



基于KAN反演解析表达式的三维时间和角度约束制导律

罗皓文¹, 金天宇¹, 林德福¹, 何绍溟^{1,2*}

1. 北京理工大学空天科学与技术学院, 北京 100081

2. 临近空间环境特性及效应全国重点实验室, 北京 100081

* E-mail: shaoming.he@bit.edu.cn

收稿日期: 2025-08-01; 接受日期: 2025-10-21; 网络版发表日期: 2026-01-28

国家自然科学基金(批准号: 52302449)资助项目

摘要 针对导弹在三维空间以期望时间和角度攻击静止目标的问题, 提出一种基于柯尔莫哥洛夫-阿诺德网络(Kolmogorov-Arnold network, KAN)的三维时间和角度约束制导律. 首先, 根据弹目相对运动关系建立考虑空气动力效应的变速非线性制导模型, 无需使用常值速度假设. 其次, 将制导指令分别在俯仰和偏航通道上进行分解, 并基于偏置比例导引制导律来设计各个通道上的偏置项指令, 从而简化制导律设计. 然后, 使用KAN对飞行数据进行监督学习, 创新性地通过数据驱动的方式来反演制导律的解析表达式. 最后, 通过基于生成式对抗模仿学习(generative adversarial imitation learning, GAIL)的方法对上述解析表达式进行微调, 该方法无需人为设计奖励函数, 避免了传统强化学习的稀疏奖励问题. 同时, 对基于KAN反演得到的制导律解析表达式的可解释性进行了分析, 并通过相关仿真进行了验证. 仿真结果表明, 所提制导律不仅能够同时满足时间和角度约束, 而且在未训练过的场景中保持了较高的制导精度.

关键词 时间约束, 角度约束, 三维制导, 深度强化学习, 柯尔莫哥洛夫-阿诺德网络

1 引言

由于机载计算能力有限, 通常需要事先推导出制导律的解析形式, 再进一步部署到导弹上. 然而, 导弹的非线性动力学和运动学高度耦合, 使得推导解析制导律极具挑战性. 同时, 在考虑终端角度约束和飞行时间约束时, 进一步加剧了该问题的非线性. 因此, 常见的方法是假设导弹为恒定速度, 从而简化制导问题.

以经典的比例导引制导(proportional navigation guidance, PNG)与其变形形式^[1-3]为例. 王江等人^[4]基于偏置比例导引的方法, 设计偏置项来实现终端角度约束. 刘远贺等人^[5]结合误差动力学原理与偏置比例导引, 提出了飞行时间约束的制导律. He和Lee^[6]进一步地提出了基于最优误差动力学来设计制导律的普适方法. Wang等人^[7]基于固定时间收敛误差动力学对偏置项指令进行设计, 实现飞行时间控制. 但大多数方法依赖

引用格式: 罗皓文, 金天宇, 林德福, 等. 基于KAN反演解析表达式的三维时间和角度约束制导律. 中国科学: 技术科学, 2026, 56: 297–314
Luo H W, Jin T Y, Lin D F, et al. KAN-based analytic expression inversion for three-dimensional impact angle and time control guidance (in Chinese). Sci Sin Tech, 2026, 56: 297–314, doi: 10.1360/SST-2025-0206

近似或线性化来实现易于工程操作的解决方案, 并非严格意义上的最优解。

目前, 推导严格遵循最优控制原理的解析制导律仍然具有挑战性, 这主要是由于动力学的高度非线性导致获得制导问题的解析解较为困难。近年来, 计算制导受到广泛关注。计算制导通过大量的数值计算取代通常难以推导的解析制导指令。通常, 计算制导可分为两类: 基于模型的方法和数据驱动的方法。基于模型的方法依赖于系统动力学的数学表征, 采用数值优化技术实时计算^[8~10]。这种方法需要对基本物理原理有深入的了解, 通常假定有精确的系统模型。然而, 未建模动态、参数不确定性或外部干扰会降低算法性能。

而数据驱动的方法直接从数据中学习制导策略, 无需依赖显式的基于物理的模型。根据训练数据的性质, 数据驱动制导可分为基于监督学习(supervised learning, SL)和基于强化学习(reinforcement learning, RL)的方法。基于SL的计算制导需要离线收集大量飞行状态与最优制导指令配对的数据集^[11~14], 随后训练神经网络将飞行状态映射为制导指令。其优势在于通过单次前向传播即可快速完成推理, 满足实时性需求^[15]。在上述中, 文献[11]分别将基于RL与SL的制导方法进行对比, 发现基于SL的方法在无扰动的环境下表现接近最优解, 优于RL的方法; 而RL在扰动环境中表现更加鲁棒, 优于SL的方法。

文献[12,13]根据预处理数据集训练神经网络, 并在线端到端输出制导指令。然而, 基于SL的方法需要大量高质量的标签数据, 获得这些数据的成本可能较为高昂。为缓解对数据集的依赖, 文献[16]基于元学习的理念, 提出了集成学习的制导算法, 减少了在新工况中对新数据的需求。相比之下, 基于RL的计算制导通过与环境的交互来获得制导策略^[17~21]。文献[18]为最早将RL与制导相结合, 通过智能体直接输出制导指令。文献[17]使用了深度确定性策略梯度算法训练智能体以获得制导策略, 特别是在设计奖励函数时, 其考虑了制导精度、能量消耗和飞行时间。文献[19]通过分层式训练来解决RL的稀疏奖励问题, 提出了飞行时间约束和视场角约束的制导算法。文献[20]基于持续学习的思路增强了所提制导策略的泛化能力, 并使用了GAIL (generative adversarial imitation learning)的方法克服了人为设计奖励函数的难点。基于RL的制导

算法避免了对预标记数据的依赖, 同时也带来了一些挑战, 如训练成本高^[22,23]、奖励函数设计困难^[24], 以及所学策略的泛化性有限^[25]。

受到文献[16,17,20]的启发, 本文先在考虑气动力效应的情况下, 建立了弹目相对运动模型。将三维空间内的制导指令在俯仰和偏航两个通道内进行分解。并在每个通道上使用偏置比例导引制导律, 通过设计偏置项指令满足制导问题的优化目标和终端约束。然后, 使用KAN (Kolmogorov-Arnold network)对飞行数据进行监督学习, 根据结果推导出制导指令的解析形式。并使用基于GAIL的方法对推导出的解析表达式进行微调。GAIL与传统基于RL的方法不同, GAIL无需人工设计奖励函数, 避免了启发式奖励函数设计导致训练调试耗时的问题。与文献[4~6]相比, 本文考虑了气动力效应, 不依赖于常值速度假设; 与文献[12,16,17,19,20]直接端到端输出制导指令相比, 本文先由KAN反演出制导律的解析表达式, 最终仅需神经网络输出制导律表达式中的未知参数, 降低了神经网络在未训练场景中输出非最优解时给制导律带来的影响, 避免了使用神经网络在未训练过的场景中泛化能力不足的问题。

2 基础知识

2.1 导弹与目标的相对运动模型

本文研究了在三维空间内拦截静止目标的制导问题, 如图1所示, 其中XYZ表示惯性坐标系, $X_B Y_B Z_B$ 表示弹体坐标系。V表示导弹的速度。向量 γ 表示弹道倾角,

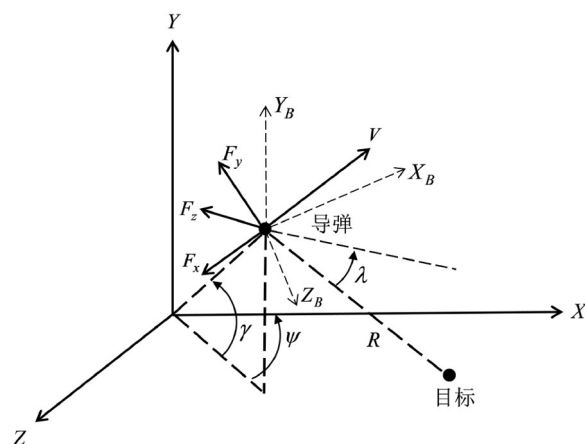


图1 导弹与目标的相对运动模型

Figure 1 Missile-target relative motion model.

ψ 表示偏航角. R 表示导弹与目标之间的距离. λ 表示视线角. 导弹受到升力 F_y , 阻力 F_x 和侧向力 F_z 的影响.

假设导弹为理想质点模型, 并忽略其执行机构时间延迟. 因此, 导弹的运动学模型可表示为

$$\dot{x} = V \cos \gamma \cos \psi, \quad (1)$$

$$\dot{y} = V \sin \gamma, \quad (2)$$

$$\dot{z} = V \cos \gamma \sin \psi. \quad (3)$$

由于阻力方向与导弹速度一致, 侧向力主要影响导弹的偏航运动. 速度、弹道倾角和偏航角的变化可表示为

$$\dot{V} = \frac{-F_x - mg \sin \gamma}{m}, \quad (4)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{F_y - mg \cos \gamma}{mV}, \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = \frac{F_z}{mV \cos \gamma}, \quad (6)$$

式中, m 是导弹的质量, 假定在整个制导过程中保持不变. g 是重力加速度. 空气动力可表示为

$$F_x = C_x q S, \quad (7)$$

$$F_y = C_y q S, \quad (8)$$

$$F_z = C_z q S, \quad (9)$$

式中, C_x , C_y 和 C_z 分别为导弹的阻力系数、升力系数和侧向力系数. S 是导弹的特征面积, q 是动压, 由以下公式确定:

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2, \quad (10)$$

式中, ρ 是空气密度. 空气密度是根据海拔高度对标准大气参数表进行插值得到^[26].

通常, 导弹的攻角 α 和侧滑角 β 可被视为一个小角度^[16,20]. 因此, 气动系数的由下式进行计算得到

$$C_x = C_{x0} + C_x^\alpha \alpha^2, \quad (11)$$

$$C_y = C_y^\alpha \alpha, \quad (12)$$

$$C_z = C_z^\beta \beta, \quad (13)$$

式中, C_y^α 是由攻角 α 引起的升力导数, C_z^β 是由侧滑角引起的侧向力导数. C_{x0} 代表零升阻力系数, $C_x^{\alpha^2}$ 代表诱导阻力系数. 上述气动系数 C_y^α , C_{x0} , $C_x^{\alpha^2}$, C_z^β 都是关于马

赫数的函数.

通过综合考虑运动学要求和空气动力, 将制导指令在俯仰和偏航两个通道上分解为两个正交加速度分量 (a_y, a_z) . 其中, a_y 表示俯仰平面内的制导指令加速度分量; a_z 表示偏航平面内的制导指令加速度分量. 因此, 描述 (a_y, a_z) 与 (α, β) 之间关系的辅助方程为

$$\alpha = \frac{m a_y}{C_y^\alpha q S}, \quad (14)$$

$$\beta = \frac{m a_z}{C_z^\beta q S}. \quad (15)$$

2.2 最大化末速的时间和角度约束制导问题

本文的目标是设计制导律, 使导弹拦截位于 (x_T, y_T) 处的静止目标, 同时满足终端约束和过载. 由于末端动能主要由末速 V_f 决定, 因此优化目标是使导弹的末速最大化. 此外, 导弹必须以指定的弹道倾角 γ_d 命中目标, 以确保弹头的毁伤效果, 即终端角度约束; 同时期望导弹在指定的时间命中目标 t_d , 即飞行时间约束. 另外, 控制输入存在着物理限制.

