中国科学 : 信息科学 2025年 第 55 卷 第 1 期: 172–186
SCIENTIA SINICA Informationis
论文

线性多智能体系统期望编队的可实现性问题

王兴平[1*], 朱建栋[2], 迟殿委[1], 黄甜甜[1], 冯俊娥[3]

1. 烟台理工学院人工智能学院, 烟台 264005
2. 南京师范大学数学科学学院, 南京 210023
3. 山东大学数学学院, 济南 250100
* 通信作者. E-mail: wangxingping@yitsd.edu.cn

收稿日期: 2024–03–12; 修回日期: 2024–06–24; 接受日期: 2024–11–20; 网络出版日期: 2025–01–07

国家自然科学基金 (批准号: 62373193, 62273201) 资助项目

摘要 在何种条件下能设计控制协议使一个多智能体系统实现期望编队是编队控制的基本问题. 通过分析线性多智能体系统一类可完全实现的期望编队的性质, 本文注意到期望编队的可实现性和时变线性方程组的相容性之间存在联系, 由此利用时变线性方程组的渐近相容性提出期望编队的渐近相容概念, 并利用矩阵的 Moore-Penrose 广义逆研究其主要性质. 利用这一概念, 本文给出线性多智能体系统期望编队的可实现性结论: 只要智能体动态和连接网络分别满足可控性和连通性条件, 所有渐近相容的期望编队都是可实现的. 对渐近相容的期望编队, 本文利用加权可控性 Gram 矩阵和 Moore-Penrose 广义逆设计出状态反馈控制协议. 若智能体动态进一步还是可观的, 则利用分离原理设计出基于观测器的控制协议. 最后, 仿真实例的结果验证了本文结论.

关键词 线性多智能体系统, 编队控制, 期望编队的可实现性, 渐近相容, 协议设计

1 引言

自然界每一生物种群的个体之间都存在着自发协作行为, 这些行为能使种群的个体实施群体性行为, 完成群体性目标. 这种现象促使人们提出和研究由多个人工系统组成的多智能体系统. 多智能体系统能通过协作完成复杂的单个智能体难以完成的任务, 如多个小型卫星通过协同可以构建覆盖全球的星链系统, 实现全球通讯和导航; 多个无人船舰经协同排成编队阵形执行作战任务. 20 世纪 90 年代以来, 多智能体技术在计算机、通信、传感器等新技术的推动下快速发展, 应用范围覆盖工业、航天、军事, 人工智能等众多领域 [1~3], 在此同时, 多智能体系统的理论研究也备受关注, 一直是控制理论研究领域的热点 [4, 5].

多智能体系统控制的基本问题是基于局部信息为多智能体设计合作协议, 使它们能经协议协作完成指定的任务. 一个典型的任务是: 预先指定的一组在状态空间取值且与智能体一一对应的时变函数

引用格式: 王兴平, 朱建栋, 迟殿委, 等. 线性多智能体系统期望编队的可实现性问题. 中国科学: 信息科学, 2025, 55: 172–186, doi: 10.1360/SSI-2024-0077
Wang X P, Zhu J D, Chi D W, et al. Achievability problem for desired formations of linear multi-agent systems. Sci Sin Inform, 2025, 55: 172–186, doi: 10.1360/SSI-2024-0077

© 2025《中国科学》杂志社 www.scichina.com infocn.scichina.com

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

(称为期望编队), 它们在状态空间形成一个随时间变动的几何体, 要求在状态空间运行的多智能体能形成与此几何体相同的几何形状. 以实现这种任务为目标的控制称为编队控制, 它是多智能体系统控制研究的重要课题.

多个一阶积分器的编队控制是最简单的编队控制问题, 其结论是: 只要积分器间的连接网络满足连通性条件, 便可设计控制协议实现任意给定的期望编队 [4,6,7]. 文献 [8,9] 分别研究二阶和一般线性多智能体的定常编队控制, 其中文献 [9] 针对一类可允许协议给出了定常编队可实现的充分必要条件. 在实际应用中, 多数智能体编队队形是随时间变化的, 所以更多的文献研究时变编队控制问题. 文献 [10] 研究多个二阶积分器的时变编队控制问题, 其研究策略是将编队控制问题转化为同步问题. 文献 [11] 研究一般线性多智能体系统的时变编队控制, 针对一类类型被限定的控制协议给出了期望编队的可实现条件. 基于不同的协议类型, 文献 [12,13] 研究了一般时滞线性多智能体系统的时变编队控制问题. 文献 [14,15] 研究线性多智能体系统输出编队控制问题, 它要求多智能体的输出实现指定的期望编队, 两篇文献给出的编队可实现条件都依赖一个称为输出编队误差的辅助系统的稳定性. 文献 [16] 引入二次性能函数将线性多智能体的编队控制问题转化为优化控制问题, 解决了一类特殊期望编队的编队控制问题. 文献 [17] 将组成期望编队的时变函数看作参考轨迹, 用优化控制方法设计控制协议使智能体跟踪这些参考信号, 以此实现期望编队.

受实际应用的驱动, 更复杂的编队控制问题被提出, 它们要求多智能体除实现指定的期望编队外, 还实现其他目标. 编队跟踪要求多智能体在实现指定编队的同时还跟踪给定的参考轨迹或其他智能体轨迹. 文献 [18] 研究平面机器人保持适当队形且沿给定路径运动的控制问题. 文献 [19] 要求线性多智能体实现指定的期望编队, 同时编队中心跟踪给定的参考轨迹. 在文献 [20,21], 线性多智能体被分成跟随者和领导者两类, 跟随者除实现指定的编队队形外, 同时还要跟踪领导者. 文献 [22~24] 研究分组编队跟踪控制, 文中跟随者被分成不同的组, 它们在各个组内实现编队跟踪且组间保持某种联系. 文献 [25] 研究异构线性多智能体系统的输出编队跟踪问题, 这些异构智能体被要求满足一组匹配条件. 文献 [26] 使用优化控制方法研究线性多智能体系统的编队跟踪问题. 编队合围是要求一些智能体 (领导者) 在实现指定编队的同时还能形成凸体包围其他智能体 (跟随者). 文献 [27] 研究线性多智能体编队合围控制, 既为领导者设计了能实现指定编队的协议, 也为跟随者设计了合作协议. 文献 [28] 研究输出反馈线性多智能体的编队合围问题, 给出期望编队的可实现条件并设计出基于观测器的控制协议. 文献 [29,30] 研究异构线性多智能体的编队合围跟踪控制, 其中文献 [30] 考虑的期望编队是由编队构型系统的轨迹生成的. 随着人工智能技术的发展, 强化学习方法也被用于多智能体编队控制研究 [31].

对多个一阶积分器, 只要它们的连接网络满足连通性条件, 就可设计协议使积分器实现任一给定的期望编队. 但对其他类型的多智能体, 则不是所有的期望编队都是可实现的. 比如, 两个二阶积分器在任何条件下都无法实现期望编队 $(0,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(0,2)^{\mathrm{T}}$, 因为该编队要求两个积分器的相对位置为 0 且相对速度为 1. 如何判断一个多智能体系统的期望编队是可实现的, 这是编队控制研究的首要问题. 现有的编队控制研究大都遵循一个共同模式 [11,27,28,30], 即预先设定所用控制协议的类型. 这一模式能简化控制协议设计, 使其只在指定类型的范围内进行, 但得出的编队可实现条件会依赖预设的协议类型, 无法应用于其他类型的控制协议. 例如, 文献 [11,13,28] 给出的期望编队可实现条件都与预设协议类型中的矩阵参数有关.

本文研究具有时变连接网络的一般线性多智能体系统的时变编队控制问题. 与现有文献相比, 本文的研究基于如下观点: 期望编队的可实现性是期望编队与多智能体系统的共有属性, 与使用何种控制协议无关; 同时, 为保证结论的一般性, 编队控制研究不应预设协议类型. 通过分析线性多智能体系统一类可完全实现的期望编队的特征, 我们注意到一个事实: 期望编队的可实现性与时变线性方程组的相容性存在联系, 这个方程组涉及智能体动态, 智能体间的连接网络和期望编队. 这一事实为线性多智能体系统的期望编队可实现性研究提供了一个新途径. 借助时变线性方程组的渐近相容性概念, 本文提出期望编队的渐近相容概念, 并利用这一概念给出线性多智能体系统一个新的期望编队可实现条

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

件: 如智能体和连接网络分别满足可控性和连通性条件, 则任一渐近相容的期望编队都是可实现的. 与现有文献相比 [11,13,21,28], 这里给出的可实现条件不针对任何特定的控制协议类型且可直接验证. 对满足可实现条件的期望编队, 本文给出可直接计算的状态反馈控制协议的设计方法: 利用加权可控性 Gram 矩阵计算协议的反馈增益矩阵, 利用 Moore-Penrose 广义逆计算协议的补偿项. 若智能体动态还是可观的, 本文利用分离原理给出基于观测器的控制协议的设计方法: 根据各智能体输出设计其状态观测器, 然后用观测器变量替换状态反馈控制协议中的状态变量. 在现有文献中, 基于观测器的控制协议多使用非分离设计方法, 即在设计过程中同时设计观测器和基于观测器的控制协议 [25,28]. 在实际应用中, 人们希望根据自己需要设计期望编队并希望它是可实现的, 但这难以完全做到. 本文利用所得结论讨论了如何设计可实现的期望编队使其尽可能满足需要.

