



多智能体系统分布式优化综述与前瞻

姜霞¹, 曾宪琳², 孙健^{2,3*}, 陈杰^{2,4}

1. 香港城市大学机械工程学院, 香港 999077

2. 北京理工大学自主智能无人系统全国重点实验室, 北京 100081

3. 北京理工大学重庆创新中心, 重庆 401120

4. 哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

* 通信作者. E-mail: sunjian@bit.edu.cn

收稿日期: 2025-07-28; 修回日期: 2025-08-25; 接受日期: 2025-10-14; 网络出版日期: 2025-11-25

国家自然科学基金重大项目 (批准号: 62495090, 62495095) 资助

摘要 随着多智能体系统研究的深入和实际应用需求的增长, 分布式优化近年来受到了学术界和工业界的广泛关注, 如何提升算法的效率成为该领域的核心挑战. 本文旨在对多智能体系统分布式优化算法进行综述. 首先, 本文介绍了该领域的研究背景、基本定义与核心问题模型; 在此基础上, 系统梳理了典型的分布式优化算法; 进而, 聚焦非理想通信网络和非确定性代价函数两个维度, 探讨了当前算法设计的核心思路、瓶颈问题与改进策略; 最后, 阐述了分布式优化在无人系统、工业物联网和智能电网领域的应用实例, 并分析其独特价值. 本文通过对现有的研究成果进行归纳与梳理, 旨在为相关领域的研究人员提供有价值的参考, 并对未来的研究方向进行了展望.

关键词 分布式优化, 多智能体系统, 非理想通信网络, 非确定性代价函数, 算法设计

1 引言

从无人机编队协同追踪目标, 到移动机器人集群协作搬运重物, 再到覆盖广阔区域的传感器网络进行环境监测, 现代工业中涌现出越来越多依赖多个智能节点协同作业的复杂系统. 这些由具备一定的传感、计算、执行和通信能力的智能个体组成, 并通过网络互相关联的系统, 统称为多智能体系统. 近些年来, 随着网络通信技术的飞速发展和数据规模的急剧膨胀, 多智能体系统的重要性日益凸显, 并引发了学术界与工业界的广泛关注. 在此类系统中, 分布式优化扮演着核心角色, 它使智能体能够仅通过与邻居交互和局部行为, 实现全局优化, 完成单体无法完成的复杂任务, 拓展任务处理的维度和能力. 相比于将所有数据汇集到中心节点处理的传统集中式优化, 分布式优化能有效避免通信拥堵和中心计算负担过重的问题, 因此在资源调度^[1]、复杂环境监测^[2]、编队跟踪^[3]、覆盖和定位^[4]等任务中具有显著优势. 以传感器网络为例^[4,5], 每个传感器节点需利用自身的局部测量数据, 并与其他节点进行信息交互, 合作实现对未知参数的估计或对未知目标的定位. 由于大规模多智能体系统中的任务信

引用格式: 姜霞, 曾宪琳, 孙健, 等. 多智能体系统分布式优化综述与前瞻. 中国科学: 信息科学, 2025, 55: 2965–2990, doi: 10.1360/SSI-2025-0337

Jiang X, Zeng X L, Sun J, et al. Survey and prospects of distributed optimization in multi-agent systems. Sci Sin Inform, 2025, 55: 2965–2990, doi: 10.1360/SSI-2025-0337

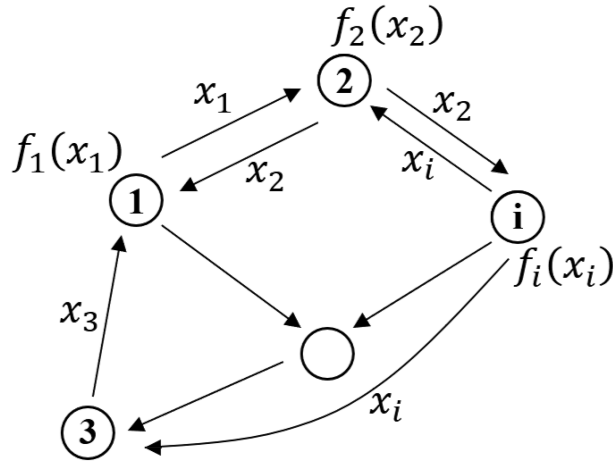


图 1 分布式优化示意图.