上述制导问题可归纳为以下最优控制问题:

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha, \beta} V_f \\ \text{s.t.} \quad & \text{Eqs. (1) ~ (15),} \\ & x(t_f) = x_T, y(t_f) = y_T, z(t_f) = z_T, \\ & \gamma(t_f) = \gamma_d, \\ & t_f = t_d, \\ & |\alpha| \leq |\alpha_{\max}|, \\ & |\beta| \leq |\beta_{\max}|, \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $\alpha_{\max}$ 和 $\beta_{\max}$ 分别表示最大攻角和侧滑角. t_f 是终端时刻.

由式(16)可知, 要想获得解析形式的最优控制量 α 和 β 是较为困难的, 主要有以下几点原因. 首先, 由于空气动力、重力和速度变化之间的耦合作用, 系统动力学表现出较强的非线性. 在空气动力项中需要考虑高度相关的空气密度, 使得系统对飞行高度变化敏感, 从而进一步加剧了这种非线性. 其次, 强制执行指定的终端约束会大幅减少可行解集. 这些耦合约束迫使求解轨迹同时满足多个目标, 这比无约束情况更加复杂. 最后, 对控制量 α 和 β 的物理限制使得求解更加困难.

3 基于KAN的三维时间角度约束制导算法

3.1 算法总体框架

本节介绍所提出的基于KAN的三维时间角度约束制导算法. 首先, 介绍了从数据集反演制导律解析表达式的方法. 通过使用KAN学习数据集中隐含的制导策略, 推导出制导律的大致解析表达式. 其次, 通过未知参数 k 对解析表达式进行调整. 该参数 k 是通过基于GAIL的方法来确定. 在这一过程中, GAIL通过判别器自动生成奖励, 无需手动设计奖励函数. 所提算法的总体框架如图2所示.

3.2 从数据集中反演制导律的解析表达式

KAN^[27]的理论基础是柯尔莫哥洛夫-阿诺德表示定理. 该定理表明, 任何多元连续函数均可分解为一系列单变量函数的组合. 其数学表达式为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{2n} \phi_k \left(\sum_{j=1}^n \psi_{k,j}(x_j) \right), \quad (17)$$

式中, ϕ_k 和 $\psi_{k,j}$ 均为单变量连续函数. 该思想启发了KAN的设计, 这是一种能以清晰可解释的方式逼近复杂函数的神经网络.

KAN的工作流程包含两个步骤: 首先, 每个输入 x_j 经过一组单变量函数 $\psi_{k,j}$ 处理; 其次, 将处理结果求和后, 再通过另一组单变量函数 ϕ_k 进行变换, 即

$$\begin{aligned} & x_1 \xrightarrow{\psi_{k,1}} \cdot, x_2 \xrightarrow{\psi_{k,2}} \cdot, \dots, x_n \xrightarrow{\psi_{k,n}} \left(\sum_{j=1}^n \psi_{k,j}(x_j) \right) \\ & \xrightarrow{\phi_k(\cdot)} \text{第二层输出}. \end{aligned} \quad (18)$$

最终, 将所有第二层输出求和得到最终近似结果

$$y = \sum_{k=0}^{2n} \phi_k \left(\sum_{j=1}^n \psi_{k,j}(x_j) \right). \quad (19)$$

与传统的固定权重和激活函数的深度神经网络不同, KAN具有更高的可解释性. 由于每个 ϕ_k 和 $\psi_{k,j}$ 仅依赖于单一输入, 它们可用简单函数近似表示. 训练完成

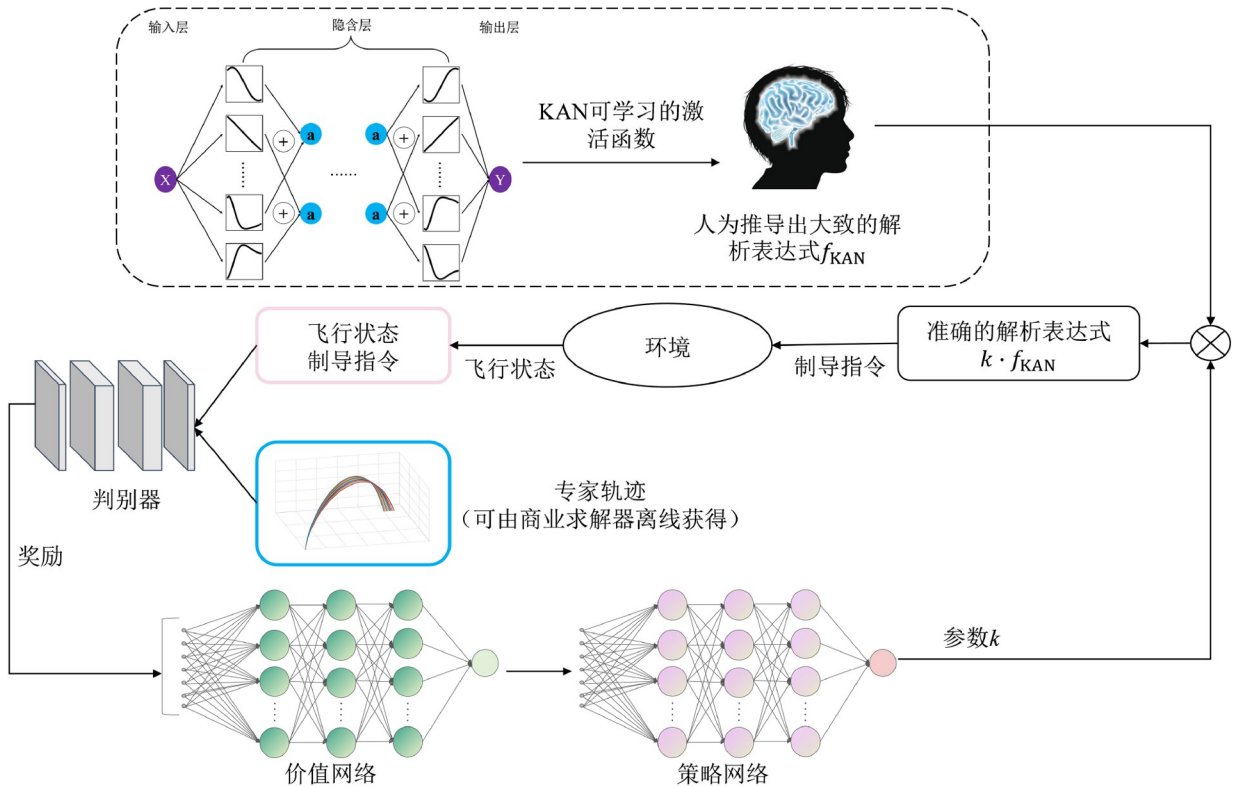


图2 (网络版彩图)所提制导算法的总体框架

Figure 2 (Color online) General framework of the proposed guidance algorithm.

后, 这些函数能以解析表达式写出. 这使得KAN在可解释性至关重要的场景中尤为适用. 经过训练后, 可以分析模型的各个部分并用更简单的函数替代, 从而获得清晰的数学解析表达式. 本文利用KAN从数据中学习制导律, 其结果比传统神经网络更具透明度.

3.2.1 实施步骤

使用KAN反演制导律的解析表达式主要包括3个步骤: ① 数据集构建; ② 训练KAN; ③ 反演解析制导律. 具体步骤如算法1中所示伪代码.

3.2.2 应用举例

通过经典制导律PNG验证所提出的基于KAN的反演解析表达式的方法. 为便于读者理解PNG的应用示例步骤, 首先给出三维空间中PNG制导指令的解析表达式. 三维PNG可分解为俯仰平面和偏航平面两个分量:

$$a_{y0} = NV\dot{\lambda}_y, \quad (20)$$

$$a_{z0} = NV\dot{\lambda}_z \cos \gamma, \quad (21)$$

算法1 通过KAN推导制导律解析表达式

输入: 数据集 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$, 其中 x_i 表示飞行状态, y_i 表示制导指令.

步骤1: 数据集构建

利用高精度导弹动力学模型生成数据集 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ (如使用商业求解器离线求解制导问题).

步骤2: 训练KAN

初始化KAN, 包含单变量函数 ϕ_k 和 $\psi_{k,j}$;

循环 $i = 1$ 到 n

 计算每个步骤 j 的中间输出 $\psi_{k,j}(x_j)$;

 对第一层输出求和;

 将和输入第二层函数 $\phi_k \left(\sum_{j=1}^n \psi_{k,j}(x_j) \right)$;

 生成最终输出 $\sum_{k=0}^{2n} \phi_k \left(\sum_{j=1}^n \psi_{k,j}(x_j) \right)$;

结束

步骤3: 反演解析制导律

从训练好的KAN中提取学习到的单变量函数;

使用常见的简单函数近似这些函数;

提取近似后的函数重构解析制导律.

输出: 基于单变量变换求和的解析制导律

$$\dot{\lambda}_y = -\frac{V \sin(\gamma - \lambda_y)}{R}, \quad (22)$$

$$\dot{\lambda}_z = -\frac{V \sin(\psi - \lambda_z) \cos \gamma}{R \cos \lambda_y}, \quad (23)$$

式中, a_{y0} 和 a_{z0} 分别表示俯仰平面和偏航平面的加速度; N 为比例导引常数; λ_y 和 λ_z 分别为俯仰平面和偏航平面的视线角分量, 可由下式计算得到:

$$\lambda_y = \arctan \frac{y_T - y}{\sqrt{(x_T - x)^2 + (z_T - z)^2}}, \quad (24)$$

$$\lambda_z = \arctan \frac{z_T - z}{\sqrt{x_T - x}}. \quad (25)$$

将式(22)和(23)代入式(20)和(21)可得

$$a_{y0} = -N \frac{V^2 \sin(\gamma - \lambda_y)}{R}, \quad (26)$$

$$a_{z0} = -N \frac{V^2 \sin(\psi - \lambda_z) \cos \gamma}{R \cos \lambda_y}. \quad (27)$$

然后, 我们首先收集了PNG的仿真弹道数据并构建数据集. 在PNG数据集中, 输入为弹目距离 R 、速度 V 、弹道倾角 γ 、偏航角 ψ 、视线角在俯仰平面的分量 λ_y 和视线角在偏航平面内的分量 λ_z ; 输出为加速度 a_{y0} 和 a_{z0} . 最终, 我们获得了关于PNG输入与输出的可视化KAN网络结构, 如图3和4所示. 基于KAN揭示的映射关系, 并结合合理近似, 我们推导出了三维空间中PNG的近似解析表达式. 我们进一步分析了KAN中间层中各输入变量的作用, 图中矩形块代表诸如三角变换或线性加权等非线性运算.