2　预备知识和问题叙述

2.1　图论的基本概念

设 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 是一个无向图, 其中节点集合 $\mathcal{V}=\{1,2,\dots,N\}$, 边集合 $\mathcal{E}$ 由 $\mathcal{V}$ 中一些相异节点的无序对组成. 一个连接节点 i 和 j 的路径是如下形式的边序列, $\{i,i_1\},\{i_1,i_2\},\dots,\{i_{d-1},i_d\},\{i_d,j\}$. 如果任何两个相异节点都存在一条连接它们的路径, 就称 $\mathcal{G}$ 是连通的. 图 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵 $\mathcal{A}(\mathcal{G})=(a_{ij})$ 是一个 $N\times N$ 矩阵, 其元素 a_{ij} 定义如下:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \{i,j\}\in\mathcal{E},\\ 0, & \{i,j\}\notin\mathcal{E}.\end{cases}$$

图 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯 (Laplace) 矩阵 $\mathcal{L}(\mathcal{G})=(\ell_{ij})$ 也是一个 N 阶矩阵, 其元素 ℓ_{ij} 定义如下: 如 $i\neq j$, $\ell_{ij}=-a_{ij}$; 如 $i=j$, $\ell_{ii}=\sum_{k=1}^{N}a_{ik}$.

2.2　问题描述

考虑以 $1,2,\dots,N$ 编号的 N 个智能体, 它们由如下 N 个定常线性系统描述:

$$\dot{x}_i=Ax_i+Bu_i,\ y_i=Cx_i,\ i=1,\dots,N, \tag{1}$$

其中 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 和 $C\in\mathbb{R}^{r\times n}$ 是定常矩阵, $x_i\in\mathbb{R}^n$, $u_i\in\mathbb{R}^m$ 和 $y_i\in\mathbb{R}^r$ 分别是智能体的状态、输入和输出. 选择适当指标集 $\mathcal{P}$, 以集合 $\{\mathcal{G}_p:p\in\mathcal{P}\}$ 表示所有以 $\{1,2,\dots,N\}$ 为节点集的无向图组成的集合. 以 $\sigma(t)$ 表示一个从 $[0,\infty)$ 到 $\mathcal{P}$ 的分段常值右连续函数. 智能体之间的连接网络用一个时变图 $\mathcal{G}(t)=\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ 描述, 并称函数 $\sigma(t)$ 的间断点为 $\mathcal{G}(t)$ 的切换时刻. 以 $N_\sigma(t,s)$ 表示 $\mathcal{G}(t)$ 在区间 $[s,t)$ 中的切换点个数, 如果存在 $\kappa,\tau>0$, 使得对任意 $t>s\geqslant 0$,

$$N_\sigma(t,s)\leqslant\kappa+\frac{t-s}{\tau}, \tag{2}$$

就定义其中的 τ 为 $\mathcal{G}(t)$ 的平均驻留时间 [32].

定义1　对在 $\mathbb{R}^n$ 中取值且具有分段连续导函数的 N 个时变函数 $p_1(t),\dots,p_N(t)$, 称 $p(t)=(p_1^{\mathrm{T}}(t),\dots,p_N^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$ 为多智能体系统 (1) 的一个期望编队. 如果存在控制协议 $u_i,1\leqslant i\leqslant N$ 使得式 (1) 从任意初值出发的解满足

$$x_i(t)-p_i(t)-(x_j(t)-p_j(t))\to 0,\ t\to\infty,\ 1\leqslant i,j\leqslant N, \tag{3}$$

则称 p 是可实现的. 进一步, 如果式 (3) 中的收敛速度是指数的, 则称 p 是可指数实现的.

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

本文研究多智能体系统 (1) 的编队控制问题, 主要目标如下:

(1) 将期望编队的可实现性看作是期望编队和多智能体系统的共有属性, 给出其可实现条件;

(2) 对满足可实现条件的期望编队, 设计控制协议使得式 (3) 成立.

3　渐近相容编队的概念

3.1　时变线性方程组的渐近相容性

对定常的 M, b, 如果存在 x_0 使 $Mx_0 = b$, 则称线性方程组 $Mx = b$ 是相容的. 如果 M 和 b 是时变的, 方程组 $Mx = b$ 可能会在一些时刻是相容的而在另外一些时刻是不相容的, 一般的相容概念不再适用. 下面引入新的概念描述时变线性方程组的相容性.

定义2　考虑时变线性方程组

$$\Xi(t)x = \beta(t),\ t \geqslant 0, \tag{4}$$

其中 $\Xi(t) \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $\beta(t) \in \mathbb{R}^p$ 都依赖时间变量 t. 如果存在 $\mu(t) \in \mathbb{R}^q$ 使得当 $t \to \infty$, $\Xi(t)\mu(t) - \beta(t)$ 收敛到 0, 就称 $\mu(t)$ 是一个渐近解, 并称方程组 (4) 是渐近相容的; 如果收敛速度是指数的, 就称 $\mu(t)$ 是一个指数渐近解, 并称方程组 (4) 是指数渐近相容的.

例如, 时变线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t\sin t \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix},\ t \geqslant 0$$

在任何时刻 t 都是不相容的, 但它具有一个指数渐近解 $x_1 = \sin t, x_2 = 0$, 所以它是指数渐近相容的.

定义3 ([33])　对矩阵 $M \in \mathbb{R}^{p\times q}$, 称满足如下条件:

$$MM^+M = M,\quad M^+MM^+ = M^+,\quad (MM^+)^{\mathrm{T}} = MM^+,\quad (M^+M)^{\mathrm{T}} = M^+M \tag{5}$$

的矩阵 $M^+ \in \mathbb{R}^{q\times p}$ 为 M 的 Moore-Penrose 广义逆.

对任意矩阵 M, 其 Moore-Penrose 广义逆 M^+ 是唯一存在的且具有如下性质: $M^+\beta$ 是线性方程组 $Mx = \beta$ 的一个最小二乘解 [33], 即 $\|MM^+\beta - \beta\| = \min_{x\in\mathbb{R}^q} \|Mx - \beta\|$. 根据这一性质, 对任意给定 $t \geqslant 0$, $\|\Xi(t)\Xi^+(t)\beta(t) - \beta(t)\| = \min_{x\in\mathbb{R}^q} \|\Xi(t)x - \beta(t)\|$. 于是得到引理 1.

引理1　时变线性方程组 (4) 是 (指数) 渐近相容的当且仅当, 当 $t \to \infty$ 时, $\|\Xi(t)\Xi^+(t)\beta(t) - \beta(t)\|$ (指数) 收敛到 0.

3.2　渐近相容编队的概念

对一般线性多智能体系统而言, 不是任一期望编队都是可实现的. 那么一个可实现的期望编队具有怎样的性质呢? 我们在一个特殊情形下分析这一问题. 假设系统 (1) 的一个期望编队 p 能被完全实现, 即在某一控制协议 $u_i, 1 \leqslant i \leqslant N$ 下, 系统 (1) 的 N 个智能体从某一初值出发的解满足

$$x_i(t) - p_i(t) = x_j(t) - p_j(t),\ t \geqslant 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant N. \tag{6}$$

引入记号 $\mathbf{1}_N = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$ 并记 $x = (x_1^{\mathrm{T}}, \ldots, x_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $r(t) = x_1(t) - p_1(t)$. 由式 (6) 可得到 $x(t) = p(t) + \mathbf{1}_N \otimes r(t)$. 以 $\mathcal{L}(t)$ 表示系统 (1) 连接网络 $\mathcal{G}(t)$ 的拉普拉斯矩阵. 注意 $\mathcal{L}(t)\mathbf{1}_N = 0$, 直接计算得到

$$(\mathcal{L}(t) \otimes I_n)\,\dot{x}(t) = (\mathcal{L}(t) \otimes I_n)\left(\dot{p}(t) + \mathbf{1}_N \otimes \dot{r}(t)\right) = (\mathcal{L}(t) \otimes I_n)\,\dot{p}(t). \tag{7}$$

记 $u = (u_1^{\mathrm{T}}, \ldots, u_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, 将在协议 u 作用下的系统 (1) 写成

$$\dot{x} = (I_N \otimes A)\,x + (I_N \otimes B)\,u. \tag{8}$$

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

利用式 (8) 再计算 $(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,\dot{x}(t)$ 又可得到

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,\dot{x}(t) &= (\mathcal{L}(t)\otimes A)\,x(t)+(\mathcal{L}(t)\otimes B)\,u\\ &= (\mathcal{L}(t)\otimes A)\,\big(p(t)+\mathbf{1}_N\otimes r(t)\big)+(\mathcal{L}(t)\otimes B)\,u\\ &= (\mathcal{L}(t)\otimes A)\,p(t)+(\mathcal{L}(t)\otimes B)\,u.\end{aligned}\tag{9}$$

比较式 (7) 和 (9) 有

$$(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,\dot{p}(t)=(\mathcal{L}(t)\otimes A)\,p(t)+(\mathcal{L}(t)\otimes B)\,u.$$

这一等式意味着, 如果编队 p 是可完全实现的, 则以 γ 为未知量的时变线性方程组

$$(\mathcal{L}(t)\otimes B)\,\gamma=(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,\dot{p}(t)-(\mathcal{L}(t)\otimes A)\,p(t)\tag{10}$$

存在准确解 u. 这一事实引导我们做进一步推断: 如果 p 不是可完全实现的, 而是可渐近实现的, 则方程组 (10) 应存在渐近解. 再进一步, 我们提出如下问题: 如果期望编队 p 能使方程 (10) 有渐近解, 那么 p 是否可被实现? 这一问题提供了一个研究线性多智能体系统 (1) 的期望编队可实现性的新途径, 即从时变线性方程组 (10) 的渐近相容性出发研究期望编队 p 的可实现性. 我们提出下面概念.

