



论 文

受损斜拉索结构的随机振动分析

兰郎帅^{1,2}, 陈林聪^{1,2*}, 赵珧冰^{1,2}

1. 华侨大学土木工程学院, 厦门 361021

2. 福建省智慧基础设施与监测重点实验室, 厦门 361021

* E-mail: lincongchen@hqu.edu.cn

收稿日期: 2024-04-16; 接受日期: 2024-08-12; 网络版发表日期: 2025-01-07

国家自然科学基金(批准号: 12072118, 12372029, 12272139)和福建省杰出青年科学基金(批准号: 2021J06024)资助项目

摘要 拉索结构受材料老化、过载等因素影响, 常会发生损伤现象. 同时, 拉索结构的高柔特征可能使其反复面临高幅振动的风险, 进而加剧损伤程度, 并最终危及整桥的安全. 因此, 准确预测受损拉索结构的动力响应并分析其振动特性, 对实现有效的健康监测以及制定相应的修复策略至关重要. 然而, 当前研究多局限于确定性振动分析, 忽略了真实激励的强随机特性; 或仅考察了无损拉索结构的随机振动问题. 总之, 关于受损拉索的随机振动研究仍亟待开展. 本文以高斯白噪声模型模拟实际随机激励, 开展受损斜拉索结构的非线性随机振动研究. 首先, 建立受损斜拉索系统的非线性随机动力学模型, 引入表示损伤程度、范围及位置的损伤参数, 确定受损斜拉索静态构型, 推导系统运动微分方程并采用伽辽金方法加以离散. 随后, 应用径向基函数神经网络(RBFNN)方法求解系统对应的Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK)方程, 探究不同损伤参数对系统稳态响应的影响规律. 结果表明: 损伤程度和范围的增加显著放大系统位移响应, 而损伤位置的影响几乎可以忽略; 面内位移响应均值与损伤程度和范围呈一定线性关系. 此外, 所有蒙特卡洛模拟(MCS)数据验证了RBFNN方法的准确性和适用性. 相关研究结果为评估斜拉索系统的运行状况及实现有效的健康监测提供了新的理论参考.

关键词 受损拉索结构, 随机激励, 非线性随机振动, 径向基函数神经网络, 稳态响应

1 引言

拉索结构因其独特的优势在大跨度桥梁建设中被广泛应用. 然而, 由于施工过程的复杂性, 拉索保护层可能会出现划伤或者开裂, 使拉索更容易发生材料老化^[1]. 随着运营时间的延长, 腐蚀、疲劳和冲击等因素也会不断出现, 进而加剧拉索损伤^[2]. 加之拉索固有的高柔性特征使其长期面临反复的高幅振动风险^[3], 致

使损伤进一步恶化, 并最终危及整体桥梁的安全稳定运行. 因此, 准确预测受损拉索结构的动力响应并分析其振动特性, 对于实现有效的健康监测以及制定相应的修复策略至关重要.

近二十年来, 国内外已有学者开始关注受损拉索系统的动力学问题. Lepidi等人^[4,5]和Ubertini^[6]引入三个不同的损伤参数, 建立了受损悬索的力学模型, 并深入考察了损伤和Irvine参数对系统静(动)力学特性

引用格式: 兰郎帅, 陈林聪, 赵珧冰. 受损斜拉索结构的随机振动分析. 中国科学: 技术科学, 2025, 55: 148–157

Lan L S, Chen L C, Zhao Y B. Stochastic vibration analysis of damaged stay cable structures (in Chinese). Sci Sin Tech, 2025, 55: 148–157, doi: 10.1360/SST-2024-0095

的影响. Sun等人^[7]则补充了腐蚀时间对受损拉索静(动)力学特性的影响, 为腐蚀引起的拉索性能退化提供了新的见解. 最近, 赵冰等人^[8-10]系统研究了温度效应和损伤效应共同影响下的受损悬索的动力学模型. 研究表明, 拉索的固有频率和振型与损伤状况密切相关, 损伤不仅会降低拉索的疲劳性能, 还将引起系统的非线性分岔现象. 总而言之, 上述研究虽对受损拉索的动力学特性提出了一定实质性见解, 但相关研究仍集中于确定性分析.

事实上, 拉索结构所受真实激励均具有强烈的随机特性^[11]. 迄今为止, 众多学者针对无损拉索的随机振动问题已进行了深入研究^[12-14]. 各种数值求解方法也被陆续提出, 如统计线性化法、路径积分法、蒙特卡洛模拟方法和迭代加权残值法等^[15-17]. 特别地, 近期一部分学者开始用神经网络来预测拉索的随机响应, 例如: Fang等人^[18]利用贝叶斯正则化反向传播神经网络分析了随机风浪荷载作用下大跨度斜拉桥的非线性响应; Ye等人^[19]则利用RBFNN方法, 全面分析组合随机激励下支座运动及不同系统参数对三维无损斜拉索系统稳态响应的影响. 综上, 针对无损拉索的非线性随机振动研究已较为广泛, 但对于受损拉索的随机振动研究亟待开展.

基于此, 本文研究了受损斜拉索结构的非线性随机振动问题. 首先, 通过引入损伤程度、范围和位置, 推导得自重作用下受损斜拉索的静态构型. 随后, 建立了面内受损斜拉索系统的随机动力学模型. 通过特征值分析, 求解受损斜拉索的固有频率和振型函数, 运用伽辽金法对系统运动微分方程进行离散化处理. 最后, 利用RBFNN方法求解稳态FPK方程以获得系统稳态响应概率密度函数(PDF)及其均值(MV). 结合工程实例, 分别研究了不同系统参数对系统稳态响应的影响, 特别探究了损伤参数对系统随机响应特性的影响规律. 此外, 大量的MCS数据将用于检验RBFNN结果的准确性.