首先, 从图3的第一层推断各输入变量的函数变换类型. 尽管曲线形态允许多种可能, 但我们选择最合理且简单可行的方案. 例如, 图3第一层中, R 的变换类似于除法或减法. 虽然两者皆可行, 但选择除法更能向读者展示KAN能揭示与式(26)对应的解析表达式. 但是, 即使对 R 选择减法, 最终得到的解析表达式在性能上仍将与式(26)高度一致, 因为KAN导出的解析表达式会通过未知参数 k_y 进一步调整(k_y 的确定方法将在后文详述). 类似地, 我们将 λ_y 的变换近似为减法. 第二层的所有变换均采用相同的近似方法.

由此, 我们得到KAN反演的俯仰通道PNG制导指令解析形式:

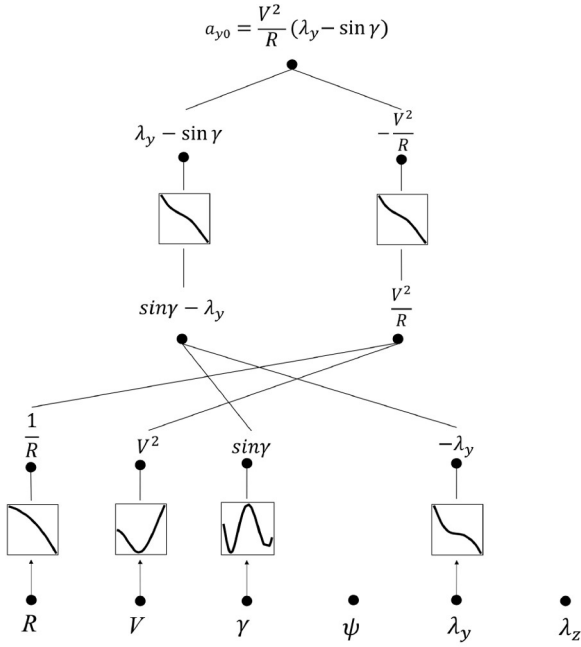


图 3 俯仰平面PNG指令的可视化KAN结构

Figure 3 Visualized KAN structure for PNG commands in pitch plane.

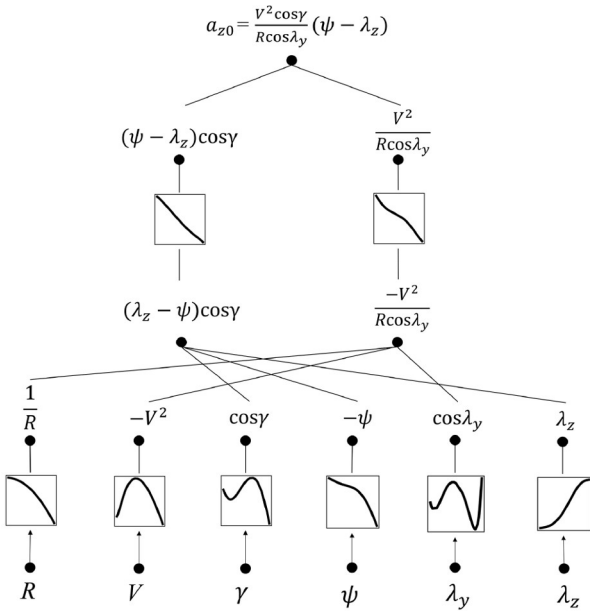


图 4 偏航平面PNG指令的可视化KAN结构

Figure 4 Visualized KAN structure for PNG commands in yaw plane.

$$a_{y_0} = \frac{V^2(\lambda_y - \sin \gamma)}{R}. \quad (28)$$

然而, 式(28)与(26)并不完全一致, 主要区别在于

变量 γ , λ_y 和比例系数 N . 尽管KAN方法未能严格反映式中的三角关系, 但捕捉了其部分相关性, 整体形式也高度相似. 因此, 可以通过后续的参数 k_y 对式(28)进行微调, 以求高度逼近式(26). 因此, 为补偿KAN近似解析式引入的误差, 引入参数 k_y 进行微调:

$$a_{y_0} = k_y \frac{V^2(\lambda_y - \sin \gamma)}{R}. \quad (29)$$

同理, 在偏航平面内的制导指令中, 如图4所示. 我们将第一层中的 R 近似为除法运算, ψ 为减法, λ_z 为乘法. 第二层的变换皆近似为减法. 得到偏航通道内PNG制导指令的解析形式:

$$a_{z_0} = \frac{V^2 \cos \gamma}{R \cos \lambda_y} (\psi - \lambda_z). \quad (30)$$

同样, 式(30)与(27)在 ψ , λ_z 和比例系数 N 方面存在差异. 为补偿误差, 引入参数 k_z :

$$a_{z_0} = k_z \frac{V^2 \cos \gamma}{R \cos \lambda_y} (\psi - \lambda_z). \quad (31)$$

综上所述, KAN揭示的映射关系是近似的, 且涉及待定参数 k_y 和 k_z 的乘法. 因此, 接下来将介绍如何确定这些待定参数.

注释1 KAN是本方法的核心. KAN能提取飞行状态与制导指令间的非线性关系的解析表达式. 相比之下, 传统多层感知机(multilayer perceptron, MLP)本质上缺乏这种可解释性, 其全连接层将输入融合为不透明的高维表示. 尽管MLP可逼近类似的输入与输出的映射, 但无法将其学习到的特征推导出显式的解析表达式. 因此, 在该框架下实现数据驱动适应性和解析可解释性的双重目标, KAN不可或缺.

注释2 传统端到端方法在分布外场景(如初始条件或气动扰动超出训练域)易发生性能退化. 本文以KAN先行反演制导律的解析式, 仅以神经网络估计少量待定参数 k , 从而降低对网络误差的敏感度并抑制误差放大效应, 提升跨场景迁移能力与可验证性. 即便 k 的估计存在偏差, 解析结构仍提供约束与稳定性保证. 后文仿真结果表明该策略在未训练场景下保持更优的总体性能.

3.3 解析表达式中未知参数的确定

从KAN中提取制导律的近似解析形式后, 仍存在

待参数 k . 本小节阐述如何利用基于GAIL的方法来确定这些未知参数. 本质上, GAIL将解析表达式中的未知参数视为策略的决策变量, 并通过使当前策略的状态-动作分布与专家示范相匹配来进行学习.

3.3.1 学习问题建模

假设已从KAN获得制导律的解析表达式:

$$a_M = k \cdot f_{KAN}(s), \quad (32)$$

式中, s 表示导弹相关状态变量; f_{KAN} 是KAN揭示的解析表达式; k 是待学习的未知参数.

为将其纳入RL框架, 定义导弹的飞行状态作为状态空间 S ; 未知参数 k 作为动作空间 A . 即我们期望通过与环境的交互获得一个策略 $\pi_\theta(A|S)$, 该策略根据状态 S 选择动作 A , θ 为策略网络的参数.

3.3.2 生成式对抗模仿学习

在传统RL的学习过程中, 奖励函数极为关键, 其决定了能否获得理想策略. 奖励函数的设计通常是人为启发式设计, 需要大量调试. 特别是在如式(16)的制导问题中, 考虑了终端角度和时间约束, 这给奖励函数的设计带来了更大的困难. 原因在于, 终端约束导致只有在智能体探索结束时才会返回奖励, 而智能体在中间的探索过程没有奖励信号. 这会造成智能体的探索效率极其低下, 甚至无法获得理想策略.

针对这一问题, 本文采用了GAIL的方法. GAIL将模仿任务建模为生成器(策略 π_θ)与判别器 D_ω 之间的二人极小极大博弈. 判别器的目标是区分给定的状态-动作对 (S, A) 来自专家数据集还是策略 π_θ . 相反, 策略的目标是生成与专家样本难以区分的状态-动作对以“迷惑”判别器. 令轨迹 $\tau = (S_1, A_1, S_2, A_2, \dots, S_T, A_T)$ 表示通过执行策略 π_θ 生成的轨迹. GAIL的目标函数为

$$\min_{\pi_\theta} \max_{D_\omega} \mathbb{E}_{\tau \sim \pi_\theta} [\log(1 - D_\omega(\tau))] + \mathbb{E}_{\tau \sim D_E} [\log D_\omega(\tau)], \quad (33)$$

式中, $\tau \sim \pi_\theta$ 表示当前策略 π_θ 下采样的轨迹; $\tau \sim D_E$ 为专家轨迹; $D_\omega(\tau) \in (0, 1)$ 是判别器对轨迹 τ 来源(专家或智能体)的估计概率.

GAIL的优化过程是迭代进行的. 智能体与环境交互完毕后, 首先是判别器进行更新. 即固定 θ , 更新 ω 以

最大化正确分类专家轨迹与策略生成轨迹似然对数. 其次是生成器进行更新, 固定 ω , 更新 θ 以最小化式(33)的目标函数, 提升生成器的模仿质量. 通过此方式应用GAIL, 无需人为设计奖励函数. 判别器自动生成反映智能体轨迹与专家行为匹配程度的奖励信号. 最终, 未知参数 k 收敛至使智能体行为与专家制导指令一致的值, 从而得到完全确定的解析制导律.

3.4 基于KAN的三维时间角度约束制导算法

所提制导律的设计融合了基于KAN的解析表达式反演方法与GAIL, 以确定制导律中的未知参数. 本节重点介绍: ① 如何利用偏置比例导引制导律重构最优控制问题; ② 如何利用KAN学习并反演偏置指令 a_{by} 和 a_{bz} 的解析表达式; ③ 如何利用GAIL框架确定解析表达式中的待定参数.

3.4.1 重构最优控制问题

为简化制导律设计, 引入偏置比例导引制导律. 具体而言, 俯仰平面和偏航平面的制导指令分别表示为

$$a_y = a_{by} + a_{y0}, \quad (34)$$

$$a_z = a_{bz} + a_{z0}, \quad (35)$$

式中 a_{y0} 和 a_{z0} 分别为式(26)和(27)给出的PNG解析表达式, 用于满足脱靶量约束. 因此, 偏置项 a_{by} 和 a_{bz} 需由我们设计以满足其他期望终端约束.

联立求解式(14), (15), (36)和(37), 得到攻角 α 、侧滑角 β 与偏置项 a_{by} 和 a_{bz} 之间的转换关系:

$$a_{by} = \frac{C_y^a q S \alpha}{m} - NV \dot{\lambda}_y, \quad (36)$$

$$a_{bz} = \frac{C_z^\beta q S \beta}{m} - NV \dot{\lambda}_z \cos \gamma. \quad (37)$$

之所以采用偏置比例导引作为制导律的上层结构, 原因在于: 该分解将脱靶量最小化交由PNG项保证, 而将时间与落角等终端约束集中到偏置项中处理, 使最优控制问题可围绕偏置项重构并显著简化. KAN只需学习飞行状态到偏置加速度的映射, 函数空间被强制约束, 从而更易反演出由少量物理量构成、语义清晰的解析表达式.