定义4　假设 p 是具有连接网络 $\mathcal{G}(t)$ 的线性多智能体系统 (1) 的期望编队, $\mathcal{L}(t)$ 是 $\mathcal{G}(t)$ 的拉普拉斯矩阵. 如果 p 能使如下以 γ 为未知量的时变线性方程组

$$(\mathcal{L}(t)\otimes B)\,\gamma=(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,\dot{p}-(\mathcal{L}(t)\otimes A)\,p,\ t\geqslant 0\tag{11}$$

是 (指数) 渐近相容的, 就称 p 是 (指数) 渐近相容的.

方程组 (11) 涉及多智能体编队控制的 3 个基本要素: 智能体动态、智能体间的连接网络和期望编队, 定义 4 通过这一方程组的渐近相容性定义了期望编队 p 的渐近相容属性. 后面将证明: 如果 $\mathcal{G}(t)$ 在任何时刻都是连通的, (A,B) 是可控对, 具有渐近相容属性的期望编队都是可实现的.

利用引理 1 可以判定系统 (1) 的一个给定的期望编队是否是 (指数) 渐近相容的. 如果连接网络 $\mathcal{G}(t)$ 在任意时刻 $t\geqslant 0$ 都是连通的, 下面引理给出更直接的判定方法.

引理2　如果系统 (1) 的连接网络 $\mathcal{G}(t)$ 在任意 $t\geqslant 0$ 都是连通的, 则期望编队 p 是渐近相容的当且仅当

$$\lim_{t\to\infty}\big\|(I_{nN}-\bar{B}\bar{B}^{+})(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)\big\|=0,$$

这里 $\bar{B}=(I_N\otimes B,\mathbf{1}_N\otimes I_n)$; p 是指数渐近相容的当且仅存在 $C_0>0,c>0$ 使得

$$\big\|(I_{nN}-\bar{B}\bar{B}^{+})(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)\big\|\leqslant C_0\mathrm{e}^{-ct},\ t\geqslant 0.\tag{12}$$

引理 2 的证明在附录 A.1 给出. 引理 1 和 2 解决了期望编队的渐近相容性的判别问题, 另一个相关问题是: 哪些期望编队是渐近相容的? 下面给出一类重要的渐近相容的期望编队的构造公式.

引理3　假设 $\mathcal{G}(t)$ 对任意 $t\geqslant 0$ 都是连通的. 如果时变函数 $q(t)\in\mathbb{R}^n$ 具有分段连续的导函数, $\bar{p}_i(t)\in\mathbb{R}^n$ 是下面微分方程的解:

$$\dot{\bar{p}}_i(t)=A\bar{p}_i(t)+B\bar{\gamma}_i(t),\ \bar{p}_i(0)=c_i,\ 1\leqslant i\leqslant N,\tag{13}$$

其中 $c_i\in\mathbb{R}^n$ 是常向量, $\bar{\gamma}_i(t)\in\mathbb{R}^m$ 是在任意有限区间上有界的分段连续函数, 则由

$$p_i(t)=\bar{p}_i(t)+q(t),\ t\geqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant N\tag{14}$$

定义的期望编队 $p=(p_1^{\mathrm{T}},\ldots,p_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是指数渐近相容的.

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

证明　记 $\bar{p}=(\bar{p}_1^{\mathrm{T}},\ldots,\bar{p}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\bar{\gamma}=(\bar{\gamma}_1^{\mathrm{T}},\ldots,\bar{\gamma}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. 由式 (14), 期望编队 p 可以写成 $p=\bar{p}+\mathbf{1}_N\otimes q$ 形式, 又由式 (13), $\dot{\bar{p}}=(I_N\otimes A)\,\bar{p}+(I_N\otimes B)\,\bar{\gamma}$. 于是

$$\begin{aligned}\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p&=(\dot{\bar{p}}+\mathbf{1}_N\otimes\dot{q})-(I_N\otimes A)\,(\bar{p}+\mathbf{1}_N\otimes q)\\&=\dot{\bar{p}}-(I_N\otimes A)\,\bar{p}+\mathbf{1}_N\otimes\dot{q}-\mathbf{1}_N\otimes Aq\\&=(I_N\otimes B)\,\bar{\gamma}+\mathbf{1}_N\otimes(\dot{q}-Aq)=\bar{B}\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \dot{q}-Aq\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 $\bar{B}=(I_N\otimes B,\mathbf{1}_N\otimes I_n)$. 由 Moore-Penrose 广义逆定义, $\bar{B}=\bar{B}\bar{B}^{+}\bar{B}$, 由此推出 $(I_{nN}-\bar{B}\bar{B}^{+})(\dot{p}-(I_N\otimes A)p)=0$, 此即式 (12) 对任意 $C_0>0$, $c>0$ 成立, 根据引理 2, p 是指数渐近相容的.

4　主要结论

4.1　预备引理

对任一 N 阶无向图 $\mathcal{G}$, 其拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 是一个半正定矩阵, 它有一个 0 特征值且其对应的特征向量为 $\mathbf{1}_N\in\mathbb{R}^N$. 将 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的特征值从小到大排列并记为 $0=\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_N$. 如果 $\mathcal{G}$ 是连通的, 则 $\lambda_2>0$. 下面的引理给出了 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的最小非零特征值 λ_2 的下界估计.

引理4 ([34])　如果 $\mathcal{G}$ 是一个 N 阶无向连通图, 则

$$\lambda_2\geqslant\frac{4}{N(N-1)}.$$

对可控对 (A,B), 定义如下加权可控性 Gram 矩阵 $W(\delta,\alpha)$ [35]:

$$W(\delta,\alpha)=\int_0^{\delta}\mathrm{e}^{-4\alpha\zeta}\cdot\mathrm{e}^{-A\zeta}BB^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-A^{\mathrm{T}}\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$

由 (A,B) 的可控性, 对任意 $\alpha\geqslant 0$ 和 $\delta>0$, 都有 $W(\delta,\alpha)>0$.

引理5 ([36])　假设 (A,B) 是可控对, $\mathcal{G}$ 是任一 N 阶无向连通图. 令

$$K(\delta,\alpha)=\frac{N(N-1)}{4}B^{\mathrm{T}}W^{-1}(\delta,\alpha).\tag{15}$$

则对任意 $\alpha\geqslant 0,\delta>0$ 和 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ 的任意非零特征值 λ,

$$\left\|\mathrm{e}^{(A-\lambda BK(\delta,\alpha))\,t}\right\|\leqslant\sqrt{\lambda_1(\delta)\lambda_2^{-1}(\delta)}\,\mathrm{e}^{2\alpha\delta}\mathrm{e}^{-2\alpha t},\ t\geqslant 0,\tag{16}$$

其中 $\lambda_1(\delta)$ 和 $\lambda_2(\delta)$ 分别是 $W(\delta,0)$ 的最大和最小特征值.

引理6　假设 $\mathcal{G}(t)$ 具有切换时刻 $0=t_0<t_1<\cdots$ 且具有已知的平均驻留时间 $\tau>0$. 考虑如下分段表示的微分方程:

$$\dot{z}(t)=M_kz(t)+H_kq(t),\ t_k\leqslant t<t_{k+1},\ k=0,1,2,\ldots,\tag{17}$$

其中 $M_k,H_k\in\mathbb{R}^{\rho\times\rho}$ 是定常矩阵, $q(t)\in\mathbb{R}^{\rho}$ 是分段连续函数且在任意有限区间上是有界的. 如果下面条件成立:

(1) 存在 $\alpha>0$ 使得 $\|\mathrm{e}^{M_kt}\|\leqslant\mathrm{e}^{\alpha\tau}\mathrm{e}^{-2\alpha t},\ t\geqslant 0,\ k\geqslant 0$;

(2) $\|H_k\|\leqslant 1$,

那么, 若当 $t\to\infty$ 时, $q(t)$ (指数) 趋于 0, 则当 $t\to\infty$ 时, 方程的解 $z(t)$ (指数) 趋于 0.

引理 6 的证明在附录 A.2 给出.

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

4.2　主要结论

下面给出本文的主要结论. 定理 1 证明了如线性多智能体系统 (1) 的智能体和连接网络分别满足可控性和连通性条件, 则可设计状态反馈的控制协议使多智能体实现渐近相容的期望编队. 定理 2 则证明了, 如智能体进一步满足可观性条件, 则可利用分离原理设计基于观测器的控制协议使多智能体实现渐近相容的期望编队.

定理1　考虑线性多智能体系统 (1). 如果 (A,B) 是可控对, 同时时变连接网络 $\mathcal{G}(t)$ 在任何时刻都是连通的且具有已知的平均驻留时间 $\tau>0$, 则对任一 (指数) 渐近相容的期望编队 p, 可设计状态反馈控制协议使多智能体系统 (指数) 实现 p.