2 数学建模

2.1 模型描述

本文选用在某一区域内受损且仅受重力和随机激励作用的斜拉索结构开展研究, 如图1所示. 现引入以下假设条件: (1) 斜拉索由连续均匀且各向同性的材料

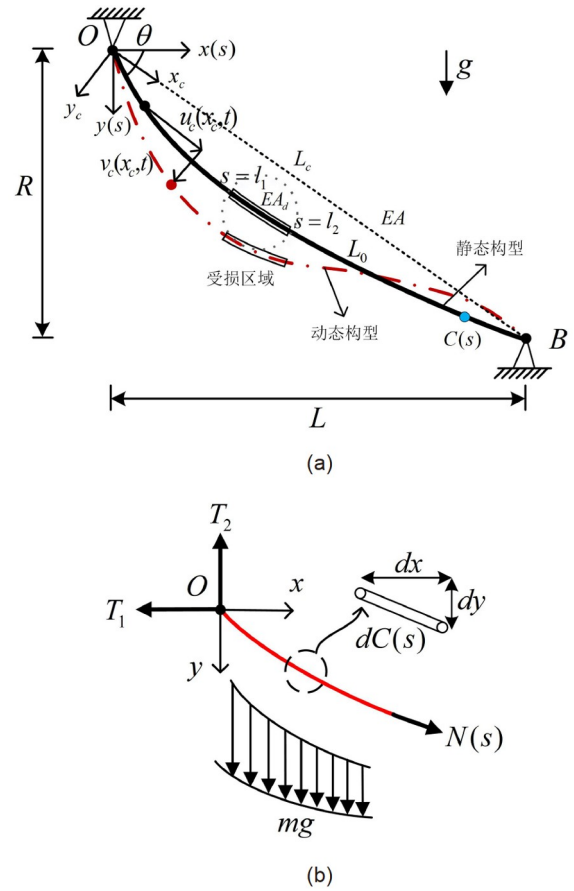


图1 (网络版彩图) 受损斜拉索: (a) 基本静态和动态模型; (b) 拉索左端静力平衡示意图

Figure 1 (Color online) Damaged stay cable: (a) basic static and dynamic model; (b) static equilibrium at the left end of cable.

构成; (2) 仅考虑斜拉索拉应力和应变, 忽略其抗弯、抗扭和抗剪刚度; (3) 斜拉索损伤不涉及材料损失, 即质量和密度不变^[9].

如图1(a)所示, 斜拉索悬挂于锚固点 O 和 B 之间, 坐标分别为 $(0,0)$ 和 (L,R) . $x(s)$ 和 $y(s)$ 为全局坐标函数, θ 为斜拉索与水平方向的夹角. L_0 为斜拉索自然长度. $C(s)$ 为斜拉索上任意一点, s 为弧坐标. 斜拉索上任意位置的抗拉刚度 EA 由杨氏模量 E 与截面积 A 的乘积表示. 斜拉索运动时, $u_c(x_c, t)$ 和 $v_c(x_c, t)$ 分别为局部坐标系 $x_c O y_c$ 中不同方向的位移分量. 图1(b)为斜拉索左端局部静力分析示意图. T_1 和 T_2 分别为锚固点 O 处的水平和竖直反力. $N(s)$ 为斜拉索轴向拉力, m 为斜拉索单位长度质量, g 为重力加速度.

此外, 假定损伤区域为 $[l_1, l_2]$, 该区域由损伤范围 δ

和位置 α 两个损伤参数定义^[4,6], 即

$$\delta = \frac{l_2 - l_1}{L_0}, 0 \leq \delta \leq 1; \alpha = \frac{l_1 + l_2}{2L_0}, 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

而斜拉索损伤程度 $\xi(s)$ 可由下式^[4,6]表示:

$$\xi(s) = \frac{EA - EA_d(s)}{EA}, 0 \leq \xi(s) < 1, \quad (2)$$

其中, EA 为未损处的轴向刚度, $EA_d(s)$ 为受损处的轴向刚度. 为便于分析, 假设斜拉索受损区域内损伤程度是均匀的, 故 $\xi(s)$ 在全索范围内的变化采用下列分段函数表示, 即

$$\xi(s) = \begin{cases} \eta, & \text{if } l_1 < s < l_2, \\ 0, & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (3)$$

式中, η 为一常数.

2.2 受损斜拉索的静态构型

由于斜拉索位于 xy 平面内, 因此必须满足以下几何约束条件:

$$\left(\frac{dx}{dC}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dC}\right)^2 = 1. \quad (4)$$

现选取斜拉索左端进行局部受力分析, 如图1(b)所示, 可得锚固点 O 处的静力平衡方程如下:

$$N \frac{dx}{dC} = T_1, N \frac{dy}{dC} = T_2 - G \frac{s}{L_0}, \quad (5)$$

其中, G 为斜拉索总重. 此外, 考虑损伤效应, 受损斜拉索的本构关系式^[4]如下:

$$\frac{N}{EA(1-\xi)} = \frac{dC}{ds} - 1. \quad (6)$$

随后, 将式(5)代入式(4), 可得斜拉索轴向拉力表达式如下:

$$N(s) = \sqrt{T_1^2 + (T_2 - Gs/L_0)^2}. \quad (7)$$

进而, 结合式(5)~(7), 推导得微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \frac{T_1}{EA(1-\xi)} + \frac{T_1}{\sqrt{T_1^2 + (T_2 - Gs/L_0)^2}}, \\ \frac{dy}{ds} = \frac{(T_2 - Gs/L_0)}{EA(1-\xi)} + \frac{(T_2 - Gs/L_0)}{\sqrt{T_1^2 + (T_2 - Gs/L_0)^2}}. \end{cases} \quad (8)$$

注意, 未知坐标函数 $x(s)$ 和 $y(s)$ 可由上述方程组(8)进行求解, 且满足以下边界和连续性条件:

$$\begin{aligned} x(0) = 0, \quad x(L_0) = L, \quad y(0) = 0, \quad y(L_0) = R, \\ x_i^\pm = \lim_{k \rightarrow 0} x(l_i \pm \Delta), \quad y_i^\pm = \lim_{k \rightarrow 0} y(l_i \pm \Delta), \quad \Delta > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