基于式(16)的最优控制问题可利用偏置比例导引制导律重构. 重构后的制导问题表述如下:

$$\begin{aligned}
 & \min_{a_{by}, a_{bz}} -V_f \\
 \text{s.t.} \quad & \text{Eqs. (1) ~ (15),} \\
 & x(t_f) = x_T, y(t_f) = y_T, z(t_f) = z_T, \\
 & \gamma(t_f) = \gamma_d, \\
 & t_f = t_d, \\
 & |\alpha| \leq |\alpha_{\max}|, \\
 & |\beta| \leq |\beta_{\max}|.
 \end{aligned} \tag{38}$$

3.4.2 基于KAN学习 a_{by} 和 a_{bz} 的解析表达式

为提取 a_{by} 和 a_{bz} 的解析表达式, 将KAN应用于导弹飞行状态与偏置加速度指令关系的数据集. 遵循前述方法, 首先构建数据集: 输入为弹目距离 R 、高度 y 、速度 V 、弹道倾角 γ 、偏航角 ψ 、期望落角 γ_d 和期望飞行时间 t_d ; 输出为偏置加速度指令 a_{by} 和 a_{bz} . 使用该数据集训练KAN后, 获得输入与输出间的内部映射关系, 如图5和6所示. 首先, 对图5和6中函数变换进行合理近似: 图5第一层中, γ_d 的变换近似为乘法运算. γ 的变换虽非标准正弦图像, 仍近似为正弦变换.

同时, 若将图5和6第二层的变换视为不同函数, 可得到不同的 a_{by} 和 a_{bz} 表达式. 不做近似处理时, 图中第二层变换可视为指数函数, 得到表达式I:

$$a_{by} = k_1 e^{\frac{V\gamma_d \sin \gamma}{(-R-y)t_d} + \frac{-1}{R}}, \tag{39}$$

$$a_{bz} = k_2 e^{\frac{V}{-R+y}}, \tag{40}$$

式中 k_1 和 k_2 为待定参数.

若将第二层变换近似为线性运算(如乘法), 则得到表达式II:

$$a_{by} = k_1^* \left(\frac{V\gamma_d \sin \gamma}{(-R-y)t_d} + \frac{-1}{R} \right), \tag{41}$$

$$a_{bz} = k_2^* \frac{V}{-R+y}, \tag{42}$$

式中 k_1^* 和 k_2^* 为待定参数.

实际应用中, 训练KAN的数据可通过求解如式(38)的最优控制问题获得. 可离线使用商业数值求解器(如Gauss pseudospectral optimization software-II, GPOPS-II)在不同飞行条件下生成最优解. 每条解轨迹包含输入-输出对, 构成KAN的训练数据集, 使网络能捕捉底层非线性关系并生成 a_{by} 和 a_{bz} 的解析表达式.

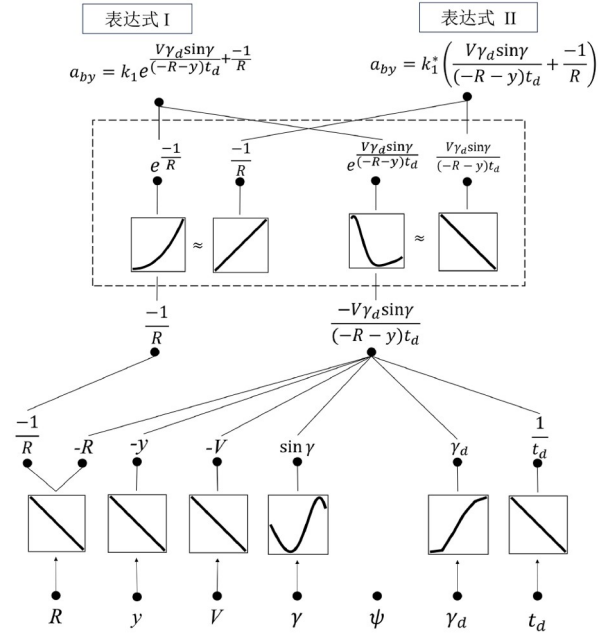


图5 a_{by} 的可视化KAN结构: 表达式I为指数近似, 表达式II为线性近似

Figure 5 Visualized KAN structure for a_{by} : Expression I represents an exponential approximation, while Expression II represents a linear approximation.

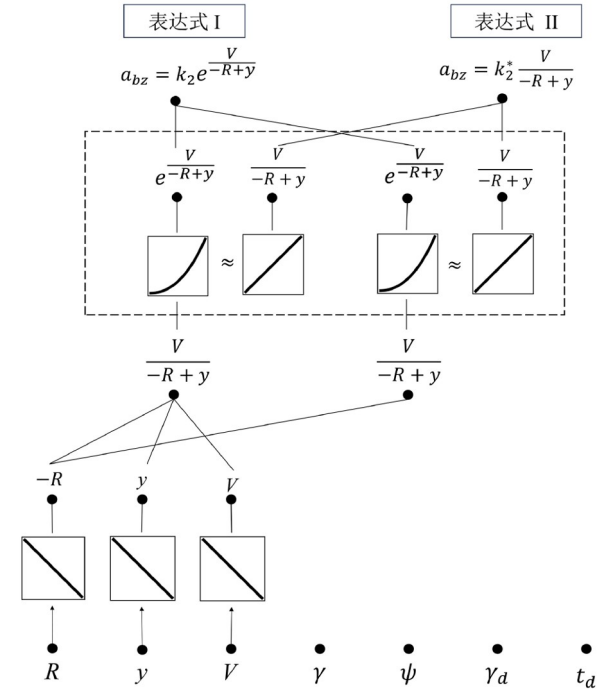


图6 a_{bz} 的可视化KAN结构: 表达式I为指数近似, 表达式II为线性近似

Figure 6 Visualized KAN structure for a_{bz} : Expression I represents an exponential approximation, while Expression II represents a linear approximation.

注释3 图5和6表明, KAN反演得到的映射关系可导出不同解析表达式. 除式(39)~(42)外, 其他形式(如将第二层变换视为对数函数)亦可能成立. 本文在由KAN反演解析式时遵循两项原则. ① 函数图像一致性: 尽可能保持与数据驱动所揭示的映射关系在形态上的一致; ② 计算简化: 考虑弹载计算资源受限, 将复杂非线性以更低复杂度的简单函数近似. 因此, 在确保函数图像一致性的前提下, 表达式II采用线性近似以检验是否能够进一步降低弹载计算复杂度. 本文仅研究具有代表性的指数和线性形式. 后文仿真部分将表达式I和II的区别进行详细分析与比较.

3.4.3 基于GAIL确定未知参数

获得 a_{by} 和 a_{bz} 的近似解析表达式后, 下一步是确定未知参数 k_1 和 k_2 以及 k_1^* 和 k_2^* . 为此, 采用GAIL框架, 通过使当前策略的状态-动作分布与专家示范相匹配来确定这些参数. 需注意, 在三维制导场景中, 智能体需同时输出两个动作, 且每个动作需保持一定最优性以实现满意的制导性能, 这使得训练理想策略具有挑战性. 本文采取的训练方法如下: ① 俯仰通道训练. 使用监督学习训练的神经网络持续输出偏航平面中的待定参数 k_2 (或 k_2^*). 此举固定偏航平面内的制导指令, 确保其关联的制导指令为最优, 此时智能体仅需输出俯仰平面指令的待定参数 k_1 (或 k_1^*). ② 偏航通道训练. 完成俯仰通道训练后, 移除基于监督学习的神经网络. 智能体继续学习偏航平面中的待定参数 k_2 (或 k_2^*). 通过此种递进式训练, 可依次学习参数 k_1 和 k_2 以及 k_1^* 和 k_2^* , 从而满足三维制导需求.

之所以采用先俯仰、后偏航的递进式参数学习策略, 原因在于三维制导中俯仰与偏航通道耦合. 若同时学习两个通道的待定参数, 将导致GAIL的状态-动作分布匹配目标呈现强非平稳性与梯度干扰, 训练不易收敛. 该递进式做法降低了每阶段的优化维度与参数确定难度, 提高了训练效率并保证策略性能.

4 表达式的数学理论分析

在进行数值仿真前, 本节讨论偏置指令解析表达式在数学层面的特点, 重点分析两个问题: ① 表达式I与II的差异; ② 表达式I的可解释性优势.

4.1 表达式I与II的差异

本节仅基于表达式自身形式与数学理论进行分析, 更详尽的仿真比较将在后文给出. 表达式I采用指数形式, 其飞行状态与偏置加速度的核心函数关系嵌入自然指数函数的指数项中. 该结构因指数函数的连续可微性而本质平滑, 尤其在输入小范围变化时. 这种光滑性产生连续性的制导指令, 有助于抑制激进执行并提升实时可实现性. 相比之下, 表达式II采用乘除运算构成的线性形式, 表征状态变量与偏置指令间的直接代数映射. 此类形式虽更易解释且可降低计算开销, 但更易放大奇异性或陡峭梯度(尤其在分母趋近0时). 这种敏感性会导致制导指令突变或振荡, 特别是在末制导阶段.

其次, 从数学角度看, 表达式I可视为表达式II的非线性变换, 通过指数运算实现非线性压缩. 该压缩作用会抑制大值并限制输出指令幅值, 这解释了表达式I在后文仿真中表现出的饱和和规避性. 此外, 表达式I中的指数形式隐含了软约束执行机制, 使制导律能在轨迹整形与约束满足间平衡, 无需显式饱和机制. 而表达式II缺乏此类特性, 当加速度需求接近系统物理极限时可能导致末段振荡.

例如, 表达式I和II均包含项 $\frac{V\gamma_d \sin\gamma}{(-R-y)t_d}$, 分析其数学形式可揭示不同行为: 在表达式I中, 当 R 减小(即接近目标)时, 偏置指令趋近于0, 轨迹修正作用减弱; 而当 R 较大时, 表达式I产生更强的修正效果. 这表明表达式I在制导初期施加显著调整, 并在末段逐渐减弱以避免目标附近出现过峰值加速度. 相反, 线性形式的表达式II呈现相反趋势: R 减小时偏置指令增大, 在目标附近放大轨迹修正. 因此, 表达式II在末段施加更激进的调整, 可能导致接近目标时出现不期望的高峰值加速度. 此对比突显了表达式I (侧重初期修正)与表达式II (侧重末期修正)的核心差异.

注释4 仅从数学形式推断“表达式I侧重初期修正而表达式II侧重末期修正”的结论不完全可靠, 该论断将在后文仿真部分得到充分验证.

4.2 可解释性优势

表达式I在结构与理论主要具有以下两重优势. ① 光滑性与有界性: 自然指数形式作为连续可微函数, 自动抑制较大值同时保持小值高分辨率, 有效防止末

段的高频振荡与指令饱和. 表达式II的纯代数线性形式无法保证此特性. ② 嵌入式实现的数值鲁棒性: 因所有非线性均封装于指数函数调用及少量基本算术运算中, 该表达式可高效映射至机载硬件, 且规避表达式II在 $R \rightarrow 0$ 时出现的除零风险.