证明　我们按如下方法直接构造状态反馈的控制协议: 定义反馈增益矩阵

$$K=K\left(\frac{\tau}{4},\frac{\ln\lambda_1(\frac{\tau}{4})-\ln\lambda_1(\frac{\tau}{4})}{\tau}\right),\tag{18}$$

其中 $K(\cdot,\cdot)$ 和 $\lambda_1(\frac{\tau}{4}),\lambda_1(\frac{\tau}{4})$ 在引理 5 定义; 对期望编队 p, 按如下方式定义 $\nu_1(t),\dots,\nu_N(t)\in\mathbb{R}^m$:

$$(\nu_1^{\mathrm{T}}(t),\dots,{\nu_N}^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}=(I_{mN},O_{mN\times n})\bar{B}^{+}(\dot{p}-(I\otimes A)\,p),\tag{19}$$

其中 $\bar{B}=(I_N\otimes B,\mathbf{1}_N\otimes I_n)$, $O_{mN\times n}$ 是一个 $mN\times n$ 的零矩阵; 设计状态反馈控制协议

$$u_i(t)=-K\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(t)\big(x_i(t)-p_i(t)-x_j(t)+p_j(t)\big)+\nu_i(t),\ i=1,\dots,N,\tag{20}$$

其中 $(a_{ij}(t))_{N\times N}$ 是 $\mathcal{G}(t)$ 的邻接矩阵. 下面将证明: 如果 p 是 (指数) 渐近相容的, 则在控制协议 (20) 下, 系统 (1) 能 (指数) 实现 p.

将协议 (20) 应用于系统 (1). 引入记号

$$x=(x_1^{\mathrm{T}},\dots,x_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\ \nu=(\nu_1^{\mathrm{T}}(t),\dots,{\nu_N}^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}},$$

耦合系统可表示为

$$\dot{x}=(I_N\otimes A)\,x-(\mathcal{L}(t)\otimes BK)\,(x-p)+(I_N\otimes B)\,\nu,\tag{21}$$

其中 $\mathcal{L}(t)$ 是 $\mathcal{G}(t)$ 拉普拉斯矩阵. 令

$$\bar{x}=x-p,\tag{22}$$

系统 (21) 变为

$$\dot{\bar{x}}=(I_N\otimes A-\mathcal{L}(t)\otimes BK)\,\bar{x}+\big[(I_N\otimes B)\,\nu+(I_N\otimes A)\,p-\dot{p}\big].\tag{23}$$

处理式 (23) 中方括号内的非齐次项. 将 ν 的定义式 (19) 及 $\bar{B}=(I_N\otimes B,\mathbf{1}_N\otimes I_n)$ 代入计算可得

$$\begin{aligned}
&(I_N\otimes B)\,\nu+(I_N\otimes A)\,p-\dot{p}\\
&=\big[(I_N\otimes B)\,(I_{mN},O_{mN\times n})\bar{B}^{+}-I_{nN}\big](\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)\\
&=\big[(I_N\otimes B,O_{nN\times n})\bar{B}^{+}-I_{nN}\big](\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)\\
&=\big[(\bar{B}-(O_{nN\times mN},\mathbf{1}_N\otimes I_n))\bar{B}^{+}-I_{nN}\big](\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)\\
&=\big[\bar{B}\bar{B}^{+}-I_{nN}\big](\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)-(O_{nN\times mN},\mathbf{1}_N\otimes I_n)\bar{B}^{+}(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p).
\end{aligned}\tag{24}$$

用 β 表示 $-B^{+}(\dot{p}-(I\otimes A)\,p)$ 的最后 n 个分量构成的向量, 则

$$-(O_{nN\times mN},\mathbf{1}_N\otimes I_n)\bar{B}^{+}(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)=\mathbf{1}_N\otimes\beta.$$

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

再令

$$\bar{p} = (\bar{B}\bar{B}^{+} - I_{nN})(\dot{p} - (I_N \otimes A)\, p), \tag{25}$$

方程 (23) 可写作

$$\dot{\bar{x}} = (I_N \otimes A - \mathcal{L}(t) \otimes BK)\, \bar{x} + \bar{p} + \mathbf{1}_N \otimes \beta. \tag{26}$$

假设 $\mathcal{G}(t)$ 具有切换时刻 $0 = t_0 < t_1 < \cdots$, 将方程 (26) 进一步写成如下形式:

$$\dot{\bar{x}} = (I_N \otimes A - \mathcal{L}(t_k) \otimes BK)\, \bar{x} + \bar{p} + \mathbf{1}_N \otimes \beta,\ t_k \leqslant t < t_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots. \tag{27}$$

因为 $\mathcal{G}(t)$ 在任何时刻都是连通的, 所以 $\mathcal{L}(t_k)$ 的 0 特征值是 1 重的. 将 $\mathcal{L}(t_k)$ 的特征值和对应的标准正交特征向量分别排列如下:

$$\lambda_1^{(k)} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{N-1}^{(k)} > \lambda_N = 0,\ \xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_{N-1}^{(k)},\ \xi_N = \sqrt{N^{-1}}\, \mathbf{1}_N.$$

定义

$$D_k = (\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_{N-1}^{(k)}),\ T_k = (D_k, \xi_N),$$

则矩阵 T_k 是正交的且使得

$$T_k^{\mathrm{T}} \mathcal{L}(t_k) T_k = \operatorname{diag}\big(\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_{N-1}^{(k)}, 0\big),\ T_k^{\mathrm{T}}\, \mathbf{1}_N = (0, \ldots, 0, \sqrt{N}\,)^{\mathrm{T}}. \tag{28}$$

对任意 $k \geqslant 0$, 定义正交变换

$$\bar{x} = (T_k \otimes I_n)\, z,\ t_k \leqslant t < t_{k+1}, \tag{29}$$

这是一个依赖连接网络 $\mathcal{G}(t)$ 的变换. 在 z 坐标下, 方程 (27) 可写成

$$\dot{z} = \big[I_N \otimes A - T_k^{\mathrm{T}} \mathcal{L}(t_k) T_k \otimes BK\big] z + (T_k^{\mathrm{T}} \otimes I_n)\, (\bar{p} + \mathbf{1}_N \otimes \beta),\ t_k \leqslant t < t_{k+1}. \tag{30}$$

对 z 进行如下划分 $z = (z_1^{\mathrm{T}}, z_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, 其中 $z_1 \in \mathbb{R}^{(N-1)n}$, $z_2 \in \mathbb{R}^n$, 根据式 (28), 可将式 (30) 写成

$$\dot{z}_1 = M_k z_1 + (D_k^{\mathrm{T}} \otimes I_n)\, \bar{p}, \tag{31a}$$

$$\dot{z}_2 = A z_2 + (\xi_N^{\mathrm{T}} \otimes I_n)\, \bar{p} + \sqrt{N}\beta,\ t_k \leqslant t < t_{k+1}, \tag{31b}$$

这里 $M_k = I_{N-1} \otimes A - \operatorname{diag}(\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_{N-1}^{(k)}) \otimes BK$.

注意 $\mathcal{G}(t)$ 具有平均驻留时间 $\tau > 0$. 下面验证方程 (31a) 满足引理 6 的两个条件. 因为 $\|D_k^{\mathrm{T}} \otimes I_n\| = 1$, 所以引理 6 的条件 2 成立. 下面验证条件 1 也成立. 首先

$$\|\mathrm{e}^{M_k t}\| = \max\big\{\|\mathrm{e}^{(A - \lambda_1^{(k)} BK)t}\|, \ldots, \|\mathrm{e}^{(A - \lambda_{N-1}^{(k)} BK)t}\|\big\}, \tag{32}$$

根据 K 的定义式 (18), 对 $\delta = \frac{\tau}{4}, \alpha = \frac{1}{\tau}(\ln \lambda_1(\frac{\tau}{4}) - \ln \lambda_1(\frac{\tau}{4}))$ 应用引理 5, 可知不等式

$$\|\mathrm{e}^{(A - \lambda_i^{(k)} BK)t}\| \leqslant \sqrt{\lambda_1\left(\frac{\tau}{4}\right) \lambda_2^{-1}\left(\frac{\tau}{4}\right)}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha\tau} \mathrm{e}^{-2\alpha t},\ t \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant N-1 \tag{33}$$

对 $\mathcal{L}(t_k)$ 的所有非零特征值 $\lambda_i^{(k)}$ 都成立. 又

$$\sqrt{\lambda_1\left(\frac{\tau}{4}\right) \lambda_2^{-1}\left(\frac{\tau}{4}\right)} = \mathrm{e}^{\ln \sqrt{\lambda_1(\frac{\tau}{4}) \lambda_2^{-1}(\frac{\tau}{4})}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\tau}(\ln \lambda_1(\frac{\tau}{4}) - \ln \lambda_1(\frac{\tau}{4})) \cdot \frac{\tau}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha\tau},$$

将其代入式 (33) 得到 $\|\mathrm{e}^{(A - \lambda_i^{(k)} BK)t}\| \leqslant \mathrm{e}^{\alpha\tau} \mathrm{e}^{-2\alpha t}$. 再回到式 (32), 便知存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\|\mathrm{e}^{M_k t}\| \leqslant \mathrm{e}^{\alpha\tau} \mathrm{e}^{-2\alpha t},\ t \geqslant 0, \tag{34}$$

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

于是, 引理 6 的条件 1 也成立. 又根据引理 2, 如果 p 是 (指数) 渐近相容的, 则当 $t\to\infty$, $\bar{p}=(\bar{B}\bar{B}^{+}-I_{nN})(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)$ 是 (指数) 趋于 0. 将引理 6 应用于式 (31a) 即得结论: 若 p 是 (指数) 渐近相容的, 则当 $t\to\infty$ 时, $z_1(t)$ (指数) 趋于 0.