具体结果为

$$x(s) = \begin{cases} \frac{T_1}{EA} s + \gamma_1(s), & 0 \leq s < l_1, \\ \frac{T_1}{EA(1-\eta)} (s - \eta l_1) + \gamma_1(s), & l_1 \leq s \leq l_2, \\ \frac{T_1}{EA} s + \frac{\mu T_1 (l_2 - l_1)}{EA(1-\eta)} + \gamma_1(s), & l_2 < s \leq L_0, \end{cases} \quad (10)$$

$$y(s) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2EA} (2T_2 - Gs/L_0) s + \gamma_2(s), & 0 \leq s < l_1, \\ \frac{1}{2EA(1-\eta)} [(2T_2 - Gs/L_0) s - \eta l_1 (2T_2 - Gl_1/L_0)] + \gamma_2(s), & l_1 \leq s \leq l_2, \\ \frac{1}{2EA(1-\eta)} \left\{ (1-\eta) (2T_2 - Gs/L_0) s + \eta (l_2 - l_1) [2T_2 - G(l_2 + l_1)/L_0] \right\} + \gamma_2(s), & l_2 < s \leq L_0, \end{cases} \quad (11)$$

其中, 辅助函数 $\gamma_1(s)$ 和 $\gamma_2(s)$ 表达式如下:

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &= \frac{T_1 L_0}{W} \left[\operatorname{arcsinh} \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \operatorname{arcsinh} \left(\frac{T_2 - Gs/L_0}{T_1} \right) \right], \\ \gamma_2(s) &= \frac{T_1 L_0}{W} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{T_2 - Gs/L_0}{T_1} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

特别地, 坐标函数(10)和(11)中未知反力 T_1 和 T_2 需通过求解以下方程组获得, 即

$$\begin{cases} L = \frac{T_1 L_0}{EA} + \frac{\eta T_1 (l_2 - l_1)}{EA(1-\eta)} + (T_1 L_0 / G) \\ \quad \times [\operatorname{arcsinh}(T_2 / T_1) - \operatorname{arcsinh}[(T_2 - G) / T_1], \\ R = \frac{1}{EA(1-\eta)} \left\{ L_0 (1-\eta) (2T_2 - G) \right. \\ \quad \left. + \eta (l_2 - l_1) [2T_2 - G(l_2 + l_1) / L_0] \right\} + (T_1 L_0 / G) \\ \quad \times [\sqrt{1 + (T_2 / T_1)^2} - \sqrt{1 + [(T_2 - G) / T_1]^2}]. \end{cases} \quad (13)$$

最后, 将方程组(13)的解代回式(10)和(11), 通过整理后得到受损斜拉索静态构型表达式 $y(x)$.

为配合下一小节的随机动力学分析, 宜将系统各参数转移至局部坐标系 $x_c O y_c$ 中. 特别地, 分段样条函数 $y(x)$ 被分为三段, 即未损段 $y_{c1}(x_c)$ ($0 < x_c < l_1$), 受损段 $y_{c2}(x_c)$ ($l_1 < x_c < l_2$)和未损段 $y_{c3}(x_c)$ ($l_2 < x_c < L_c$), 其中, $x_c = x \cos \theta - y \sin \theta$, $y_c = x \sin \theta + y \cos \theta$. (14)

至此, 结合局部坐标系中受损斜拉索的静态构型, 后续重点将是推导受损斜拉索系统的随机动力学方程.

2.3 受损斜拉索结构的非线性随机动力学系统

考虑高斯白噪声激励作用下的受损斜拉索在平面内发生非线性随机振动. 运用Hamilton变分原理, 可建立如下的受损斜拉索面内系统运动方程:

$$m\ddot{u}_c + c_u \dot{u}_c - EA(1 - \xi)(u'_c + \kappa^2 y'_{c0} v'_c + v'_c{}^2/2)' = 0, \quad (15)$$

$$m\ddot{v}_c + c_v \dot{v}_c - \chi^2 T_1 v''_c - EA(\kappa^2 y''_{c0} + v''_c) \times (1 - \xi)(u'_c + \kappa^2 y'_{c0} v'_c + v'_c{}^2/2)' = F(x_c, t), \quad (16)$$

其中, 点()和撇()'分别表示对 t 和 x_c 求偏导; c_v 和 c_u 为不同方向的阻尼系数; $y_{c0}(x_c) = 4b(L_c - x_c)x_c/L_c^2$ 为小垂度拉索的初始静态构型, 垂度 $b = (mgL_c^2 \cos\theta)/8T_0$; χ^2 和 κ^2 分别表示受损斜拉索的张力折减系数和垂度增大系数, 即

$$T_d = \chi^2 T_u, \quad b_d = \kappa^2 b_u, \quad (17)$$

其中, T_d (T_u)和 b_d (b_u)分别表示有(无)损伤时斜拉索的水平张力和垂度. 此外, 外部激励 $F(x_c, t) = \alpha(x_c)W(t)$ 由形函数 $\alpha(x_c) = (x_c/L_c)^{0.16}$ 与均值为零且强度为 D 的高斯白噪声激励 $W(t)$ 的乘积表示, 其中 $\alpha(x_c)$ 与风速的空间分布较为相似. 式(15)和(16)的边界及连续性条件为

$$\begin{aligned} u_c(0) = 0, u_c(L) = 0, v_c(0) = 0, v_c(L) = 0, \\ u_{ci}^\pm = \lim_{\gamma \rightarrow 0} u_c(x_{ci} \pm \Delta), v_{ci}^\pm = \lim_{\gamma \rightarrow 0} v_c(x_{ci} \pm \Delta), \\ \Delta > 0, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (18)$$