Figure 1 Distributed optimization diagram.

息通常是天然分散的,且涉及隐私和安全问题,传统的集中式优化方法往往难以满足协同作业的需求.因此,如何利用网络通信和本地局部信息,设计高效的分布式优化算法以求解多智能体系统中的复杂优化问题,已成为当前重要的研究方向.

多智能系统分布式优化问题的全局目标函数通常是多个节点的局部目标函数之和,且节点的决策可能因全局约束而相互耦合.因此,设计分布式优化方法时,必须同时兼顾局部信息与全局约束.传统的集中式优化算法依赖于一个中心节点.该节点需收集所有子节点的局部信息,进行统一优化决策,再将结果反馈给各子节点.这种模式存在两大弊端,一方面,每个子节点都需要与中心节点进行双向通信,通信负担沉重;另一方面,中心节点需要处理大规模数据,对计算能力要求极高.分散式优化算法在一定程度上缓解了上述问题,它允许部分数据在子节点进行初步的局部处理,但最终仍需要中心节点进行数据融合和结果反馈,并未完全摆脱中心化的架构.相比之下,分布式优化算法则完全无需中心节点,如图 1 所示.每个节点仅在本地存储和处理其局部数据信息,显著降低了单个节点的计算和存储压力.同时,每个节点通过和网络中的邻居节点进行通信,协作完成全局目标函数的优化.这种方法不仅能充分利用所有智能体的计算和存储资源,避免了通信拥堵,对网络拓扑要求更低,还具有更好的可扩展性、鲁棒性以及灵活性^[6,7].此外,分布式优化算法还能有效满足系统对数据隐私和安全的需求,这也是其在现代多智能体系统中广泛应用的重要原因.

经过数十年的发展,多智能体系统分布式优化问题研究无论在理论层面还是实际应用中都取得了长足的发展.研究人员针对分布式优化的不同模型要素和研究框架,提出了多种分布式优化算法.目前,大多数分布式算法都基于共识机制,并根据优化变量的迭代方式,可大致分为离散时间算法和连续时间算法.在节点位置配置、网络拓扑优化、资源能量分配等应用场景中,离散时间优化算法因其能够利用高性能计算平台实现快速高效迭代求解,受到了广泛关注.然而,在一些变量状态连续变化的系统任务中,例如多运动体的最优编队或位置姿态控制等问题^[8],离散算法无法保持变量值的连续性.在这种情况下,可通过搭建模拟电路实现低成本、低功耗的连续时间求解器,以满足实际需求.近年来,随着计算机技术的飞速发展,各类分布式离散时间优化算法迅速涌现.本文将主要聚焦于离散时间分布式优化方法的研究与梳理,而对连续时间算法仅作简要讨论,不作详细分类介绍.

现有综述文章^[9]主要从原始-对偶视角对经典分布式优化算法进行了分类,并重点介绍了国内学者的相关研究工作,但针对新兴技术的研究介绍相对不足.文献^[7]总结了近年来分布式协同优化研究中的若干前沿研究方向,包括分布式加速优化、分布式非凸优化和分布式无梯度优化算法.针对特定的多飞行器 and 无人系统,文献^[10,11]对多机器人分布式协同优化的发展现状及技术需求进行了

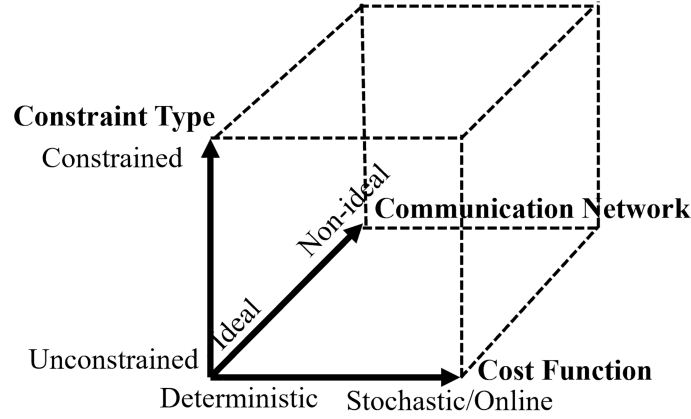


图2 分布式优化问题模型的三个维度.