根据变换式 (29),

$$\bar{x}(t)=(T_k\otimes I_n)\,z(t)=(D_k\otimes I_n,\xi_N\otimes I_n)\begin{pmatrix}z_(t)\\ z_2(t)\end{pmatrix}=(D_k\otimes I_n)\,z_1(t)+\sqrt{N^{-1}}\,\mathbf{1}_N\otimes z_2(t). \tag{35}$$

代入 $\bar{x}=x-p$ 并移项得到 $x(t)-p(t)-\sqrt{N^{-1}}\,\mathbf{1}_N\otimes z_2(t)=(D_k\otimes I_n)\,z_1(t)$. 利用上面关于 $z_1(t)$ 的结论, 当 $t\to\infty$ 时,

$$x(t)-p(t)-\mathbf{1}_N\otimes\big(\sqrt{N^{-1}}\,z_2(t)\big) \tag{36}$$

(指数) 趋于 0. 此即, 若 p 是 (指数) 渐近相容的, 则在控制协议 (20) 下系统 (1) 可 (指数) 实现 p.

定理 1 的证明中有两个关键点: 一个是控制协议 (20) 的补偿项 ν_i 的计算公式 (19), 它和渐近相容编队概念密切相关. 另一个是依赖连接网络的坐标变换 (29). 在控制协议 (20) 作用下的系统 (1) 经坐标变换后有一个重要的结构特征, 即关于 z_1 和 z_2 的两个方程是互相独立的. 还有一点需要指出, 式 (36) 中的 $\sqrt{N^{-1}}\,z_2(t)$ 在一些文献中被称为队形参考函数 (formation reference function) [11,12], 在这里队形参考函数满足一个微分方程.

定理2　如果在定理 1 条件成立下, (A,C) 还是可观对, 则对系统 (1) 的任一 (指数) 渐近相容的期望编队 p, 可设计基于观测器的控制协议使多智能体系统 (指数) 实现 p.

证明　我们利用分离原理设计基于观测器的控制协议. 首先对渐近相容的期望编队 p, 设计形容式 (20) 的状态反馈控制协议. 其次为每一智能体设计如下状态观测器:

$$\dot{\hat{x}}_i=A\hat{x}_i+Bu_i+L(y_i-C\hat{x}_i),\ i=1,\dots,N, \tag{37}$$

其中 $\hat{x}_i\in\mathbb{R}^n$, 观测器增益 L 使 $A-LC$ 是稳定阵. 于是, 存在 $b>0$ 和 $D>0$ 使得

$$\|\mathrm{e}^{(A-LC)t}\|\leqslant D\mathrm{e}^{-bt}. \tag{38}$$

根据分离原理, 以式 (37) 中的观测器变量 $\hat{x}$ 代替状态反馈协议式 (20) 中的状态变量 x, 得到基于观测器的控制协议

$$u_i(t)=-K\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(t)\big(\hat{x}_i(t)-p_i(t)-\hat{x}_j(t)+p_j(t)\big)+\nu_i(t),\ i=1,\dots,N. \tag{39}$$

将式 (39) 应用于系统 (1). 引入记号 $\hat{x}=(\hat{x}_1^{\mathrm{T}},\dots,\hat{x}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 并令 $\tilde{x}=x-\hat{x}$, 耦合系统可写成

$$\dot{x}=(I_N\otimes A)\,x-(\mathcal{L}(t)\otimes BK)\,(x-p)+(\mathcal{L}(t)\otimes BK)\,\tilde{x}+(I_N\otimes B)\,\nu, \tag{40a}$$

$$\dot{\tilde{x}}=[I_N\otimes(A-LC)]\tilde{x}. \tag{40b}$$

从式 (40b) 中解出 $\tilde{x}(t)=\mathrm{e}^{I_N\otimes(A-LC)t}\,\tilde{x}_0=(I_N\otimes\mathrm{e}^{(A-LC)t})\,\tilde{x}_0$, 其中 $\tilde{x}_0$ 表示子系统 (40b) 的初值. 将 $\tilde{x}(t)$ 代入式 (40a) 后, 令 $\bar{x}=x-p$ 并重复对系统 (21) 使用的步骤可以得到

$$\dot{\bar{x}}=(I_N\otimes A-\mathcal{L}(t)\otimes BK)\,\bar{x}+\hat{p}+\mathbf{1}_N\otimes\beta, \tag{41}$$

这里 $\hat{p}=(\mathcal{L}(t)\otimes BK)\,(I_N\otimes\mathrm{e}^{(A-LC)t})\,\tilde{x}_0+\bar{p}$, $\bar{p}$ 在式 (25) 中定义. 系统 (41) 与 (26) 具有相同形式. 根据拉普拉斯矩阵定义, $\mathcal{L}(t)$ 是一个有界矩阵, 所以当 $t\to\infty$ 时, $(\mathcal{L}(t)\otimes BK)\,(I_N\otimes\mathrm{e}^{(A-LC)t})$ 指数趋于 0. 如果 p 是 (指数) 渐近相容的, 则由引理 2, 当 $t\to\infty$ 时, $\bar{p}$ (指数) 趋于 0, $\hat{p}$ 亦 (指数) 趋于 0. 所以系统 (41) 和 (26) 满足同样的条件. 对式 (41) 重复对式 (26) 进行的步骤即可证明本定理.

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

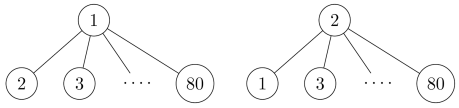


图 1　具有节点集 $\{1,2,\ldots,80\}$ 的两个星形图.

Figure 1　Two star graphs with node set $\{1,2,\ldots,80\}$.

注释1　如果连接网络 $\mathcal{G}(t)$ 被限制在一个给定的无向连通图集合 $\mathcal{S}$ 中取值, 以 $\lambda_{\mathcal{S}}$ 表示所有 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}\in\mathcal{S}$ 的最小非零特征值, 那么计算反馈增益公式 (15) 中的因子 $\frac{1}{4}N(N-1)$ 可用 $\frac{1}{\lambda_S}$ 代替.

注释2　引理 3 给出了可实现期望编队的构造公式, 但在这个公式中, 人们只能选择 $\bar{\gamma}_i$ 和 c_i, 不能直接选择 p_i. 在实际应用中, 人们更希望能以选定 p_i 的方式设计期望编队. 本注释讨论这一问题.

如果 $\mathrm{rank}(B)=n$, 人们可以任意选定 N 个有分段连续导函数的 p_i, 因为 $\mathrm{rank}(B,\dot{p}_i-Ap_i)=\mathrm{rank}(B)=n$, 从式 (13) 总可以解出 $\bar{\gamma}_i$, 根据引理 3, 这 N 个 p_i 组成的期望编队都是可实现的. 如果 B 是列满秩的且 $\mathrm{rank}(B)=r<n$, 为讨论方便, 进一步假设 B 的最后 r 行是线性无关的. 人们可以任意选定 p_i 的后 r 个分量. 这时从方程组

$$\dot{p}_i=Ap_i+B\bar{\gamma}_i \tag{42}$$

后 r 个线性方程可以解出 $\bar{\gamma}_i$ 的 r 个分量, 得出 $\bar{\gamma}_i$. 将 $\bar{\gamma}_i$ 和选定的 r 个分量代回式 (42) 的前 $n-r$ 个方程, 就得到关于 p_i 的前 $n-r$ 个分量的微分方程, 求解方程, 然后将解和前面选定的 r 个分量构成 p_i. 这样得到的 p_i 和 $\bar{\gamma}_i$ 满足式 (42). 由引理 3, 这样的 p_i 可以组成可实现的期望编队.

综上, 一般情况下, 人们不能完全做到按需要选定 p_i, 但能按需要任意选定其中的 $\mathrm{rank}(B)$ 的分量, 其余的 $n-\mathrm{rank}(B)$ 个分量要受选定分量的约束, 不能按需任意选定.

5　数值仿真

例 1　考虑 80 个智能体, 它们由如下 80 个线性系统描述:

$$\dot{x}_i=Ax_i+Bu_i,\ y_i=C\,x_i,\ 1\leqslant i\leqslant 80, \tag{43}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&-1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}.$$

可以验证, A 具有特征值 $1,i,-i$, (A,B) 是可控对, (A,C) 是可观对.

以 $\mathcal{S}=\{\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_{80}\}$ 表示以 $\{1,2,\ldots,80\}$ 为节点集的 80 个星形图组成的集合, 其中两个星形图在图 1 给出. 本例以序列 $\{(\mathcal{G}_{\sigma(k)},\tau_k)\}$ 描述系统 (43) 的时变连接网络, 其中 $(\mathcal{G}_{\sigma(k)},\tau_k)$ 表示第 k 次切换时, 第 $\sigma(k)$ 个星形图被激活且持续 τ_k 时长. 在本例, $\sigma(k)$ 在 $\{1,2,\ldots,80\}$ 中等可能任意取值. 当 k 为偶数时, τ_k 在区间 $(0.4,0.6)$ 等可能任意取值, 当 k 为奇数时, τ_k 在区间 $(0,0.2)$ 等可能任意取值. 这样设计的时变连接网络具有平均驻留时间 $\tau=0.2$.