采用准静态假设, 结合方程(15)和条件(18), 可推得受损斜拉索轴向位移分量 $u_c(x_c, t)$ 的解为

$$u_c(x_c, t) = \int_0^{x_c} \frac{e(t)}{1 - \xi} dx - \int_0^{x_c} (\kappa^2 y'_{c0} v'_c + v'_c{}^2/2) dx_c, \quad (19)$$

式中,

$$e(t) = \Upsilon \int_0^L (\kappa^2 y'_{c0} v' + v'^2/2) dx, \quad \Upsilon = \frac{1 - \eta}{1 - \eta(1 - \delta)}. \quad (20)$$

随后, 忽略较小的支座轴向位移, 重新整理得系统面内运动微分方程如下:

$$\begin{aligned} m\ddot{v}_c + c_v \dot{v}_c - \chi^2 T_1 v''_c - \Upsilon(EA/L_c)(\kappa^2 y''_{c0} + v''_c) \\ \times \int_0^L (\kappa^2 y'_{c0} v'_c + v'_c{}^2/2) dx_c = \alpha W(t). \end{aligned} \quad (21)$$

现引入以下无量纲参数:

$$\begin{aligned} u^* = \frac{u_c}{L_c}, v^* = \frac{v_c}{L_c}, x^* = \frac{x_c}{L_c}, y^* = \frac{y_c}{L_c}, \\ t^* = \sqrt{\frac{g}{8b}} t, c_v = \sqrt{\frac{8b}{g}} \frac{c_v}{m}, h = \frac{EA}{T_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

为简洁起见, (*)将被省略. 将式(22)代入方程(21), 可得无量纲化的运动微分方程, 即

$$\begin{aligned} \ddot{v} + c_v \dot{v} - \chi^2 v'' - h \Upsilon (\kappa^2 y'' + v'') \\ \times \int_0^1 (\kappa^2 y' v' + v'^2/2) dx = \alpha W(t). \end{aligned} \quad (23)$$

为更贴合受损斜拉索的实际情况, 在随后的分析中, 将利用2.2节中所得的分段静态构型函数代替斜拉索的初始静态构型. 假设 $v(x, t)$ 为

$$v(x, t) = e^{i\omega t} \phi(x), \quad (24)$$

其中, $\phi(x)$ 为振型函数. 现将式(24)代入式(23)并进行线性化处理, 得特征函数如下:

$$\omega^2 \phi^j + \chi^2 (\phi^j)'' + B_j = 0, j = 1, 2, 3, \quad (25)$$

式中,

$$\begin{aligned} B_j = h \Upsilon y_j'' \left[\int_0^{a_1} y_1' (\phi^1)' dx + \int_{a_1}^{a_2} y_2' (\phi^2)' dx \right. \\ \left. + \int_{a_2}^1 y_3' (\phi^3)' dx \right]; a_i = l_i / L_0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (26)$$

进而求解微分方程可得振型函数的分段解为

$$\phi^j(x) = H_{1j} \cos\left(\frac{\omega}{\chi} x\right) + H_{2j} \sin\left(\frac{\omega}{\chi} x\right) - \frac{B_j}{\omega^2}, \quad (27)$$

其边界及连续性条件如下:

$$\phi_1(0) = 0, \phi_3(1) = 0; \phi_k^+ = \phi_k^-; (\phi')_k^+ = (\phi')_k^-; k = 1, 2. \quad (28)$$

结合方程(25)至(28), 可得未知系数 H_{1j} 、 H_{2j} 和固有频率 ω .

采用伽辽金法对方程(23)进行离散化处理. 设竖向位移 $v(x, t)$ 为

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) P_n(t), \quad (29)$$

其中, $\phi_n(x)$ 为模态函数, $P_n(t)$ 为广义位移. 为便于分析, 本文仅考虑 $n=1$ 情形. 离散后的运动微分方程如下:

$$\ddot{P} + c_v \dot{P} + \omega^2 P + \Xi_1 P^2 + \Xi_2 P^3 = f_1 W(t), \quad (30)$$

式中,

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= -\chi^2 \int_0^1 \phi''(x) \phi(x) dx \\
 &\quad - \kappa^4 h \Upsilon \int_0^1 y'' \left[\int_0^1 y' \phi'(x) dx \right] \phi(x) dx, \\
 \Xi_1 &= -\kappa^2 h \Upsilon \int_0^1 [\phi''(x) \int_0^1 y' \phi'(x) dx] \phi(x) dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \kappa^2 h \Upsilon \int_0^1 y'' \left[\int_0^1 (\phi'(x))^2 dx \right] \phi(x) dx, \\
 \Xi_2 &= -\frac{1}{2} h \Upsilon \int_0^1 [\phi''(x) \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx] \phi(x) dx, \\
 f_1 &= \int_0^1 a(x) \phi(x) dx.
 \end{aligned} \tag{31}$$

令 $X_1 = P$, $X_2 = \dot{P}$, 由方程(30)可得如下状态方程:

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = X_2, \\ \frac{dX_2}{dt} = -c_v X_2 - \omega^2 X_1 - \Xi_1 X_1^2 - \Xi_2 X_1^3 + f_1 W(t). \end{cases} \tag{32}$$

故该系统稳态响应概率密度函数 $p(x_1, x_2)$ 由以下 FPK 方程支配, 即

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} [p m_1] + \frac{\partial}{\partial x_2} [p m_2] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [p b_{22}] \\
 &\equiv \Omega_{\text{FPK}}(p),
 \end{aligned} \tag{33}$$

其中, $\Omega_{\text{FPK}}(\cdot)$ 表示 FPK 方程的微分算子, 具体系数如下:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= x_2, m_2 = c_v x_2 + \omega^2 x_1 + \Xi_1 x_1^2 + \Xi_2 x_1^3, \\
 b_{11} &= b_{12} = b_{21} = 0, b_{22} = f_1^2 D.
 \end{aligned} \tag{34}$$

3 RBFNN 方法

假设方程(33)的试解由下式定义:

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{N_G} q_j G_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\psi}_j), \tag{35}$$

式中, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ 为状态向量, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_{N_G}]$ 为权值向量, N_G 为激活函数个数. 另外, 本文选用径向对称、结构简单且高度可积的高斯函数 $G_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\psi}_j)$ 为 RBFNN 的激活函数, 即

$$G_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\psi}_j) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi_{j,i}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_{j,i})^2}{2\psi_{j,i}^2}\right], \tag{36}$$

其中, $\boldsymbol{\mu}_j = [\mu_{j,1}, \mu_{j,2}]$ 和 $\boldsymbol{\psi}_j = [\psi_{j,1}, \psi_{j,2}]$ 分别表示高斯基函

数的中心和协方差.

