必要性和有效性。此外, XR2(无神经网络)的初始收敛速度及故障后的稳态跟踪精度均低于本文完整算法, 具体而言, 在发生位置环故障后, BSMC, XR2及本文算法下1号无人机的总位置跟踪误差分别约维持在0.99, 0.24, 0.09。该对比结果验证了算法中自适应RBF神经网络在提升系统容错性能与鲁棒性方面的重要作用。

5 总结与讨论

本研究针对存在输入饱和、执行器故障、部分模型参数未知及外部扰动等多重复杂因素耦合下影响的多四旋翼无人机编队控制问题, 提出了一种基于命令滤波反步法的有限时间自适应容错控制策略。通过引入有限时间命令滤波器结合滤波误差补偿机制, 有效克服了传统反步法中的“复杂性爆炸”问题, 在保证系统有限时间稳定性的同时显著降低了计算复杂度。针对系统存在的非仿射执行器故障、未知非线性动态及外部扰动, 采用自适应RBF神经网络进行逼近与补偿。此外, 通过抗饱和和补偿器设计有效缓解了输入饱和和约束带来的负面影响。最后, 基于有限时间稳定性理论, 严格证明了闭环系统的有限时间有界性。两组对比仿真实验结果表明, 所提控制算法在执行器故障及输入饱和和约束同时存在的情况下, 仍能确保无人机编队快速、准确地跟踪期望轨迹, 展现出优越的暂态性能、容错能力及鲁棒性。

综上所述, 本研究为解决复杂不确定环境下无人机集群协同控制问题提供了一种有效的解决方案, 其设计思路也可作为其他类型的多智能体系统容错控制研究提供参考。

参考文献

- Skorobogatov G, Barrado C, Salami E. Multiple UAV systems: A survey. *Unmanned Syst*, 2020, 08: 149–169
- Gong J W, Fan Y M. Active disturbance rejection control method for UAV autonomous aerial refueling based on reflected pigeon-inspired optimization (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2025, 55: 893–905 [巩嘉玮, 范彦铭. 基于反射鸽群优化算法的无人机自主空中加油自抗扰控制方法. *中国科学: 技术科学*, 2025, 55: 893–905]

- 3 Yao B Y, Lu P, Yang S, et al. An overview of flight control technology for quadrotor aircrafts (in Chinese). *Aero Weaponry*, 2020, 27: 9–16 [姚博誉, 路平, 杨森, 等. 四旋翼飞行器飞行控制技术综述. *航空兵器*, 2020, 27: 9–16]
- 4 Zhao X, Zhou H. Distributed collaborative control technology in multiple unmanned aerial vehicle operations. In: *Proceedings of 2023 5th International Conference on Robotics, Intelligent Control and Artificial Intelligence (RICAI)*. Piscataway: IEEE, 2023. 393–396
- 5 Wang Z D, Zhang Y. Research on prediction-PID compound control of quadrotor UAV (in Chinese). *Control Eng China*, 2021, 28: 1390–1397 [汪震东, 张艳. 四旋翼无人机预测-PID复合控制研究. *控制工程*, 2021, 28: 1390–1397]
- 6 Hou Y, Chen D, Yang S. Adaptive robust trajectory tracking controller for a quadrotor UAV with uncertain environment parameters based on backstepping sliding mode method. *IEEE Trans Automat Sci Eng*, 2025, 22: 4446–4456
- 7 Zhao Y, Zhao L, Yu J, et al. Discrete-time adaptive fuzzy command filtered backstepping control for quadrotor unmanned aerial vehicle systems: Theory and experiments. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2024, 32: 3618–3628
- 8 Wang J, Zhu B, Zheng Z. Robust adaptive control for a quadrotor UAV with uncertain aerodynamic parameters. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2023, 59: 8313–8326
- 9 Oh K K, Park M C, Ahn H S. A survey of multi-agent formation control. *Automatica*, 2015, 53: 424–440
- 10 Liao J, Mao K, Xin B, et al. Extended observer-based consensus tracking control for MASs with external disturbance and dynamic event-triggered strategy. *Sci China Tech Sci*, 2025, 68: 1320403
- 11 Dong X, Zhou Y, Ren Z, et al. Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying. *IEEE Trans Ind Electron*, 2017, 64: 5014–5024
- 12 Jia Z, Wang L, Yu J, et al. Distributed adaptive neural networks leader-following formation control for quadrotors with directed switching topologies. *ISA Trans*, 2019, 93: 93–107
- 13 Wang R, Liu J. Adaptive formation control of quadrotor unmanned aerial vehicles with bounded control thrust. *Chin J Aeronautics*, 2017, 30: 807–817
- 14 Yu Z, Zhang Y, Jiang B, et al. Distributed adaptive fault-tolerant time-varying formation control of unmanned airships with limited communication ranges against input saturation for smart city observation. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2022, 33: 1891–1904
- 15 Tong S, Zhou H, Li Y. Neural network event-triggered formation fault-tolerant control for nonlinear multiagent systems with actuator faults. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2023, 53: 7571–7582
- 16 Cheng S, Xin B, Wang Q, et al. Command filtered neuroadaptive fault-tolerant control for nonlinear systems with input saturation and unknown control direction. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2024, 35: 7963–7973
- 17 Kim S, Kim M, Kim Y. Fault-tolerant adaptive control for trajectory tracking of a quadrotor considering state constraints and input saturation. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2024, 60: 3148–3159
- 18 Wang Q, Cheng J, Xin B. Finite-time fault-tolerant cooperative control for multi-agent systems with input saturation and unknown control coefficients. *J Franklin Institute*, 2025, 362: 108096
- 19 Zheng X, Li H, Ahn C K, et al. NN-based fixed-time attitude tracking control for multiple unmanned aerial vehicles with nonlinear faults. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2022, 59: 1–11
- 20 Zheng X, Li X M, Yao D, et al. Observer-based finite-time consensus control for multiagent systems with nonlinear faults. *Inf Sci*, 2023, 621: 183–199
- 21 Yu S, Yu X, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 2005, 41: 1957–1964
- 22 Ji R, Ma J, Li D, et al. Finite-time adaptive output feedback control for MIMO nonlinear systems with actuator faults and saturations. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2021, 29: 2256–2270
- 23 Mofid O, Mobayen S. Adaptive sliding mode control for finite-time stability of quad-rotor UAVs with parametric uncertainties. *ISA Trans*, 2018, 72: 1–14
- 24 Mofid O, Mobayen S. Adaptive finite-time backstepping global sliding mode tracker of quad-rotor UAVs under model uncertainty, wind perturbation, and input saturation. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2022, 58: 140–151
- 25 Cui G, Yu J, Wang Q G. Finite-time adaptive fuzzy control for MIMO nonlinear systems with input saturation via improved command-filtered backstepping. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2022, 52: 980–989
- 26 Xu Q, Wang Z, Zhen Z. Adaptive neural network finite time control for quadrotor UAV with unknown input saturation. *Nonlinear Dyn*, 2019, 98:

1973–1998

- 27 Sanner R M, Slotine J J E. Gaussian networks for direct adaptive control. *IEEE Trans Neural Netw*, 1992, 3: 837–863
- 28 Chen B, Zhang H, Liu X, et al. Neural observer and adaptive neural control design for a class of nonlinear systems. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2018, 29: 4261–4271
- 29 Yu Y, Guo J, Ahn C K, et al. Neural adaptive distributed formation control of nonlinear multi-UAVs with unmodeled dynamics. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2023, 34: 9555–9561
- 30 Yu J, Shi P, Zhao L. Finite-time command filtered backstepping control for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 2018, 92: 173–180
- 31 Zheng X, Yu X, Yang X, et al. Practical finite-time command-filtered adaptive backstepping with its applications to quadrotor hovers. *IEEE Trans Cybern*, 2024, 54: 3017–3029
- 32 Zou A M, Hou Z G, Tan M. Adaptive control of a class of nonlinear pure-feedback systems using fuzzy backstepping approach. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2008, 16: 886–897

Finite-time fault-tolerant formation control of multiple quadrotor UAVs under input saturation

WANG Qing^{1,2}, CHENG JunZhe¹, HU HongJian¹, XIN Bin^{1,2*} & DONG Yi³

¹ School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

² State Key Laboratory of Autonomous Intelligent Unmanned Systems, Beijing 100081, China

³ College of Electronic and Information Engineering, Shanghai Research Institute for Intelligent Autonomous Systems, Tongji University, Shanghai 200092, China

Aiming at the formation control problem of multiple quadrotor unmanned aerial vehicles (UAVs) subject to input saturation and actuator faults, this paper proposes a finite-time fault-tolerant control strategy based on the command-filtered backstepping. UAV systems operating in complex real-world environments face multiple challenges, including actuator faults with nonlinear coupling characteristics due to factors such as mechanical wear, control input saturation caused by physical power limitations of components, as well as parametric uncertainties and external disturbances, which severely affect the reliability, robustness, and transient performance of formation control. To tackle these challenges, this study focuses on the finite-time leader-follower formation tracking control problem under the coupling influence of the aforementioned multiple complex factors. Specifically, a finite-time command filter is introduced to resolve the issue of high computational complexity arising from repeated differentiation in conventional backstepping design, along with a compensation mechanism to eliminate filtering errors. Secondly, for unknown nonlinear dynamics in the system, radial basis function neural networks are employed for approximation, with an adaptive law designed to update the weights online. Additionally, an anti-windup compensator is constructed to mitigate the adverse effects of input saturation. Based on these designs, the finite-time stability of the closed-loop system is rigorously analyzed using the finite-time Lyapunov stability criterion, demonstrating the finite-time boundedness of all closed-loop signals. Finally, the effectiveness of the proposed control algorithm is validated through two sets of comparative simulation results. The results indicate that, even under the combined influence of actuator faults and input saturation constraints, the proposed algorithm ensures that the UAV formation tracks the desired trajectory quickly and accurately within a finite time, while exhibiting excellent fault-tolerant capability, robustness, and transient performance. This work provides an effective solution for high-precision and highly reliable cooperative control of UAV swarms in complex uncertain environments.

quadrotor UAV, formation control, fault-tolerant control, input saturation, finite-time control

doi: [10.1360/SST-2025-0359](https://doi.org/10.1360/SST-2025-0359)