选取

$$p_{i,j}^{(x)}=\frac{t^3}{1+8\,t^2}-\frac{(-1)^i(1+j)}{80}\left(3\cos\left(\frac{2\pi i}{5}+\frac{(j-1)^2\pi}{320}+t\right)+\sin\left(\frac{2\pi i}{5}+\frac{(j-1)^2\pi}{320}+t\right)\right),$$

$$p_{i,j}^{(y)}=\frac{(-1)^i(1+j)}{16}\cos\left(\frac{2\pi i}{5}+\frac{(j-1)^2\pi}{320}+t\right),$$

$$p_{i,j}^{(z)}=\frac{(-1)^i(1+j)\,t^2}{2+16\,t^2}\sin\left(\frac{2\pi i}{5}+\frac{(j-1)^2\pi}{320}+t\right),\ 1\leqslant i\leqslant 10,\ 1\leqslant j\leqslant 8.$$

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

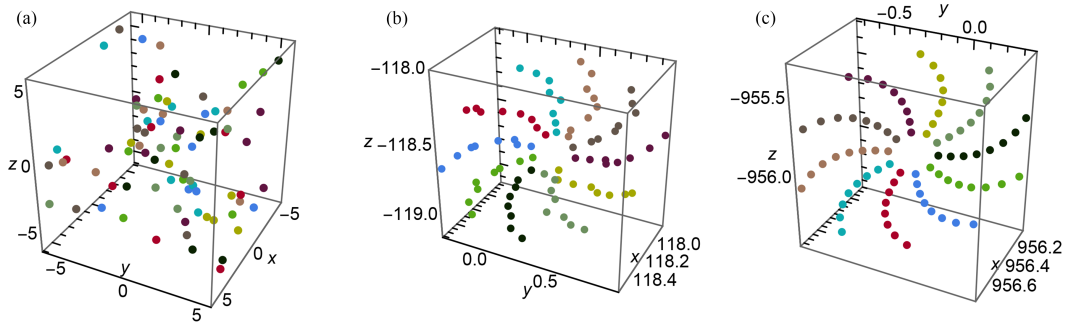


图 2　(网络版彩图) 80 个智能体在 **(a)** $t=0$, **(b)** $t=5.93$, **(c)** $t=8.02$ 三个时刻的位置.

Figure 2　(Color online) Locations of 80 agents at three time instants (a) $t=0$, (b) $t=5.93$, and (c) $t=8.02$.

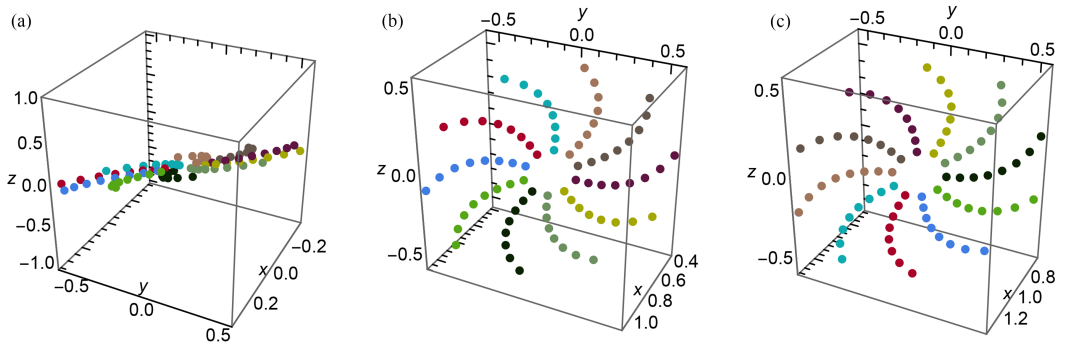


图 3　(网络版彩图) 期望编队 p 在 **(a)** $t=0$, **(b)** $t=5.93$, **(c)** $t=8.02$ 三个时刻的形状.

Figure 3　(Color online) Shapes of formation p at three time instants (a) $t=0$, (b) $t=5.93$, and (c) $t=8.02$.

令 $p_{i,j}=\left(p_{i,j}^{(x)},p_{i,j}^{(y)},p_{i,j}^{(z)}\right)$, 定义期望编队 $p=(p_{1,1}^{\mathrm{T}},\ldots,p_{1,8}^{\mathrm{T}},p_{2,1}^{\mathrm{T}},\ldots,p_{2,8}^{\mathrm{T}},p_{10,1}^{\mathrm{T}},\ldots,p_{10,8}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. 可以验证

$$\left\|(I_{nN}-\bar{B}\bar{B}^{+})(\dot{p}-I_N\otimes A\cdot p)\right\|<\sqrt{\frac{355}{32}}\frac{1}{1+8\,t^2}.$$

根据引理 2, p 是渐近相容的, 再根据定理 2, 可以设计基于观测器的控制协议使系统 (43) 实现 p.

时变连接网络的平均驻留时间 $\tau=0.2$. 任一阶数为 80 的星形图的拉普拉斯矩阵的特征值是 $0,1,80$, 其中 1 是 78 重根, 根据注释 1, 式 (15) 中的因子 $\frac{1}{4}N(N-1)$ 可用 1 代替. 还有式 (18) 中的 α 值也是保守的, 这里选取 $\alpha=0.5$. 计算反馈增益矩阵 K 的公式如下:

$$K=B^{\mathrm{T}}W^{-1}\left(\frac{0.2}{4},0.5\right)=B^{\mathrm{T}}\left(\int_0^{\frac{0.2}{4}}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{e}^{-At}BB^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-A^{\mathrm{T}}t}\mathrm{d}t\right)^{-1}.$$

补偿项 ν_i 由式 (19) 给出. 将 ν_i, K 代入式 (20) 即得到状态反馈控制协议. 选取观测器增益为 $L=(23,-15,-3)^{\mathrm{T}}$, 为每个智能体设计形如式 (37) 的状态观测器, 以观测器状态代替状态反馈协议中的系统状态就得到基于观测器的控制协议.

将所得控制协议作用于系统 (43), 然后为每个智能体和对应观测器分别在 $[-6,6]^3$ 和 $[-6,6]^3$ 内随机选取初值运行仿真, 运行时间共经历 30 次切换, 图 2 给出 80 个智能体在 $t=0,5.93,8.02$ 这 3 个时刻所处的位置. 为方便比较编队控制的效果, 图 3 画出了期望编队在相同 3 个时刻的形状. 比较图 2 和 3, 可以直观看到, 在 $t=5.93$, 智能体没形成指定的编队队形, 但在 $t=8.02$, 智能体形成编队队形. 再进一步量化分析仿真结果. 计算 $\max\{\|x_i(t)-x_j(t)-(p_i(t)-p_j(t))\|:1\leqslant i,j\leqslant 80\}$ 在 $t=5.93,8.02$ 的值, 分别得到结果 $0.18,0.004$. 这表明, 在 $t=8.02$, 80 个智能体构成的形状和期望编队的形状相差很小.

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

6　结语

期望编队在何种条件下是可实现的是多智能体编队控制研究的首要问题, 现有文献的可实现条件大多与协议设计关联. 本文基于如下观点研究线性多智能体系统期望编队的可实现性问题: 期望编队的可实现性是多智能体系统和期望编队的共有属性, 与使用何种协议无关. 通过建立期望编队的可实现性与时变线性方程组的相容性的联系, 本文定义了期望编队的渐近相容属性, 并证明了只要智能体动态和连接网络分别满足必要的条件, 具有渐近相容属性的期望编队都是可实现的. 本研究以矩阵理论为主要工具, 它在可实现期望编队的特征描述、协议设计和系统结构分析等方面起到关键作用. 最后, 值得指出的是, 本文期望编队的可实现性研究只针对无向连接网络, 尚有进一步向有向连接网络推广的改进空间.

参考文献

1 Ekanayake S W, Pathirana P N. Formations of robotic swarm: an artificial force based approach. Int J Adv Robotic Syst, 2010, 7: 173–190

2 Sun C Y, Mu C X. Important scientific problems of multi-agent deep reinforcement learning. Act Autom Sin, 2020, 46: 1301–1312 [孙长银, 穆朝絜. 多智能体深度强化学习的若干关键科学问题. 自动化学报, 2020, 46: 1301–1312]

3 Chen L, Cao M. Angle rigidity for multiagent formations in 3-D. IEEE Trans Autom Control, 2023, 68: 6130–6145

4 Oh K K, Park M C, Ahn H S. A survey of multi-agent formation control. Automatica, 2015, 53: 424–440

5 Shi P, Yan B. A survey on intelligent control for multiagent systems. IEEE Trans Syst Man Cybern Syst, 2020, 51: 161–175

6 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. IEEE Trans Autom Control, 2004, 49: 1520–1533

7 Lin Z, Wang L, Han Z, et al. Distributed formation control of multi-agent systems using complex Laplacian. IEEE Trans Autom Control, 2014, 59: 1765–1777

8 Lafferriere G, Williams A, Caughman J, et al. Decentralized control of vehicle formations. Syst Control Lett, 2005, 54: 899–910

9 Ma C, Zhang J. On formability of linear continuous-time multi-agent systems. J Syst Sci Complex, 2012, 25: 13–29

10 Ren W. Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations. IET Control Theor Appl, 2007, 1: 505–512

11 Dong X, Hu G. Time-varying formation control for general linear multi-agent systems with switching directed topologies. Automatica, 2016, 73: 47–55

12 Dong X, Xi J, Lu G, et al. Formation control for high-order linear time-invariant multiagent systems with time delays. IEEE Trans Control Netw Syst, 2014, 1: 232–240

13 Zhang Q, Guo H, Shi X. Formation control of high-order swarm systems with time-varying delays and switching interconnections. IEEE Access, 2020, 8: 28188–28196

14 Dong X, Hu G. Time-varying output formation for linear multiagent systems via dynamic output feedback control. IEEE Trans Control Netw Syst, 2015, 4: 236–245

15 Wang R, Dong X, Li Q, et al. Distributed time-varying output formation control for general linear multiagent systems with directed topology. IEEE Trans Control Netw Syst, 2018, 6: 609–620

16 Wang L, Xi J, Yuan M, et al. Guaranteed-performance time-varying formation control for swarm systems subjected to communication constraints. IEEE Access, 2018, 6: 45384–45393