将式(35)代入式(36), 可得残差 $\vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ 为

$$\vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \Omega_{\text{FPK}}(\hat{p}(\mathbf{x}, \mathbf{q})) = \sum_{j=1}^{N_G} q_j s_j(\mathbf{x}), \tag{37}$$

式中, $s_j = \Omega_{\text{FPK}}(G_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}))$.

现采用优化取样技术^[20], 并根据最小二乘残差原理建立损失函数如下:

$$L_S(\mathbf{q}) = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} \vartheta^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}), \tag{38}$$

其中, N_S 表示样本个数, 需要满足 $N_S \gg N_G$. 注意, 由于 $\hat{p}(\mathbf{x}, q)$ 和 $G_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\psi}_j)$ 需满足以下归一化条件, 即

$$\int_{\mathbb{R}^2} \hat{p} d\mathbf{x} = 1; \int_{\mathbb{R}^2} G_j d\mathbf{x} = 1, j = 1, 2, \dots, N_G. \tag{39}$$

因此, 权值系数 q_j 的约束条件为

$$\sum_{j=1}^{N_G} q_j = 1. \tag{40}$$

通过结合式(40)并引入拉格朗日乘子 Γ , 新损失函数 $L(\mathbf{q})$ 可表示如下:

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{q}) &= \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} \vartheta^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}) + \Gamma \left(\sum_{j=1}^{N_G} q_j - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{k=1}^{N_G} \sum_{r=1}^{N_G} q_k s_k(\mathbf{x}_i) q_r s_r(\mathbf{x}_i) + \Gamma \left(\sum_{j=1}^{N_G} q_j - 1 \right) \\
 &= \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{c},
 \end{aligned} \tag{41}$$

其中,

$$\begin{cases} \mathbf{a} = [q_1, q_2, \dots, q_{N_G}, \tau]^T \in \mathbb{R}^{(N_G+1) \times 1}, \\ \mathbf{c} = [0, 0, \dots, 0, 1]^T \in \mathbb{R}^{(N_G+1) \times 1}, \\ \mathbf{K} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & \mathbf{Q} & & \\ & & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_G+1) \times (N_G+1)}, \\ \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_{kr}] = \left[\frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} s_k(\mathbf{x}_i) s_r(\mathbf{x}_i) \right] \in \mathbb{R}^{N_G \times N_G}. \end{cases} \tag{42}$$

此外, 式(41)最小化的必要条件为

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}} = (\mathbf{K} + \mathbf{K}^T) \mathbf{a} - \mathbf{c} = 0. \tag{43}$$

利用式(43), 可求得最优解 $\mathbf{a}^* = (\mathbf{K} + \mathbf{K}^T)^{-1} \mathbf{c}$, 进而

可得最优权系数向量 $\mathbf{q}^*$.

由此, 可得系统响应概率密度函数及各阶统计矩. 这里分别给出系统稳态响应边缘概率密度函数 $p(x_i)$ 及其均值 $E[X_i]$ 的具体表达式如下:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{N_G} q_j \frac{1}{\sqrt{2\pi} \psi_{j,i}} \cdot \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_{j,i})^2}{2\psi_{j,i}^2}\right], i = 1, 2, \quad (44)$$

$$E[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(x_i) dx_i, i = 1, 2. \quad (45)$$

4 算例分析

本节将以沪通长江大桥最长索S36为例^[19]进行数值分析, 分别考察不同激励强度和损伤参数对系统稳态响应的影响. 斜拉索S36基本参数如下: $L_c = 594.35$ m; $E = 205$ GPa; $A = 17.357 \times 10^{-3}$ m²; $m = 145.0$ kg/m; $\theta = 26.48^\circ$; 一阶模态阻尼比取0.001.

此外, 选取计算域 $\Omega_G = [-0.62, 0.62] \times [-3.6, 3.6]$, 将其均匀划分为 50×50 的网格. 选取样本域 $\Omega_S = [-1.24, 1.24] \times [-7.2, 7.2]$, 将其划分为 100×100 的网格. 为了避免计算资源的浪费, 提高计算效率, 本节采用高效选点策略^[20], 将 N_G 和 N_S 分别减少为2500和10000. 同时, RBFNN解都得到了样本容量为 10^9 的MCS数据的验证.

图2给出系统在特定损伤条件下的稳态响应边缘概率密度函数. 图2(a)和(b)分别表示位移边缘概率密度函数 $p(x_1)$ 和速度边缘概率密度函数 $p(x_2)$, 其中, 实线

表示RBFNN解, 符号表示MCS结果. 由图可知, RBFNN解与MCS结果具有较高的一致性, 证明了该方法的准确性. 同时, 由图2(a)可知, 位移边缘概率密度函数呈右偏态分布, 具有轻微的不对称性. 而系统速度边缘概率密度函数呈单峰对称分布, 如图2(b)所示.

图3反映不同激励强度下系统稳态响应边缘概率密度函数的变化情况. 可以看出, 通过RBFNN方法获得的系统边缘概率密度函数近似解与MCS方法所得结果均吻合较好, 这种显著的一致性表明了RBFNN方法在各种环境激励条件下均能准确捕获系统的动力学特性. 另外, 随着激励强度增大, 位移和速度边缘概率密度函数的分布范围显著增大. 这表明在较高激励强度下, 系统会出现较大的位移幅值响应, 系统振动将趋于更不稳定的状态.