5 数值仿真

本节首先通过仿真比较前文推导的表达式I和II, 结果表明表达式I优于II. 其次评估所提制导律的性能. 然后, 将所提算法与现有三维时间和角度约束制导算法进行对比. 最后, 评估存在不确定性时所提算法的鲁棒性. 表1为仿真交战场景的参数表, 表2为气动参数表, 表3为空气密度与声速参数表, 表4为KAN超参数, 表5为GAIL的超参数. 在训练KAN及GAIL时, 数据集建立范围均由拉丁超立方采样在表1仿真初始条件区间中随机抽取, 并由商业求解器求解. 其中, KAN的训练样本大小为1296条, GAIL的专家轨迹为100条.

注释5 拉丁超立方采样流程为: 假设由 L 个不同变量, 将每个变量的取值范围内平均分割成 M 个互不重叠的区; 其次将 L 个不同变量的区间进行随机配对, 得到区间交叉形成的确定点. 该采样方式类似于在一

表 1 仿真初始条件

Table 1 Initial conditions for simulation

参数	取值
导弹初始位置 (x_0, y_0, z_0)	(0, 10000 m, 0)
初始弹道倾角 γ_0	$[0^\circ, 10^\circ]$
初始偏航角 ψ_0	0°
初始速度 V_0	300 m/s
目标 X 方向位置 x_T	[6000 m, 6500 m]
目标 Y 方向位置 y_T	0
目标 Z 方向位置 z_T	[6000 m, 6500 m]
质量 m	200 kg
特征面积 S	0.06
最大过载 a_y	100 m/s ²
最大过载 a_z	100 m/s ²
比例系数 N	3
终端角度约束 γ_d	$[-80^\circ, -60^\circ]$
飞行时间约束 t_d	[50 s, 70 s]

表 2 气动力系数

Table 2 Aerodynamic coefficient

马赫数	C_{x0}	$C_x^{\alpha^2}$	C_y^α	C_z^β
0.1	0.54155	26.449	29.446	29.446
0.2	0.50526	26.909	29.395	29.395
0.3	0.49997	27.276	29.487	29.487
0.4	0.50576	27.667	29.461	29.461
0.5	0.50602	27.828	29.613	29.613
0.6	0.51673	28.311	29.993	29.993
0.7	0.53285	28.988	30.316	30.316

表 3 大气密度与声速随高度变化表

Table 3 Atmospheric density and sound speed variations with altitude

高度	大气密度	声速
0	1.2250	340.30
2000	1.0070	332.50
4000	0.8193	324.60
6000	0.6601	316.50
8000	0.5258	308.10
10000	0.4135	299.50
12000	0.3119	295.10

表 4 KAN的超参数

Table 4 Hyperparameters of KAN

参数	取值
输入维度	7
隐含层数	2
输出层数	1
网格区段	3
多项式阶数	5
训练与测试集划分	95%/5%
优化器	L-BFGS
ℓ_2 正则化	1×10^{-3}
轨迹条数	1296

个 $L \times M$ 的拉丁方阵中每个行和列只放置一个点, 故名拉丁超立方采样.

5.1 表达式I与II的仿真对比

通过蒙特卡罗仿真评估两种制导指令的性能. 图7

表 5 GAIL的超参数

Table 5 Hyperparameters of GAIL

参数	取值
策略网络	$7 \rightarrow 32 \rightarrow 32 \rightarrow 1$
价值网络	$7 \rightarrow 32 \rightarrow 32 \rightarrow 1$
判别器	$8 \rightarrow 32 \rightarrow 32 \rightarrow 1$
学习率	1×10^{-3}
激活函数	Hyperbolic tangent
训练算法	近端策略优化
专家轨迹条数	100

和8分别展示表达式I和II在随机初始条件及期望终端约束下的200次仿真结果. 仿真表明: 两种表达式均能成功拦截目标并满足脱靶量要求. 但表达式II生成的指令在制导的末段呈现最大加速度极限附近的振荡, 此饱和邻域振荡行为不可取. 相反, 表达式I的指令始终未触及加速度极限, 展现出良好的制导平滑性与鲁棒性, 进一步验证了“表达式I侧重初期修正, 表达式II侧重末期修正”的论断. 终端约束误差对比揭示显著差异: 虽均满足落角约束, 但表达式I的落角误差更小($<2^\circ$), 表达式II则偏差较大; 最关键的是, 表达式II的时间约束违反严重(终端时间误差高达25 s), 而表达式

I的终端时间误差始终小于2.5 s, 完全满足时间要求. 综合而言, 表达式I性能更优, 故本文选择其作为制导算法表述形式.

5.2 所提制导律的性能评估

为验证所提算法满足角度和时间控制要求, 图9~11分别展示单独角度约束、单独时间约束及同时控制二者的仿真结果. 结果表明: 在不同终端角度($-60^\circ/-70^\circ/-80^\circ$)、不同飞行时间(50 s/60 s/70 s)及联合约束($(-65^\circ, 65\text{ s})/(-75^\circ, 55\text{ s})/(-80^\circ, 50\text{ s})$)下, 所提算法均能有效满足终端约束.

5.3 与现有制导律的对比

为了进一步评估所提算法的制导性能, 我们将其与文献[28]提出的三维角度和时间约束制导进行了比较, 其制导指令的数学表达式如下:

$$a_M = \frac{V^2}{R}(N \sin \epsilon + K \epsilon \cos \epsilon) + \frac{K(N-1)V^2}{R} \epsilon \cos \epsilon (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_r) - \frac{V^2}{R} \Phi \left(\frac{\xi}{\xi_m} \right) \frac{\cos \epsilon}{\xi_{t_{go}}} (a |\epsilon_l|^p + b |\epsilon_r|^q) (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_r), \quad (43)$$

式中

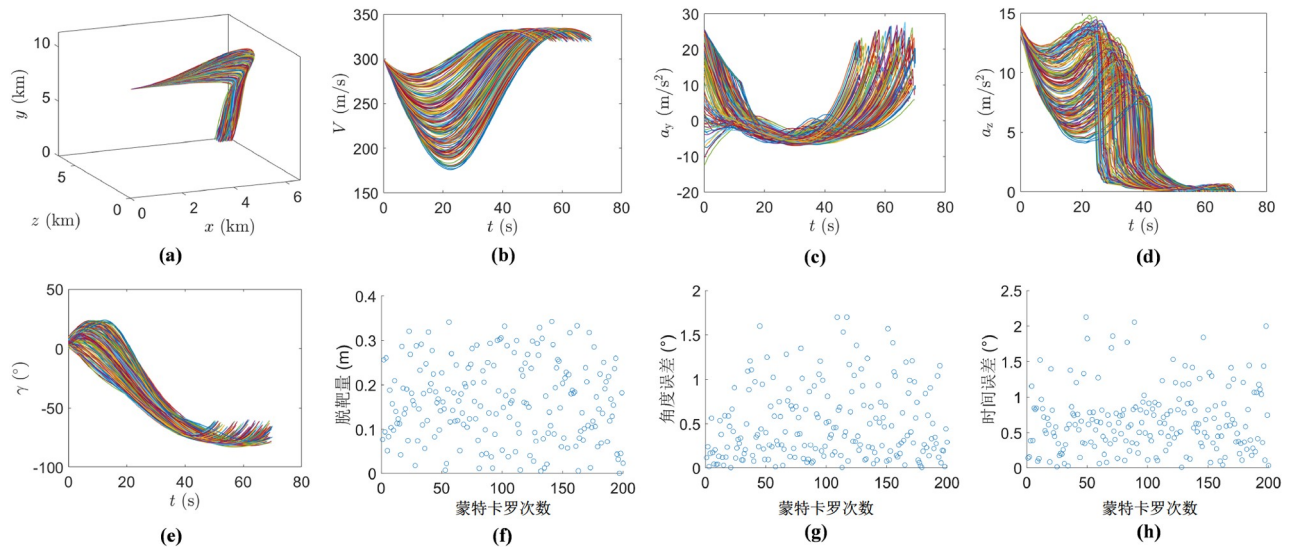


图 7 (网络版彩图)表达式I的蒙特卡罗仿真. (a) 弹道轨迹; (b) 速度曲线; (c) 俯仰加速度曲线; (d) 偏航加速度曲线; (e) 弹道倾角曲线; (f) 脱靶量统计; (g) 角度误差统计; (h) 时间误差统计

Figure 7 (Color online) Monte Carlo simulation of Expression I. (a) Missile's trajectories; (b) velocity curves; (c) pitch acceleration curves; (d) yaw acceleration curves; (e) flight path angle curves; (f) miss distance; (g) impact angle error; (h) impact time error.

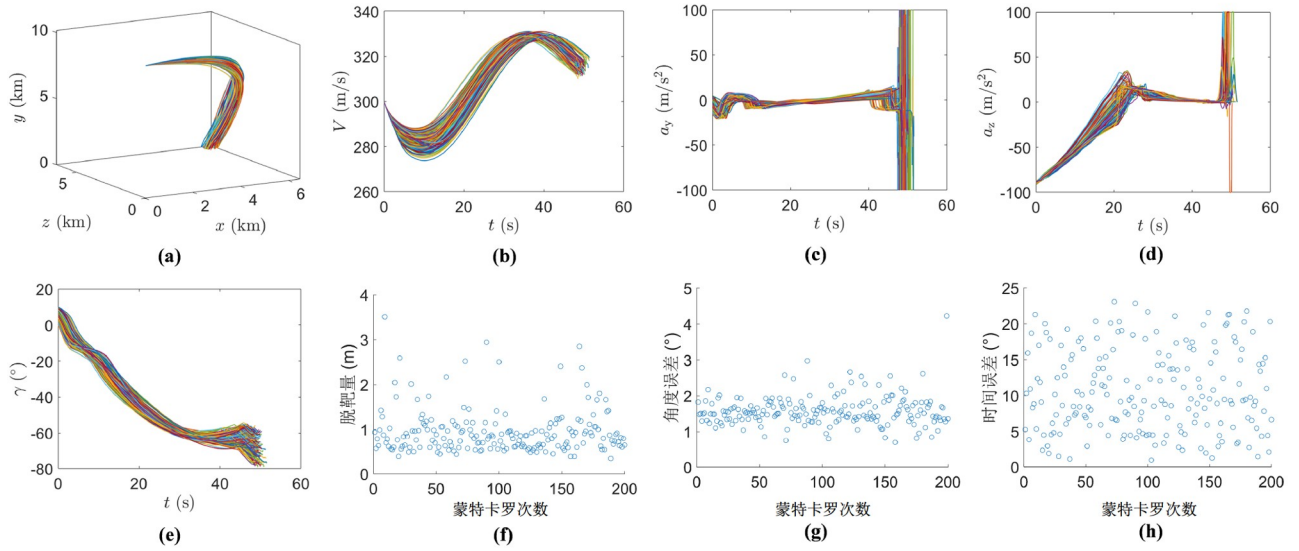


图8 表达式II的蒙特卡罗仿真。(a) 弹道轨迹; (b) 速度曲线; (c) 俯仰加速度曲线; (d) 偏航加速度曲线; (e) 弹道倾角曲线; (f) 脱靶量统计; (g) 角度误差统计; (h) 时间误差统计

Figure 8 Monte Carlo simulation of Expression II. (a) Missile's trajectories; (b) velocity curves; (c) pitch acceleration curves; (d) yaw acceleration curves; (e) flight path angle curves; (f) miss distance; (g) impact angle error; (h) impact time error.