17 Wang L, Zhang Q J, Chen H W. Optimal control method for swarm systems formation achievement problem with guaranteed-performance and switching topologies. Control Decis, 2023, 38: 3436–3444 [王琳, 张庆杰, 陈宏伟. 切换拓扑下群系统保性能编队形成问题优化控制方法. 控制与决策, 2023, 38: 3436–3444]

18 Chen Y Y, Tian Y P. Directed coordinated control for multi-agent formation motion on a set of given curves. Acta Autom Sin, 2009, 35: 1541–1549 [陈杨杨, 田玉平. 多智能体沿多条给定路径编队运动的有向协同控制. 自动化学报, 2009, 35: 1541–1549]

19 Pan Z, Sun Z, Deng H, et al. A multilayer graph for multiagent formation and trajectory tracking control based on MPC algorithm. IEEE Trans Cybern, 2022, 52: 13586–13597

20 Porfiri M, Roberson D G, Stilwell D J. Tracking and formation control of multiple autonomous agents: a two-level consensus approach. Automatica, 2007, 43: 1318–1328

21 Dong X, Hu G. Time-varying formation tracking for linear multiagent systems with multiple leaders. IEEE Trans

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

Autom Control, 2017, 62: 3658–3664
22 Han L, Xie Y, Li X, et al. Time-varying group formation tracking control for second-order multi-agent systems with communication delays and multiple leaders. J Franklin Inst, 2020, 357: 9761–9780
23 Tian L, Wang M Y, Zhao Q L, et al. Distributed time-varying group formation tracking for cluster systems under switching topologies. Sci Sin Inform, 2020, 50: 408–423 [田磊, 王蒙一, 赵启伦, 等. 拓扑切换的集群系统分布式分组时变编队跟踪控制. 中国科学: 信息科学, 2020, 50: 408–423]
24 Du X, Li W, Xiao J, et al. Time-varying group formation with adaptive control for second-order multi-agent systems. IEEE Access, 2022, 10: 45337–45346
25 Tian L, Dong X W, Zhao Q L, et al. Distributed adaptive time-varying output formation tracking for heterogeneous swarm systems. Act Autom Sin, 2021, 47: 2386–2401 [田磊, 董希旺, 赵启伦, 等. 异构集群系统分布式自适应输出时变编队跟踪控制. 自动化学报, 2021, 47: 2386–2401]
26 Wang L, Zhang Q J, Chen H W. Guaranteed-performance formation control of swarm systems based on leader-follower strategy. J Beijing Univ Aeronaut Astronaut, 2023, 50: 1037–1046 [王琳, 张庆杰, 陈宏伟. 基于领航者跟随者的群系统保性能编队控制. 北京航空航天大学学报, 2023, 50: 1037–1046]
27 Dong X, Shi Z, Lu G, et al. Formation-containment analysis and design for high-order linear time-invariant swarm systems. Intl J Robust Nonlinear, 2015, 25: 3439–3456
28 Gong X, Cui Y, Shen J, et al. Necessary and sufficient conditions of formation-containment control of high-order multiagent systems with observer-type protocols. IEEE Trans Cybern, 2020, 52: 7002–7016
29 Zuo S, Song Y, Lewis F L, et al. Time-varying output formation containment of general linear homogeneous and heterogeneous multiagent systems. IEEE Trans Control Netw Syst, 2018, 6: 537–548
30 Wang L B, Wang M Y, Zhou S Q, et al. Formation-containment tracking intelligent control for heterogeneous swarm systems under unknown input. Sci Sin Tech, 2023, 53: 291–306 [王林波, 王蒙一, 周思全, 等. 考虑未知输入的异构集群系统群体智能合围跟踪控制. 中国科学: 技术科学, 2023, 53: 291–306]
31 Yang J, Zhang H, Wang H, et al. Heterogeneous unmanned swarm formation containment control based on reinforcement learning. Aerospace Sci Tech, 2024, 150: 109186
32 Hespanha J P, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell-time. In: Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999. 2655–2660
33 Zhang X D. Matrix Analysis and Applications. Beijing: Tsinghua University Press, 2004 [张贤达. 矩阵分析与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004]
34 Mohar B. Eigenvalues, diameter, and mean distance in graphs. Graphs Combin, 1991, 7: 53–64
35 Rugh W J. Linear System Theory. New Jersey: Prentice-Hall, 1993
36 Wang X, Zhu J, Feng J. A new characteristic of switching topology and synchronization of linear multiagent systems. IEEE Trans Autom Control, 2019, 64: 2697–2711

附录 A　两个预备引理证明

A.1　引理 2 的证明

下面仅对 p 是指数渐近相容的这一情形给出证明.

必要性证明　如果 p 是指数渐近相容的, 时变系数的线性方程组 (11) 有指数渐近解, 所以存在一个时变函数 $\mu(t)\in\mathbb{R}^{mN}$ 使得

$$\|(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,\dot{p}-(\mathcal{L}(t)\otimes A)\,p-(\mathcal{L}(t)\otimes B)\,\mu(t)\|\leqslant D_1\mathrm{e}^{-bt},\tag{A1}$$

其中 $D_1>0, b>0$ 是适当实数. 引入记号

$$q=\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p-(I_N\otimes B)\,\mu(t),\tag{A2}$$

将式 (A1) 写成如下形式:

$$\|(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,q\|\leqslant D_1\mathrm{e}^{-bt}.\tag{A3}$$

以 μ_1 表示所有 N 阶连通图的拉普拉斯矩阵的最小非零特征值 (由引理 4, $\mu_1\geqslant\frac{4}{N(N-1)}$). 因为 $\mathcal{L}(t)\geqslant 0$ 是半正定矩阵, 所以 $\mu_1^{-1}\mathcal{L}^2(t)\geqslant\mathcal{L}(t)$, 于是

$$q^{\mathrm{T}}\,(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,q\leqslant\mu_1^{-1}\,q^{\mathrm{T}}\,(\mathcal{L}^2(t)\otimes I_n)\,q=\mu_1^{-1}\|(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,q\|^2\leqslant\mu_1^{-1}D_1^2\mathrm{e}^{-2bt}.\tag{A4}$$

将 q 划分成如下形式 $q=(q_1^{\mathrm{T}},\ldots,q_N{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $q_i\in\mathbb{R}^n$, $1\leqslant i\leqslant N$, 直接计算可得

$$q^{\mathrm{T}}\,(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,q=\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}(t)}(q_i-q_j)^{\mathrm{T}}(q_i-q_j)\leqslant\mu_1^{-1}D_1^2\mathrm{e}^{-2bt},\tag{A5}$$

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

这里 $\mathcal{E}(t)$ 是 $\mathcal{G}(t)$ 的边集合, 且 $\{i,j\}$ 和 $\{j,i\}$ 在求和时不同时出现. 由此对任意 $\{i,j\}\in\mathcal{E}(t)$, 都有 $\|q_i-q_j\|^2\leqslant\mu_1^{-1}D_1^2\mathrm{e}^{-2bt}$. 因为 $\mathcal{G}(t)$ 在任意时刻都是连通的, 所以对任意节点 i, 都有路径 (最多经过 $N-1$ 个节点) 将 i 连接到节点 1. 因此, 对任意 $1\leqslant i\leqslant N$ 都有 $\|q_i-q_1\|^2\leqslant(N-1)^2\mu_1^{-1}D_1^2\mathrm{e}^{-2bt}, 1\leqslant i\leqslant N$, 及

$$\|q-\mathbf{1}_N\otimes q_1\|^2\leqslant N(N-1)^2\mu_1^{-1}D_1^2\mathrm{e}^{-2bt}. \tag{A6}$$

根据式 (A2),

$$q-\mathbf{1}_N\otimes q_1=\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p-(I_N\otimes B)\,\mu(t)-\mathbf{1}_N\otimes q_1=\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p-\bar{B}\begin{pmatrix}\mu(t)\\ q_1\end{pmatrix}, \tag{A7}$$

其中 $\bar{B}=(I_N\otimes B,\ \mathbf{1}_N\otimes I_n)$. 考虑以 γ 为未知量的线性方程组 $\bar{B}\gamma=\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p$. 由 Moore-Penrose 广义逆性质, $\bar{B}^+(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)$ 是这个方程的最小二乘解, 所以由式 (A6) 和 (A7),

$$\begin{aligned}&\|\bar{B}\,\bar{B}^+(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)-\dot{p}+(I_N\otimes A)\,p\|^2\\ &\leqslant\left\|\bar{B}\begin{pmatrix}\mu(t)\\ q_1\end{pmatrix}-\dot{p}+(I_N\otimes A)\,p\right\|^2=\|q-\mathbf{1}_N\otimes q_1\|^2\leqslant N(N-1)^2\mu_1^{-1}D_1^2\mathrm{e}^{-2bt}.\end{aligned}$$

此即

$$\|(I_{nN}-\bar{B}\bar{B}^+)(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)\|\leqslant\sqrt{N\mu_1^{-1}}(N-1)D_1\mathrm{e}^{-bt}.$$

必要性得证.