图4描述不同损伤程度情形下系统稳态响应位移边缘概率密度函数及均值的演变趋势. 图4(a)中, 位移边缘概率密度函数的分布范围随着损伤程度的增大而增大, 且图像的不对称性逐渐加剧. 利用式(45)可得系统位移响应均值 $E[X_1]$, 如图4(b)所示. 位移均值随着拉索损伤程度的增加而增大. 这一现象说明系统减振能力降低, 致使整体结构的不稳定性增加. 更需注意的是, 位移均值随损伤程度的变化呈一定线性上升趋势.

图5展现不同损伤范围下系统稳态响应位移边缘概率密度函数及均值的变化趋势. 如图5(a)所示, 随着损伤范围的扩大, 位移边缘概率密度函数的分布范围逐渐扩大. 此外, 从图5(b)中可以看出, 面内位移响应

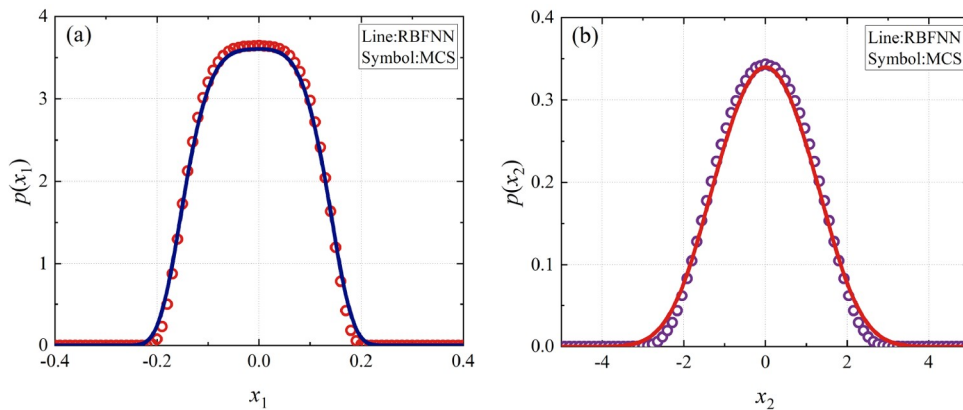


图2 (网络版彩图)一定损伤条件下系统稳态响应边缘概率密度函数 (系统参数: $\alpha=0.50$, $\delta=0.30$, $\eta=0.30$, $D=0.01$). (a) 系统位移边缘概率密度函数; (b) 系统速度边缘概率密度函数

Figure 2 (Color online) The steady-state marginal PDFs under certain damage conditions (The parameters are $\alpha=0.50$, $\delta=0.30$, $\eta=0.30$, and $D=0.01$). (a) The marginal PDF of displacement; (b) the marginal PDF of velocity.

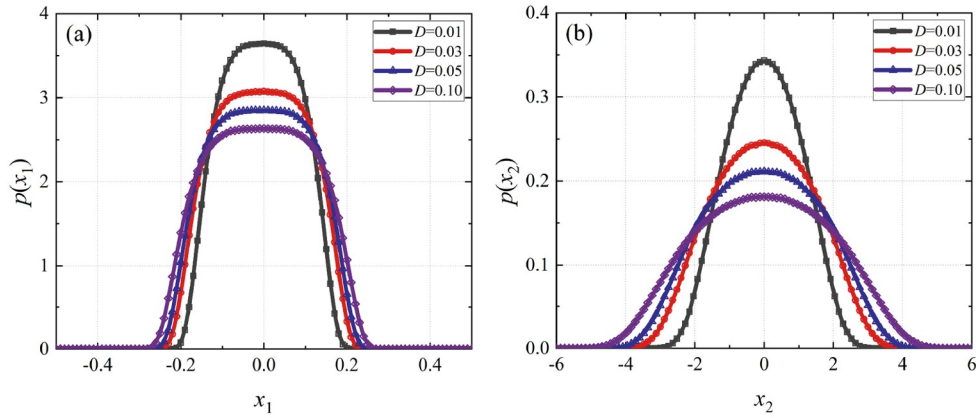


图 3 (网络版彩图)不同激励强度 D 下的稳态响应边缘概率密度函数 (系统参数: $\alpha=0.50$, $\delta=0.30$, $\eta=0.30$). (a) 系统位移边缘概率密度函数; (b) 系统速度边缘概率密度函数

Figure 3 (Color online) The steady-state marginal PDFs under different excitation intensities D (The parameters are $\alpha=0.50$, $\delta=0.30$, and $\eta=0.30$). (a) The marginal PDFs of displacement; (b) the marginal PDFs of velocity.

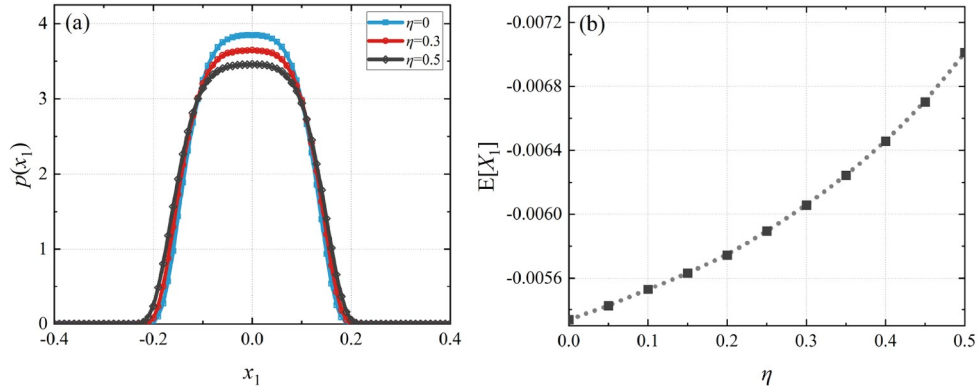


图 4 (网络版彩图)不同损伤程度下的位移边缘概率密度函数及均值 (系统参数: $\alpha=0.50$, $\delta=0.30$, $D=0.01$). (a) 系统位移边缘概率密度函数; (b) 系统位移响应均值

Figure 4 (Color online) The displacement marginal PDFs and MVs under different damage severities (The parameters are $\alpha=0.50$, $\delta=0.30$, and $D=0.01$). (a) The marginal PDFs of displacement; (b) the MVs of displacement response.