Figure 2 Three dimensions of the distributed optimization problem model.

深入分析. 然而, 上述综述工作并未从通信网络与非确定性优化任务这两个核心维度, 对分布式优化领域进行系统梳理和归纳. 因此, 本文将从以下 3 个维度对相关研究进行分类与总结. (1) 分布式优化问题模型与典型算法. 根据问题的约束类型, 可分为无约束分布式优化问题、不等式约束分布式优化问题和集合约束分布式优化问题. 针对不同的问题模型, 分类介绍典型的优化算法和性能分析. (2) 非理想通信网络. 分布式优化算法高度依赖智能体间的通信交互, 网络拓扑结构的复杂切换、通信链路存在攻击风险、带宽受限等非理想因素都对算法的高效实现提出了更高要求, 因此本部分将重点梳理该方向的研究进展. (3) 非确定性代价函数. 实际工程问题中数据参数往往存在不确定性, 主要包括数据概率分布型不确定性和无统计假设的数据序列型不确定性, 如何在不确定环境下实现高效的分布式优化是推动工程应用的关键环节. 需要指出的是, 这 3 个维度并非相互独立, 而是紧密关联、相互影响的. 最后, 本文还将对分布式优化未来的研究方向进行展望.

2 分布式优化问题模型

分布式优化问题的建模通常涉及 3 个核心要素: 代价函数、约束条件和通信网络. 代价函数可以是确定性的、随机的或者在线更新的; 约束条件包括一致性约束、不等式约束以及集合约束等多种类型; 而通信网络则决定了智能体间信息交换的结构与效率, 包括通信拓扑和链路可靠性等因素. 这些维度上不同元素的组合, 共同构成了多智能体系统中复杂多样的分布式优化模型, 如图 2 所示. 一个具体的分布式优化问题, 例如“在时变通信网络下求解一个带不等式约束的随机优化问题”, 就可以被定位到这个三维空间中远离原点的特定区域. 通常, 问题模型离原点越远 (即组合了随机、有约束、非理想网络等特性), 其问题难度和算法设计的复杂度也越高. 为便于系统梳理, 本节首先介绍分布式优化的基础数学框架, 并按照约束类型对典型的分布式优化问题模型进行分类, 为后续算法设计和理论分析奠定基础. 关于代价函数和通信网络的详细研究, 将在后续的第 4 和 5 节展开讨论.

考虑一个由 m 个智能体构成的多智能体系统. 智能体之间的通信连接关系由拓扑图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, A\}$ 描述. 符号 $\mathcal{V} = \{1, \dots, m\}$ 表示非空的智能体集合, $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示节点之间的边集, $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是描述多智能体网络连接的非负邻接矩阵. 如果存在 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 则 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$. 对于无向图, 其邻接矩阵 A 为对称阵, 且对任意 $i \in \mathcal{V}$, 有 $\sum_{j \in \mathcal{V}} a_{ij} = \sum_{j \in \mathcal{V}} a_{ji}$. 所有满足 $a_{ij} > 0$ 的节点 j 构成智能体 i 的邻居集合 $\mathcal{N}_i = \{j : a_{ij} > 0\}$, 表明节点 i 和 j 之间可以相互传递信息. 从节点 j 到节点 i 的无向路径由一系列不同的节点对 $(j, j_1), \dots, (i_k, i)$ 构成. 如果网络中的任意两个节点之间都存在一条无向路径, 则该无向多智能体网络为连通网络. 在无特殊说明情况下, 本节所讨论的通信拓扑都指代无向连通图.