充分性证明　将 $\bar{B}^+(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)$ 表示为 $\bar{B}^+(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)=(\mu^{\mathrm{T}},\gamma^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, 其中 $\mu\in\mathbb{R}^{mN},\gamma\in\mathbb{R}^n$, 再注意 $\bar{B}=(I_N\otimes B,\ \mathbf{1}_N\otimes I_n)$, 得到

$$(I-\bar{B}\bar{B}^+)(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)=\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p-(I_N\otimes B)\,\mu-\mathbf{1}_N\otimes\gamma.$$

于是, 由已知条件 (12), 有

$$\|(I-\bar{B}\bar{B}^+)(\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p)\|=\|\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p-(I_N\otimes B)\,\mu-\mathbf{1}_N\otimes\gamma\|\leqslant C_0\mathrm{e}^{-ct}.$$

引入式 (A2) 中的记号 q, 将上式重写成 $\|q-\mathbf{1}_N\otimes\gamma\|\leqslant C_0\mathrm{e}^{-ct}$. 再如必要性证明中那样将 q 划分表示为 $q=(q_1^{\mathrm{T}},\ldots,q_N{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. 于是, 对任意 $1\leqslant i,j\leqslant N$ 都有 $\|q_i-q_j\|\leqslant\|q_i-\gamma\|+\|q_j-\gamma\|\leqslant 2C_0\mathrm{e}^{-ct}$.

因为 N 阶无向连通图最多有 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个边, 由此

$$q^{\mathrm{T}}\,(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,q=\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}(t)}(q_i-q_j)^{\mathrm{T}}(q_i-q_j)\leqslant 2N(N-1)C_0^2\mathrm{e}^{-2ct}. \tag{A8}$$

以 μ_2 表示所有 N 阶无向连通图的拉普拉斯矩阵的最大特征值 (由 Gerschgorin 圆盘定理, $\mu_2\leqslant 2(N-1)$), 则有 $\mu_2\mathcal{L}(t)\geqslant\mathcal{L}^2(t)$, 于是

$$\|(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,q\|^2=q^{\mathrm{T}}\,(\mathcal{L}^2(t)\otimes I_n)\,q\leqslant\mu_2\,q^{\mathrm{T}}\,(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,q\leqslant 2\mu_2N(N-1)C_0^2\mathrm{e}^{-2ct}.$$

将 $q=\dot{p}-(I_N\otimes A)\,p-(I_N\otimes B)\,\mu(t)$ 代入上式, 得到

$$\|(\mathcal{L}(t)\otimes B)\,\mu-(\mathcal{L}(t)\otimes I_n)\,\dot{p}+(\mathcal{L}(t)\otimes A)\,p\|\leqslant\sqrt{2\mu_2N(N-1)}C_0\mathrm{e}^{-ct}.$$

这说明方程组 (11) 有指数渐近解 μ, 所以期望编队 p 是指数渐近相容的.

A.2　引理 6 的证明

下面只对当 $t\to\infty$ 时, $q(t)$ 指数趋于 0 这一情形给出证明.

证明 在区间 $[t_k,t_{k+1})$ 上求解方程 (17) 得到

$$z(t)=\Xi_k(t-t_k)z(t_k)+\eta_k(t),\ t_k\leqslant t<t_{k+1}, \tag{A9}$$

其中

$$\Xi_k(t-t_k)=\mathrm{e}^{M_k(t-t_k)},\ \eta_k(t)=\int_{t_k}^{t}\mathrm{e}^{M_k(t-\lambda)}H_kq(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

根据解的连续性, 当 $t\to t_{k+1}$ 时可得 $z(t_{k+1})=\Xi_k(\tau_k)z(t_k)+\eta_k(t_{k+1})$, 其中 $\tau_k=t_{k+1}-t_k$. 利用它递归计算 $z(t_k)$ 得到

$$\begin{aligned}z(t_k)=&\,\Xi_{k-1}(\tau_{k-1})\Xi_{k-2}(\tau_{k-2})\cdots\Xi_0(\tau_0)z_0\\ &+\Xi_{k-1}(\tau_{k-1})\cdots\Xi_1(\tau_1)\eta_0(t_1)+\cdots+\Xi_{k-1}(\tau_{k-1})\eta_{k-2}(t_{k-1})+\eta_{k-1}(t_k),\end{aligned} \tag{A10}$$

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077

其中 $z_0 = z(0)$ 是初值. 根据引理条件 1 得到 $\|\Xi_k(\tau_k)\| \leqslant \mathrm{e}^{\alpha\tau}\mathrm{e}^{-2\alpha\tau_k}$, 由此推出

$$\|\Xi_{k-1}(\tau_{k-1})\cdots\Xi_i(\tau_i)\| \leqslant \mathrm{e}^{(k-i)\alpha\tau}\mathrm{e}^{-2\alpha(t_k-t_i)}. \tag{A11}$$

根据引理假设, $0 = t_0 < t_1 < \cdots$ 是 $\mathcal{G}(t)$ 的切换时刻且 $\mathcal{G}(t)$ 具有平均驻留时间 $\tau > 0$, 故存在 $\kappa > 0$ 使 $N_\sigma(t_k, t_i) = k - i \leqslant \kappa + \frac{1}{\tau}(t_k - t_i)$, 所以 $(k-i)\tau\alpha \leqslant \kappa\tau\alpha + \alpha(t_k - t_i)$. 将此不等式代入式 (A11) 便有

$$\|\Xi_{k-1}(\tau_{k-1})\cdots\Xi_i(\tau_i)\| \leqslant C_1\mathrm{e}^{-\alpha(t_k-t_i)}, \tag{A12}$$

其中 $C_1 = \mathrm{e}^{\kappa\tau\alpha}$. 因为当 $t \to \infty$ 时, $q(t)$ 指数趋于 0, 所以存在 $C_2 > 0, \beta > 0$ 使得

$$\|q(t)\| \leqslant C_2\mathrm{e}^{-2\beta t},\ t \geqslant 0. \tag{A13}$$

经计算可验证, 对 $\alpha > 0, \beta > 0, t \geqslant 0$, 存在依赖 α, β 的 $C(\alpha, \beta)$ 和 $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$, 使下式成立:

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-2\alpha(t-\lambda)}\mathrm{e}^{-2\beta\lambda}\mathrm{d}\lambda \leqslant C(\alpha,\beta)\,\mathrm{e}^{-\gamma t},\ t \geqslant t_k. \tag{A14}$$

利用引理条件 1 和 2 及式 (A13) 估计 $\|\eta_k(t)\|$, 由式 (A14) 得出

$$\|\eta_k(t)\| \leqslant \int_{t_k}^t \|\mathrm{e}^{M_k(t-\lambda)}\|\|H_k\|\|q(\lambda)\|\mathrm{d}\lambda \leqslant \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha\tau}\mathrm{e}^{-2\alpha(t-\lambda)}C_2\mathrm{e}^{-2\beta\lambda}\mathrm{d}\lambda \leqslant C_3\mathrm{e}^{-\gamma t}, \tag{A15}$$

其中 $C_3 = C_2\mathrm{e}^{\alpha\tau}C(\alpha,\beta)$. 在式 (A10) 两端同时取范数并利用式 (A12) 和 (A15) 可以得到

$$\begin{aligned}\|z(t_k)\| &\leqslant C_1\mathrm{e}^{-\alpha t_k}\|z_0\| + C_1\mathrm{e}^{-\alpha(t_k-t_1)}C_3\mathrm{e}^{-\gamma t_1} + \cdots + C_1\mathrm{e}^{-\alpha(t_k-t_{k-1})}C_3\mathrm{e}^{-\gamma t_{k-1}} + C_3\mathrm{e}^{-\gamma t_k}\\ &\leqslant \big(C_1\|z_0\| + (k-1)C_1C_3 + C_3\big)\mathrm{e}^{-\gamma t_k}.\end{aligned}$$

回到式 (A9) 估计 $\|z(t)\|$ 便有

$$\|z(t)\| \leqslant \|\eta_k(t)\| + \|\Xi_k(t-t_k)\|\|z(t_k)\| \leqslant \big[C_3 + \mathrm{e}^{\alpha\tau}\big(C_1\|z_0\| + (k-1)C_1C_3 + C_3\big)\big]\mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

因为 $\mathcal{G}(t)$ 具有平均驻留时间 τ, 所以 $k + 1 = N_\sigma(t, 0) \leqslant \kappa + \frac{t}{\tau}$, 将 $k \leqslant \kappa + \frac{t}{\tau} - 1$ 代入上面不等式便可推出, 当 $t \to \infty$ 时, $\|z(t)\|$ 指数收敛到 0.

Achievability problem for desired formations of linear multi-agent systems

Xingping WANG[1*], Jiandong ZHU[2], Dianwei CHI[1], Tiantian HUANG[1] & Jun-E FENG[3]

1. *College of Artificial Intelligence, Yantai Institute of Technology, Yantai 264005, China*
2. *School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China*
3. *School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China*
* Corresponding author. E-mail: wangxingping@yitsd.edu.cn

Abstract A fundamental problem in formation control is under what conditions one can design protocols for a multi-agent system to achieve desired formations. By examining the property of a class of formations that are exactly achieved in a linear multi-agent system, an interesting fact is observed that there is a connection between the achievability of desired formations and the consistency of time-varying linear equations. From the asymptotic consistency of time-varying linear equations, we propose the asymptotic consistency concept for desired formations and study its properties using the Moore-Penrose generalized inverse. With this concept, a result on achievability of desired formations is presented for linear multi-agent systems: all asymptotically consistent formations are achievable as long as the agent dynamics and communication network satisfy the controllability and connectivity conditions, respectively. We design state feedback protocols for asymptotically consistent formations using the weighted controllability Gramian and the Moore-Penrose generalized inverse. If further, the agent dynamics are observable, the observer-based protocols can be designed by the separation principle. Finally, a simulation example is given to illustrate the obtained results.

Keywords linear multi-agent systems, formation control, achievability of desired formations, asymptotical consistency, protocol design

https://www.sciengine.com/doi/10.1360/SSI-2024-0077