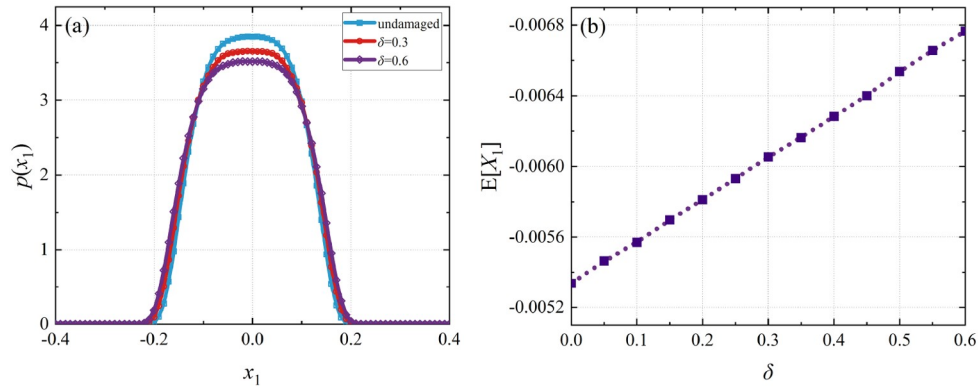


图 5 (网络版彩图)不同损伤范围下的位移边缘概率密度函数及均值 (系统参数: $\alpha=0.50$, $\eta=0.30$, $D=0.01$). (a) 系统位移边缘概率密度函数; (b) 系统位移响应均值

Figure 5 (Color online) The displacement marginal PDFs and MVs under different damage ranges (The parameters are $\alpha=0.50$, $\eta=0.30$, and $D=0.01$). (a) The marginal PDFs of displacement; (b) the MVs of displacement response.

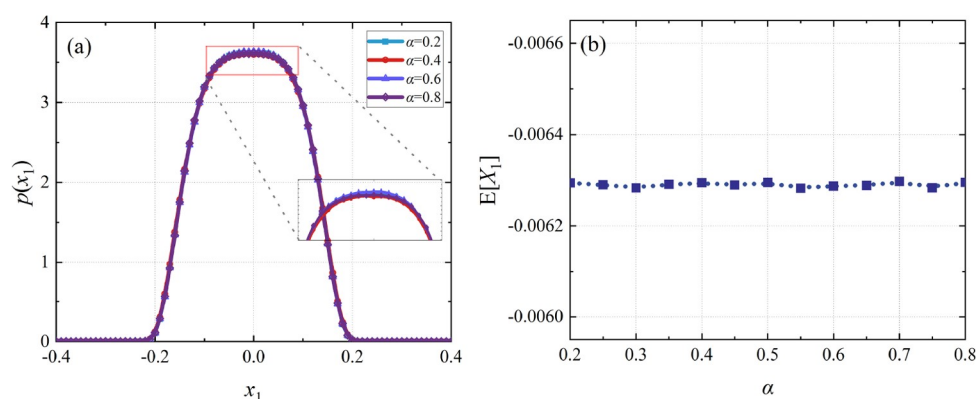


图6 (网络版彩图)不同损伤位置下的位移边缘概率密度函数及均值 (系统参数: $\delta=0.40$, $\eta=0.30$, $D=0.01$). (a) 系统位移边缘概率密度函数; (b) 系统位移响应均值

Figure 6 (Color online) The displacement marginal PDFs and MVs under different damage locations (The parameters are $\delta=0.40$, $\eta=0.30$, and $D=0.01$). (a) The marginal PDFs of displacement; (b) the MVs of displacement response.

均值 $E[X_1]$ 呈直线上升趋势, 但相较于损伤程度的变化, 系统面内位移响应对损伤范围的变化幅度降低。

最后, 图6考察了不同损伤位置对系统稳态响应的影响情况。由图6(a)可知, 位移边缘概率密度函数的变化甚微。而图6(b)也反映出随着损伤位置的改变, 系统位移响应均值 $E[X_1]$ 呈现相对稳定的状态。

5 结论

本文研究了高斯白噪声激励下受损斜拉索面内非线性系统的稳态响应。首先, 引入三个损伤参数建立起面内系统非线性随机动力学模型。推导得支配系统稳

态响应概率密度函数的FPK方程。随后, 采用RBFNN方法对FPK方程进行求解。据此, 考察了不同参数对系统稳态响应的影响。研究结果表明: 斜拉索的损伤均会激起较大的位移幅值响应; 当位移幅值响应增大时, 系统的稳态响应概率密度函数往往表现的较为扁平, 使系统趋于不稳定状态; 系统面内位移响应均值与损伤程度和范围的变化呈一定线性关系, 因而在实际桥梁拉索工程的损伤监测中, 可以重点关注面内振动位移响应的均值变化。此外, MCS结果与RBFNN解均能较好的吻合, 验证了RBFNN方法的正确性。这为未来桥梁健康监测及预测性维护等方面提供新的视角和理论参考。