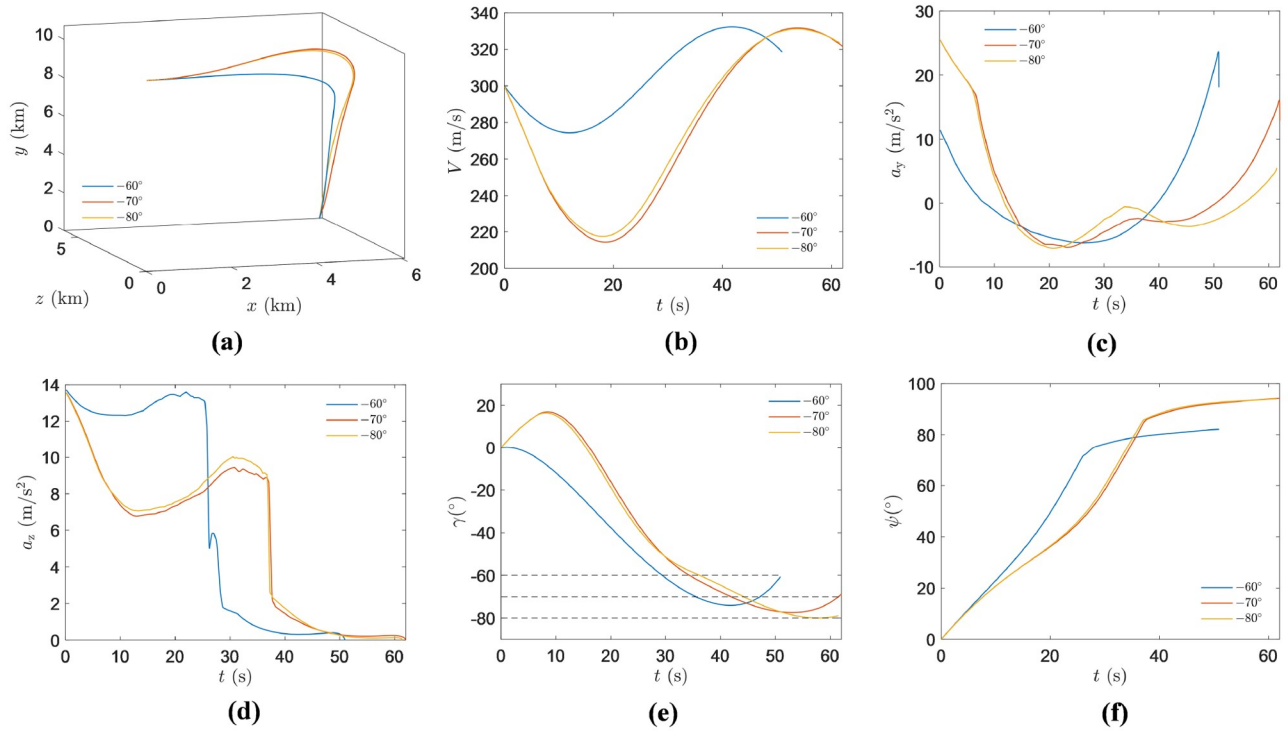


图9 不同角度约束的对比。(a) 弹道轨迹; (b) 速度曲线; (c) 俯仰加速度曲线; (d) 偏航加速度曲线; (e) 弹道倾角曲线; (f) 弹道偏角曲线

Figure 9 Comparison of different angle constraints. (a) Missile's trajectories; (b) velocity curves; (c) pitch acceleration curves; (d) yaw acceleration curves; (e) flight path angle curves; (f) yaw angle curves.

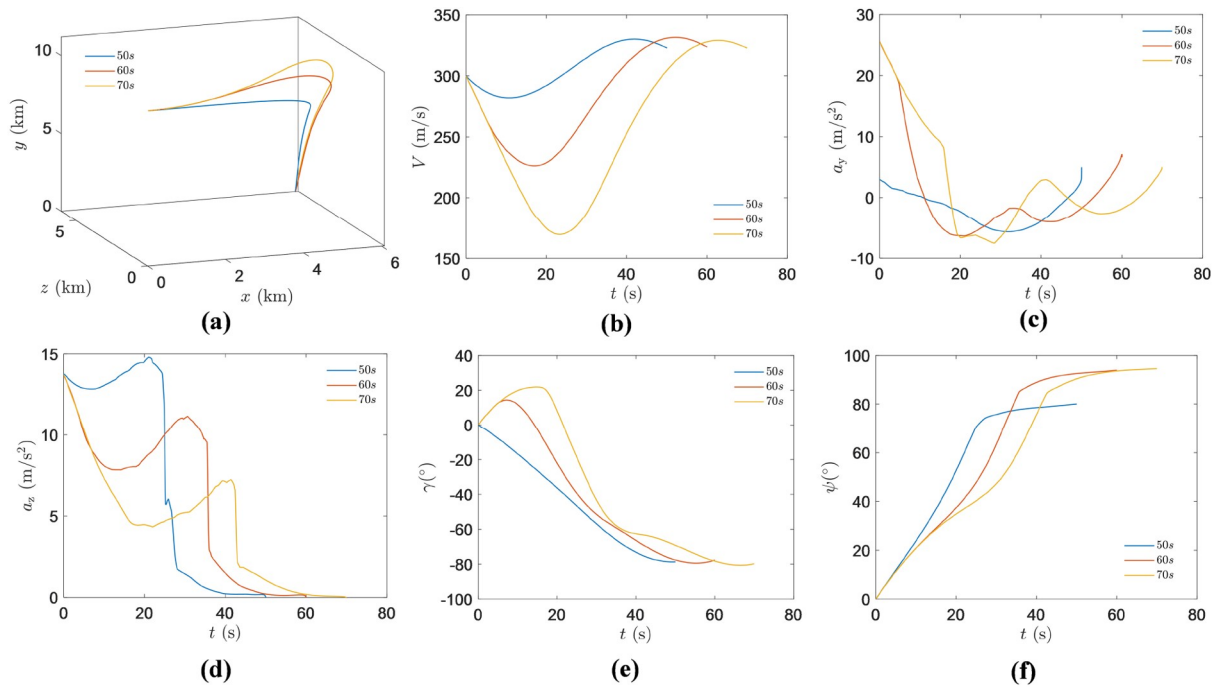


图 10 不同时间约束的对比。(a) 弹道轨迹; (b) 速度曲线; (c) 俯仰加速度曲线; (d) 偏航加速度曲线; (e) 弹道倾角曲线; (f) 弹道偏角曲线

Figure 10 Comparison of different time constraints. (a) Missile's trajectories; (b) velocity curves; (c) pitch acceleration curves; (d) yaw acceleration curves; (e) flight path angle curves; (f) yaw angle curves.

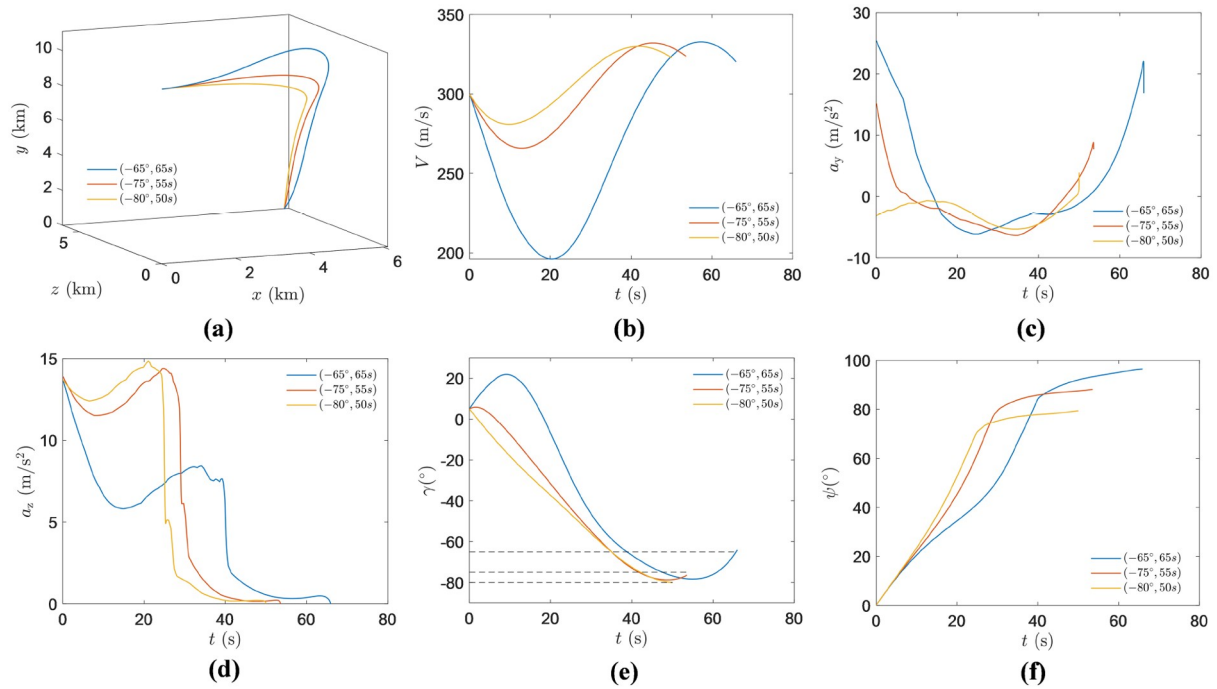


图 11 不同时间和角度约束的对比。(a) 弹道轨迹; (b) 速度曲线; (c) 俯仰加速度曲线; (d) 偏航加速度曲线; (e) 弹道倾角曲线; (f) 弹道偏角曲线

Figure 11 Comparison of different time and angle constraints. (a) Missile's trajectories; (b) velocity curves; (c) pitch acceleration curves; (d) yaw acceleration curves; (e) flight path angle curves; (f) yaw angle curves.

$$\mathbf{v}_V = \frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|}, \quad (44)$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}_\lambda \times \mathbf{v}_V}{\|\mathbf{v}_\lambda \times \mathbf{v}_V\|}, \quad (45)$$

$$\mathbf{v}_\lambda = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\|\boldsymbol{\lambda}\|}, \quad (46)$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_d \times \mathbf{v}_\lambda}{\|\mathbf{v}_d \times \mathbf{v}_\lambda\|}, \quad (47)$$

$$\mathbf{v}_d = \begin{bmatrix} \cos \gamma_d \\ \sin \gamma_d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$\varepsilon = \gamma - \lambda, \quad (49)$$

$$\epsilon = \gamma - \gamma_d, \quad (50)$$

$$\epsilon_t = t_d - t - t_{go}, \quad (51)$$

$$t_{go} = \frac{R}{V}, \quad (52)$$

$$\zeta = \frac{(2NK + N - K)\gamma + K(N - 1)\epsilon}{(2N - 1)(N + K)(2K + 1)}, \quad (53)$$

$$\Phi(u) = \begin{cases} |u|^{n+1}, & |u| \leq 1, \\ 1, & |u| > 1, \end{cases} \quad (54)$$

式中, $N = 4, K = 3, a = 10, b = 10, p = 0.8, q = 1.2$.