本文聚焦于多智能体系统中的分布式有限和优化问题,即系统的全局目标函数 $f(x)$ 是所有智能体局部目标函数 $f_i(x)$ 的总和,具体表达为

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x), \quad (1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是全局优化决策变量, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 函数是节点 i 所有的局部确定性代价函数. 由于局部目标函数 f_i 仅在各自节点本地可用,节点 i 需对全局优化变量 x 进行本地估计,记为 x_i . 在协同求解全局最优解的过程中,智能体通过节点之间的网络边交换本地估计信息(如 x_i),而无需直接共享私有的目标函数 f_i ,既保护了本地隐私,又实现了分布式协作优化.

在分布式优化问题中,通常不仅要求最小化或最大化全局目标,还需保证网络中各节点对决策变量的估计达成一致(即 $x_i = x_j$,称为共识/一致性约束).然而,在如分布式资源分配等非共识优化问题中,局部估计优化变量之间往往存在复杂的耦合约束.此外,实践应用中的多智能体系统任务通常还受制于各种现实约束.按照约束类型的不同,可以将问题分为不等式/等式约束和集合约束.集合约束既可以是全局统一,也可以是多个局部集合的交集;不等式约束则可为线性、非线性、凸或非凸等多种形式.综上,本节对以下3类典型分布式优化问题进行分类介绍:(1)无约束分布式优化问题;(2)不等式约束分布式优化问题;(3)集合约束分布式优化问题.

(1)无约束分布式优化问题.在大多数分布式一致性优化问题中,为了使节点的本地估计变量达到一致,通常会引入本地估计变量构成的等式约束.与问题(1)相对应的无约束分布式优化问题可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \\ \text{s.t.} \quad & x_i = x_j, \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j. \end{aligned} \quad (2)$$

需要注意的是,虽然式(1)的最优解可能不唯一,但所有节点都需要找到相同的最优解.在分布式优化框架下,每个节点的局部目标函数信息无法被直接共享或通信,且局部代价最优并不等价于全局代价最优.因此,核心任务是要在保证所有局部估计变量一致的前提下,对总体目标函数进行优化.优化问题(2)在分布式优化研究中具有重要的基础地位,许多有约束的分布式优化问题可以通过罚函数等方法,被转化为无约束分布式优化形式进行求解.

(2)不等式约束分布式优化问题.在现实应用中,决策变量常受到物理或者信息条件的限制,使得优化问题通常带有等式或者不等式约束.因此,带约束的分布式优化问题也受到了广泛关注.当系统中的节点可知问题的全部约束函数时,其分布式优化问题模型如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_s(x) \leq 0, s = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $g_s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为网络中所有节点可获得的全局不等式函数约束.当不同节点的本地估计优化变量之间存在耦合关系,或者约束函数之间存在关联,多智能体系统的分布式优化问题模型可表述为

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m g_i(x_i) \leq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $x = \text{col}(x_i)_{i=1}^m$. 具有等式约束的典型资源分配问题就是问题(4)的特殊情况.

(3) 集合约束分布式优化问题. 在某些带约束的分布式优化问题中, 不等式或等式约束可以构成封闭的可行解集合, 智能体的优化变量必须在该集合内求解. 特别是在一些特定任务中, 由于资源受限或者存在障碍物等因素, 优化变量通常需要满足一些凸集合的约束条件. 例如, 在环境监测的多传感器网络中^[5], 每个传感器的探测范围有限, 所求解的物体位置信息必须处于由探测范围所设定的集合约束内. 因此, 需要考虑如下的集合约束分布式优化问题:

$$\min f(x), f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

其中, 每个节点具有局部目标函数 f_i 和相同的约束集合 Ω . 在多节点避障环境下的路径规划问题中, 由于每个节点的通信和可见半径有限, 个体存在局部凸集合约束, 即需要满足约束 $x \in \cap_{i=1}^m \Omega_i$, 其中 Ω_i 为智能体 i 的局部凸集合约束, 这类优化问题又称凸交问题.