参考文献

- 1 Yao G W, Liu M X, Zhao L, et al. Stress-photo-oxygen aging performance of high density polyethylene cable sheath in hygrothermal environment (in Chinese). *Sci Tech Eng*, 2021, 21: 11355–11361 [姚国文, 刘明旭, 赵玲, 等. 湿热环境下聚乙烯拉索护套应力-光氧老化性能. *科学技术与工程*, 2021, 21: 11355–11361]
- 2 Chen Z, Chen H, Liu H, et al. Corrosion behavior of different cables of large-span building structures in different environments. *J Mater Civil Eng*, 2020, 32: 4020345
- 3 Kang H J, Guo T D, Zhao Y Y. Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mech*, 2016, 48: 519–535 [康厚军, 郭铁丁, 赵跃宇. 大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展. *力学学报*, 2016, 48: 519–535]
- 4 Lepidi M, Gattulli V, Vestroni F. Static and dynamic response of elastic suspended cables with damage. *Int J Solds Struct*, 2007, 44: 8194–8212
- 5 Lepidi M, Gattulli V, Vestroni F. Damage identification in elastic suspended cables through frequency measurement. *J Vib Control*, 2009, 15: 867–896
- 6 Ubertini F. Effects of cables damage on vertical and torsional eigenproperties of suspension bridges. *J Sound Vib*, 2014, 333: 2404–2421
- 7 Sun H, Xu J, Chen W, et al. Time-dependent effect of corrosion on the mechanical characteristics of stay cable. *J Bridge Eng*, 2018, 23: 4018019
- 8 Zhao Y B, Zheng P P, Chen L C, et al. Study on nonlinear coupled vibrations of damaged suspended cables with symmetry-breaking (in Chinese).

- Chin J Theor Appl Mech, 2022, 54: 471–481 [赵珧冰, 郑攀攀, 陈林聪, 等. 受损悬索对称性破缺下非线性耦合振动研究. 力学学报, 2022, 54: 471–481]
- 9 Zheng P, Zhao Y, Wu X, et al. Revisited modeling and nonlinear oscillation behaviors of multi-segment damaged suspended cables in thermal environments. *Meccanica*, 2022, 57: 1831–1851
- 10 Zhao Y, Zheng P, Lin H, et al. Nonlinear coupled dynamics of suspended cables due to crossover points shifting and symmetry breaking. *Eur J Mech - A/Solids*, 2023, 99: 104921
- 11 Mu G, Zhu W, Deng M. Random vortex induced vibration response of suspended flexible cable to fluctuating wind. *Appl Math Mech*, 2023, 44: 2207–2226
- 12 Rega G. Nonlinear vibrations of suspended cables—Part I: Modeling and analysis. *Appl Mech Rev*, 2005, 57: 443–478
- 13 Ibrahim R A. Nonlinear vibrations of suspended cables—Part III: Random excitation and interaction with fluid flow. *Appl Mech Rev*, 2005, 57: 515–549
- 14 Georgakis C T, Taylor C A. Nonlinear dynamics of cable stays. Part 2: Stochastic cable support excitation. *J Sound Vib*, 2005, 281: 565–591
- 15 Zhu H T, Wang W G. Lateral load characteristics of vertical launching submarine-to-air missile (In Chinese). *Chin J App Mech*. 2018, 35: 445–451 [朱海涛, 王武国. 基于路径积分法的悬索非线性随机振动响应分析. 应用力学学报, 2018, 35: 445–451]
- 16 Wang K, Er G K, Iu V P. Nonlinear random vibrations of moored floating structures under seismic and sea wave excitations. *Marine Struct*, 2019, 65: 75–93
- 17 Liu J R, Chen L C, Zhao Y B. In-plane random vibration of stay cable system under Poisson white noise excitation (in Chinese). *J Vib Shock*, 2020, 39: 230–236 [刘婧瑞, 陈林聪, 赵珧冰. 泊松白噪声激励下斜拉索的面内随机振动. 振动与冲击, 2020, 39: 230–236]
- 18 Fang C, Tang H, Li Y, et al. Stochastic response of a cable-stayed bridge under non-stationary winds and waves using different surrogate models. *Ocean Eng*, 2020, 199: 106967
- 19 Ye W, Chen L, Sun J. Semi-analytical solutions for stationary response of a stay cable under combined Gaussian and Poisson excitations. *J Sound Vib*, 2023, 566: 117923
- 20 Ye W, Chen L, Qian J, et al. RBFNN for calculating the stationary response of SDOF nonlinear systems excited by Poisson white noise. *Int J Struct Stab Dy*, 2022, 23: 2350019

Stochastic vibration analysis of damaged stay cable structures

LAN LangShuai^{1,2}, CHEN LinCong^{1,2} & ZHAO YaoBing^{1,2}

¹ College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China

² Key Laboratory for Intelligent Infrastructure and Monitoring of Fujian Province, Xiamen 361021, China

Cable structures are susceptible to damage due to material aging, overloading, and other factors. Besides, the high flexibility of cables may also lead to large vibration amplitudes, exacerbating damage and potentially compromising the safety of entire bridges. Thus, accurately predicting the dynamic response of damaged cable structures and analyzing their vibration characteristics are crucial for effective health monitoring and appropriate repair treatments. However, the current studies are mainly focused on the deterministic vibration analysis of damaged cables, overlooking the stochastic nature of real excitations, or are limited to the random vibrations of undamaged cables. Consequently, it is urgent to study the random vibration of damaged cables. This study employs a Gaussian white noise model to represent the real stochastic dynamic loads and researches the nonlinear stochastic vibration response of damaged stay cable structures. First of all, the nonlinear stochastic dynamic model for the coupled in-plane and out-of-plane motions of the damaged cable system is formulated, encompassing the determination of the static configuration of the damaged stay cable, the derivation of the motion differential equations, and discretization by using the Galerkin's method. Subsequently, the Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) equation is solved using the radial basis function neural network (RBFNN) method to derive the probability density function and mean value of the system's steady-state response under varying parameters. The results indicate that increasing damage severity and range significantly amplifies the displacement response, while the effect of damage location is negligible. Additionally, the MVs of in-plane displacement demonstrate a linear trend with changes in damage severity and range. Monte Carlo simulations validate the accuracy and applicability of the numerical methods employed. These findings provide new theoretical insights for assessing the operational status of stay cable systems and facilitating effective health monitoring.

damaged cable structure, random excitation, nonlinear random vibration, radial basis function neural network, steady-state response

doi: [10.1360/SST-2024-0095](https://doi.org/10.1360/SST-2024-0095)