此外, 本文还将与文献[20]中描述的基于RL的制导算法进行比较. 由于文献[20]是针对二维制导设计的, 我们将其推广到三维场景. 首先, 根据式(14)和(15), 制导指令被分解为俯仰和偏航两个部分. 其次, 每个通道中的指令都被转换成一个偏置比例导引制导的框架, 智能体的任务是直接输出偏置制导指令.

为清晰呈现对比结果, 选定期望落角 $\gamma_d = -75^\circ$, 飞行时间 $t_d = 50$ s的初始条件, 仿真结果如图12和表6所示. 结果表明: 三种制导方案均成功拦截目标, 并在不同程度上满足时间和角度约束. 然而, 本文所提制导律的终端误差最小. 当以终端速度最大化为目标时, 文献[20,28]的终端速度低于本方法. 此差距主要源于文献[20]的制导律基于恒速假设推导, 应用于时变速度模型时性能必然退化. 此外, 该方案生成的指令在目标附近呈现明显振荡现象, 对实际应用极为不利.

5.4 评估不确定性条件下的鲁棒性

5.4.1 气动参数存在不确定性

实践中, 气动参数通常通过风洞试验进行辨识, 该

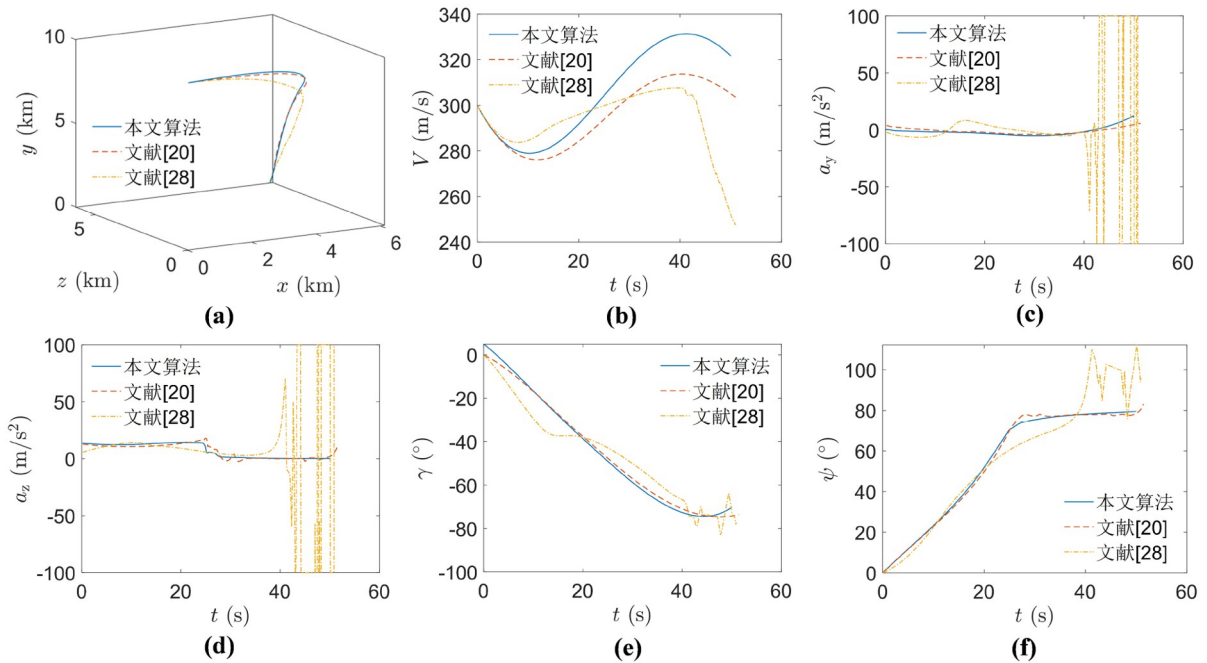


图 12 不同三维时间角度约束制导律的对比. (a) 弹道轨迹; (b) 速度曲线; (c) 俯仰加速度曲线; (d) 偏航加速度曲线; (e) 弹道倾角曲线; (f) 弹道偏角曲线

Figure 12 Comparison of different three-dimensional time and angle constrained guidance laws. (a) Missile's trajectories; (b) velocity curves; (c) pitch acceleration curves; (d) yaw acceleration curves; (e) flight path angle curves; (f) yaw angle curves.

过程不可避免地会将测量误差引入气动力系数. 因此, 构建完全准确的气动力系数表用于实际应用具有挑战性. 为表征这种不确定性, 我们对表2所列气动参数分别施加了最高可达 $\pm 10\%$, $\pm 20\%$ 和 $\pm 30\%$ 的随机误差, 由此生成了表7所总结的3种测试工况. 针对每种工况,

我们执行了蒙特卡罗模拟, 以评估所提制导算法的鲁棒性. 为清晰对比, 我们在随机初始条件下展示了各误差工况下的单次仿真结果(如图13所示). 可见, 在不同误差环境下, 飞行轨迹曲线基本完全重合, 且对应的终端误差均保持较小. 这些结果表明, 气动力系数的不

表 6 不同方法的终端误差统计

Table 6 Terminal error statistics for different methods

算法	脱靶量 (m)	角度误差 (°)	时间误差 (s)	末速 (m/s)
本文	0.1819	0.0521	0.016	322.42
文献[20]	0.6848	1.3952	1.410	302.83
文献[28]	0.4555	3.9459	0.722	251.01

表 7 存在不同气动系数误差的工况

Table 7 Conditions with different aerodynamic coefficient errors

工况	C_{x0}	$C_x^{a^2}$	C_y^a	C_z^β
I	$[-10\%, 10\%]$	$[-10\%, 10\%]$	$[-10\%, 10\%]$	$[-10\%, 10\%]$
II	$[-20\%, 20\%]$	$[-20\%, 20\%]$	$[-20\%, 20\%]$	$[-20\%, 20\%]$
III	$[-30\%, 30\%]$	$[-30\%, 30\%]$	$[-30\%, 30\%]$	$[-30\%, 30\%]$

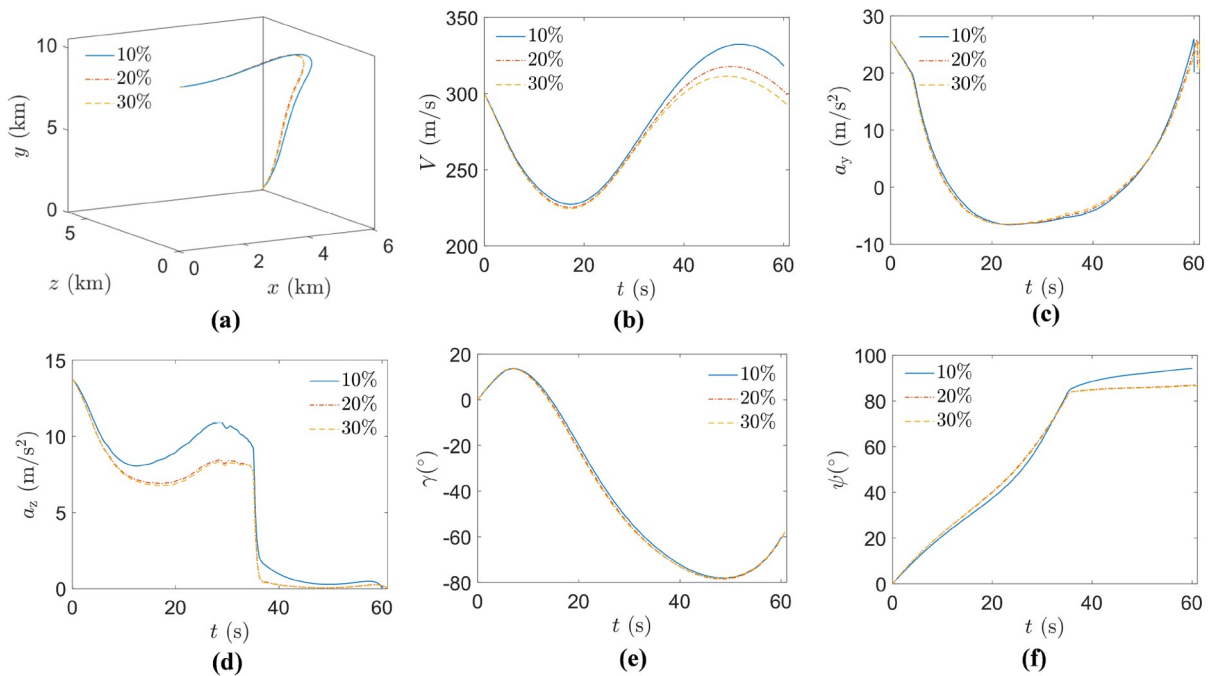


图 13 不同工况的对比. (a) 弹道轨迹; (b) 速度曲线; (c) 俯仰加速度曲线; (d) 偏航加速度曲线; (e) 弹道倾角曲线; (f) 弹道偏角曲线

Figure 13 Comparison of different conditions. (a) Missile's trajectories; (b) velocity curves; (c) pitch acceleration curves; (d) yaw acceleration curves; (e) flight path angle curves; (f) yaw angle curves.

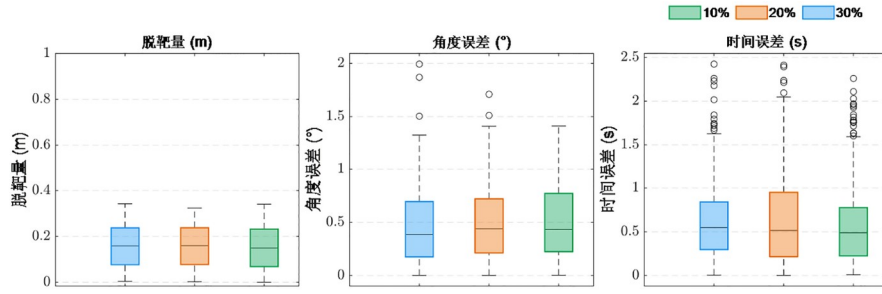


图 14 不同工况的终端误差统计

Figure 14 Terminal error statistics for different conditions.