优化问题 (3) 和 (5) 属于分布式优化问题不同的建模方式, 两者之间存在紧密的关联. 式 (3) 采用的是不等式约束的形式, 即通过一组函数 $g_s(x) \leq 0$ 对决策变量加以限制. 这种约束通常用于对变量之间的关系、资源消耗、任务完成等有明确阈值或限制的场景. 而式 (5) 则是集合约束的形式, 即将所有可行解 x 限定在某个集合 Ω 内. 这种建模方式更加灵活, 可以涵盖等式约束、不等式约束甚至更复杂的约束形式. 例如, Ω 可以是简单的线性约束、凸集, 也可以是非凸集, 甚至可以包含整数约束、逻辑关系等. 实际上, 式 (3) 的不等式约束可以通过集合约束的方式表示: 令 $\Omega = \{x \mid g_s(x) \leq 0, \forall s = 1, \dots, p\}$, 则式 (5) 就等价于式 (3) 的问题. 因此, 集合约束是一种更为一般化的建模方式, 能够统一表述线性/非线性、不等式/等式等多种约束情形. 在适用场景上, 式 (3) 适用于约束关系明确且便于单独处理的情形, 如分布式资源分配、容量约束等. 而式 (5) 的集合约束形式更适合处理几何限制或难以分解的约束, 比如可行域受物理、通信、逻辑等多重规则共同限定的智能体协作优化问题. 在实际算法设计中, 当集合 Ω 具备特殊结构 (如凸集、可分解结构、投影易计算等) 时, 可以高效设计投影类或无投影类算法, 如投影梯度法、条件梯度方法等.

在一些复杂应用任务中, 智能体节点需要同时满足集合约束和不等式函数约束. 包含多种集合和不等式约束的分布式优化问题形式如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \cap_{i=1}^m \Omega_i, g(x) \leq 0. \end{aligned}$$

这里, 不等式约束可以是智能体本地的局部约束函数, 也可以是存在耦合关联的约束函数.

在分布式优化问题模型中, 目标函数和约束函数的具体特性通常由应用场景决定, 并直接影响不同算法的收敛性能和适用范围. 依据函数的光滑性, 目标函数可分为光滑函数和非光滑函数; 依据其凹凸性, 可分为凸函数、严格凸函数、强凸函数以及非凸函数; 而依据函数信息是否随时间变化, 又可区分为时变函数和时不变函数. 值得注意的是, 实际问题的代价函数常常是多种类型特性的组合, 例如经典的逻辑回归问题, 其目标函数就同时包含了光滑的凸函数部分和非光滑的 L_1 正则项.

3 典型分布式优化算法

本节将根据分布式优化问题的约束类型 (无约束、不等式约束和集合约束), 对现有的典型分布式优化算法进行分类介绍. 此外, 根据算法在迭代过程中所利用的函数信息, 分布式优化算法可分为一阶梯度法、二阶梯度法和零阶梯度法. 其中, 一阶梯度法利用目标函数的一阶梯度信息进行变量迭代. 由于一阶梯度的计算成本较低且易于实现分布式结构, 备受研究者的青睐, 相关研究也最为丰富. 大量文献集中在分布式一阶优化算法的设计及其收敛分析上. 鉴于分布式一阶梯度算法的灵活性和计算效率, 本节将重点介绍这一类算法的研究工作.

3.1 无约束分布式优化算法

针对目标问题为凸光滑函数的无约束优化问题 (2), 现有的分布式算法理论主要可分为两大类: 基于平均共识 (average-consensus-based) 和基于梯度跟踪 (gradient-tracking-based) 的分布式算法. 在固定网络拓扑下, 经典的基于平均共识的分布式梯度下降 (DGD) 算法如下:

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j(k) - \alpha_i(k) \nabla f_i(x_i(k)), \quad (6)$$

其中, a_{ij} 是时不变网络的邻接矩阵元素, $\alpha_i(k)$ 是衰减步长. 这种算法的设计思路是: 首先进行邻居间的通信协同, 然后进行梯度下降以优化本地目标函数. 另一种类似的设计是先进行本地梯度下降, 再进行邻居间的共识通信. 这两种经典方法都需要使用衰减步长, 以确保本地变量能够收敛到问题的精确解. 然而, 随着迭代次数的增加, 衰减步长会趋于零, 从而导致算法收敛性能退化. 为了加快收敛速度, 许多后续研究通过利用历史信息, 设计了使用固定步长的分布式算法, 其中典型代表包括 EXTRA^[12], PG-EXTRA^[13] 以及 EXTRA 的推广方法^[14].