确定性对制导性能的影响较小。此外, 我们统计了100次蒙特卡罗模拟的终端误差结果(如图14所示)。仿真结果证明, 所提制导算法在气动力系数存在不确定性的条件下, 具有良好的鲁棒性。

5.4.2 质量与特征面积存在不确定性

为了评估所提出的制导算法在不同型号的导弹上的适用性, 我们在表1的质量和参考面积中引入了[0%, 20%]的误差, 以模拟不同型号的导弹, 即

$$S = S \cdot (1 + \epsilon_s), \quad \epsilon_s \in [0\%, 20\%], \quad (55)$$

$$m = m \cdot (1 + \epsilon_m), \quad \epsilon_m \in [0\%, 20\%]. \quad (56)$$

然后, 在随机初始条件下进行了200次蒙特卡罗模拟。如图15所示, 仿真结果表明, 即使存在质量和特征区域的不确定性, 所提出的算法也能保持有效的性能。

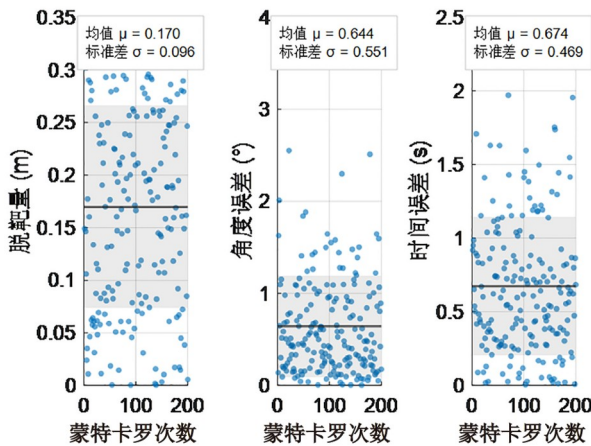


图 15 质量和特征面积存在不确定性时的蒙特卡罗仿真

Figure 15 Monte Carlo simulation in the presence of uncertainties in mass and reference area.

最大角度误差不超过4°, 最大时间误差不超过2.5 s。这表明该算法能够适应不同的导弹型号, 而无需重新训练。

注释6 在本节存在不确定性的仿真中, 我们固定参数 k_1 和 k_2 。换言之, 在使用表1范围内的初始条件训练参数 k_1 和 k_2 后, 没有针对其他不同的工况或场景进行重新训练。

5.4.3 初始条件以外的制导性能评估

为了评估所提出的制导算法初始条件以外的泛化性能, 选择目标水平位置在[5500 m, 6000 m]以及[6500 m, 7000 m], 该区间为表1中未涵盖的初始条件。我们分别在各个区间进行了100次蒙特卡罗仿真, 即共计200次, 仿真结果如图16所示。结果表明, 在未见过的初始条件范围外, 所提算法也能保持较好的制导性能,

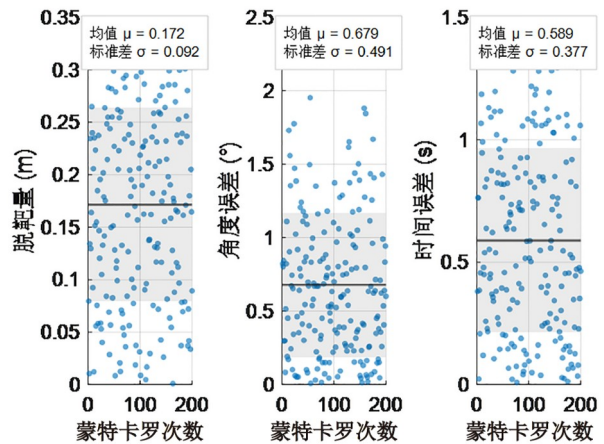


图 16 初始条件范围外的蒙特卡罗仿真

Figure 16 Monte Carlo simulation outside the initial condition range.

最大角度误差不超过 2° , 时间误差不超过1.5 s.

6 结论

首先, 针对传统神经网络获得的制导策略不透明、不可解释的问题, 本文利用KAN反演出制导律的解析形式, 提出了一种将数据驱动方法与解析表达式反演相结合的制导律设计方法; 其次, 在微调解析表达式时, 针对传统基于RL的方法奖励函数设计困难的

问题, 本文采用GAIL的方法自动生成奖励信号, 无需人为设计奖励函数. 仿真结果表明, 所提算法的制导性能满足时间和角度的同时约束, 并且在未训练场景中的制导性能具有良好的鲁棒性. 目前虽以KAN反演制导律解析表达式的方法保持着较好的制导性能, 但解析式仍需人工细致组合拼装, 易引入与数据反演结果的细微偏差, 影响精度与可复现性. 后续研究可以面向自主反演, 自动生成并校验解析式, 避免人工拼装组合带来的误差影响.

参考文献

- 1 Jeon I S, Lee J I, Tahk M J. Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2006, 14: 260–266
- 2 Kim T H, Lee C H, Tahk M J, et al. Biased PNG law for impact-time control. *Trans Jpn Soc Aero S Sci*, 2013, 56: 205–214
- 3 Tahk M J, Shim S W, Hong S M, et al. Impact time control based on time-to-go prediction for sea-skimming antiship missiles. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2018, 54: 2043–2052
- 4 Wang J, Liu J W, Cui X X, et al. Multi-constraint guidance law for impact time and angle with limited field-of-view (in Chinese). *J Beijing Inst Technol*, 2024, 44: 18–27 [王江, 刘经纬, 崔晓曦, 等. 有限视场下的攻击时间和角度多约束制导律. 北京理工大学学报, 2024, 44: 18–27]
- 5 Liu Y H, Li K B, Zhu Y C, et al. Global nonlinear exact impact time control guidance design based on error dynamics (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2023, 53: 565–575 [刘远贺, 黎克波, 朱云冲, 等. 基于误差动力学的全局非线性精确飞行时间控制制导律设计. 中国科学: 技术科学, 2023, 53: 565–575]
- 6 He S, Lee C H. Optimality of error dynamics in missile guidance problems. *J Guid Control Dyn*, 2018, 41: 1624–1633
- 7 Wang C, Dong W, Wang J, et al. Guidance law design with fixed-time convergent error dynamics. *J Guid Control Dyn*, 2021, 44: 1389–1398
- 8 Bhattacharjee D, Chakravarthy A, Subbarao K. Nonlinear model predictive control based missile guidance for target interception. In: *Proceedings of the AIAA Scitech 2020 Forum*. Orlando: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2020. 865
- 9 Maity A, Oza H B, Padhi R. Generalized model predictive static programming and angle-constrained guidance of air-to-ground missiles. *J Guid Control Dyn*, 2014, 37: 1897–1913
- 10 Oza H B, Padhi R. Impact-angle-constrained suboptimal model predictive static programming guidance of air-to-ground missiles. *J Guid Control Dyn*, 2012, 35: 153–164
- 11 Federici L, Benedikter B, Zavoli A. Machine learning techniques for autonomous spacecraft guidance during proximity operations. In: *Proceedings of AIAA Scitech 2021 Forum*. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2021. 668
- 12 Shi Y, Wang Z. A deep learning-based approach to real-time trajectory optimization for hypersonic vehicles. In: *Proceedings of AIAA Scitech 2020 Forum*. Orlando: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2020. 23
- 13 Dai P, Feng D, Feng W, et al. Entry trajectory optimization for hypersonic vehicles based on convex programming and neural network. *Aerosp Sci Tech*, 2023, 137: 108259
- 14 He S, Luo H, Lee C H, et al. Review of data-driven computational guidance for unmanned aerospace vehicles. *Prog Aerosp Sci*, 2025, 157: 101129
- 15 Izzo D, Blazquez E, Ferede R, et al. Optimality principles in spacecraft neural guidance and control. *Sci Robot*, 2024, 9: 91
- 16 Jin T, He S. Ensemble transfer learning midcourse guidance algorithm for velocity maximization. *J Aerosp Inf Syst*, 2023, 20: 204–215
- 17 He S, Shin H S, Tsourdos A. Computational missile guidance: A deep reinforcement learning approach. *J Aerosp Inf Syst*, 2021, 18: 571–582
- 18 Gaudet B, Furfaro R. Missile homing-phase guidance law design using reinforcement learning. In: *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Minneapolis: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012. 4470–4470
- 19 Lee S, Lee Y, Kim Y, et al. Impact angle control guidance considering seeker's field-of-view limit based on reinforcement learning. *J Guid Control Dyn*, 2023, 46: 2168–2182

- 20 Luo H, Lee C H, Li C, et al. Generative adversarial imitation learning-based continuous learning computational guidance. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2025, 61: 6809–6821
- 21 Qiu X, Gao C. Three-dimensional cooperative guidance with impact angle constraints via value-policy decomposed multi-agent reinforcement learning. *Aerosp Sci Tech*, 2024, 155: 109616
- 22 Mnih V, Kavukcuoglu K, Silver D, et al. Human-level control through deep reinforcement learning. *Nature*, 2015, 518: 529–533
- 23 Hessel M, Modayil J, Van H, et al. Rainbow: Combining improvements in deep reinforcement learning. In: *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Palo Alto: AAAI Press, 2018. 3215–3222
- 24 Henderson P, Islam R, Bachman P, et al. Deep reinforcement learning that matters. In: *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Palo Alto: AAAI Press, 2018. 3207–3214
- 25 Gaudeta B, Furfaro R, Linares R. Reinforcement meta-learning for angle-only intercept guidance of maneuvering targets. In: *Proceedings of AIAA Scitech 2020 Forum*. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2020. 609–609
- 26 Oceanic U, Administration A. US Standard Atmosphere. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1976
- 27 Liu Z M, Wang Y, Vaidya S, et al. KAN: Kolmogorov-Arnold networks. arXiv: 2404.19756
- 28 Dong W, Wang C, Liu J, et al. Three-dimensional vector guidance law with impact time and angle constraints. *J Franklin Inst*, 2023, 360: 693–718

KAN-based analytic expression inversion for three-dimensional impact angle and time control guidance

LUO HaoWen¹, JIN TianYu¹, LIN DeFu¹ & HE ShaoMing^{1,2}

¹ School of Air and Space Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

² State Key Laboratory of Environment Characteristics and Effects for Near-space, Beijing 100081, China

This paper addresses the problem of missile intercepting a stationary target in three-dimensional space with desired impact time and angle constraints. A novel guidance law based on the Kolmogorov-Arnold network (KAN) is proposed. First, a variable-speed nonlinear guidance model incorporating aerodynamic effects is established according to the relative motion dynamics between the missile and target, eliminating the need for the constant velocity assumption. Second, the guidance command is decomposed into pitch and yaw channels. Bias term commands for each channel are designed based on the biased proportional navigation guidance law, thereby simplifying the guidance law design. Subsequently, KAN is employed to perform supervised learning on flight data, innovatively deriving the analytical expressions of the guidance law in a data-driven manner. Finally, a generative adversarial imitation learning (GAIL)-based method is used to fine-tune the unknown parameters within the derived analytical expressions. This approach eliminates the need for manual reward function design and avoids the sparse reward problem inherent in traditional reinforcement learning. Additionally, the interpretability of the KAN-derived analytical guidance law expressions is analyzed and validated through relevant simulations. Numerical simulation results demonstrate that the proposed guidance law not only simultaneously satisfies the time and angle constraints but also maintains high guidance accuracy in untrained scenarios.

impact time control, impact angle control, three-dimensional guidance, deep reinforcement learning, Kolmogorov-Arnold network

doi: [10.1360/SST-2025-0206](https://doi.org/10.1360/SST-2025-0206)