为了进一步改善算法的收敛性, 在切换网络拓扑下, 另一种分布式算法设计思路是利用梯度跟踪技术. 该技术使得本地函数的梯度逐渐逼近全局函数的梯度, 从而实现变量估计的一致和全局代价函数的优化^[15~17]. 该类算法可以使用固定更新步长, 在切换网络和有向网络下实现全局凸优化问题的精确求解. 典型的分布式算法设计如下:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \sum_{j=1}^m a_{ij}(k) x_j(k) - \alpha y_i(k), \\ y_i(k+1) &= \sum_{j=1}^m a_{ij}(k) y_j(k) + \nabla f_i(x_i(k+1)) - \nabla f_i(x_i(k)), \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $a_{ij}(k)$ 是 k 时刻的邻接矩阵元素, 更新步长 α 为固定值, y_i 是梯度跟踪变量, 来跟踪局部函数梯度的均值. 该算法设计能够以指数收敛速度收敛到强凸优化的精确解, 具有比平均共识方法更优秀的收敛性能. 当式 (7) 中采用先进行梯度下降优化, 再进行邻居通信的策略时, 固定更新步长 α 在不同智能体之间无需保持一致, 并且这种设计可以加速算法的收敛^[17]. 针对更一般的有向切换网络拓扑, 文献 [15] 利用 push-sum 协议, 将式 (7) 推广到非双随机网络邻接矩阵的场景, 并在一定假设条件下给出了算法的线性收敛分析.

另一种常用的分布式算法设计是交替方向乘子法 (ADMM), 其能够将复杂问题分解为更简单的子问题. 针对本地变量需达成一致的分布式优化问题, 一致性 ADMM (consensus ADMM) 被提出, 其结合了对偶分解和增广拉格朗日方法的优势. 对于无约束分布式优化问题 (2), 给定惩罚参数 $\rho > 0$, 该问题对应的增广拉格朗日函数如下:

$$L_\rho(x_i, x_{-i}, \lambda_{ij}) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \left(\lambda_{ij}^\top (x_i - x_j) + \frac{\rho}{2} \|x_i - x_j\|^2 \right),$$

其中 x_{-i} 代表除了智能体 i 以外, 其他智能体的变量. 智能体 i 的本地增广拉格朗日函数进一步可写为

$$L_\rho(x_i, x_{-i}, \lambda_i) = f_i(x_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{ij}^\top (x_i - x_j) + \frac{\rho}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|x_i - x_j\|^2,$$

其中, $\mathcal{N}_i$ 是智能体 i 的邻居集合, λ_{ij} 是和一致性约束 $x_i = x_j$ 对应的对偶变量. 我们可以通过组合与智能体 i 相关的所有项来简化这个拉格朗日函数, 简化后的增广拉格朗日函数如下:

$$L_\rho(x_i, x_{-i}, \lambda_i) = f_i(x_i) + \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{ij} - \rho \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x_j \right)^\top x_i + \frac{\rho}{2} \|x_i\|^2.$$

在一致性 ADMM 算法中, 智能体 i 每次迭代通过固定其他变量, 最小化 L_ρ 函数来更新其原始变量 x_i , 然后使用梯度上升法更新对偶变量 λ_{ij} , 更新步骤如下:

$$x_i(k+1) = \arg \min_{x_i} \left(f_i(x_i) + \lambda_i(k)^\top x_i + \rho \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left\| x_i - \frac{x_i(k) + x_j(k)}{2} \right\|^2 \right), \quad (8)$$

$$\lambda_i(k+1) = \lambda_i(k) + \rho \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_i(k+1) - x_j(k+1)), \quad (9)$$

原始变量更新 (8) 最小化局部目标函数 $f_i(x_i)$, 同时通过二次惩罚项强制与邻居智能体之间达成一致, 并考虑对偶变量 λ_{ij} 的影响. 对偶变量更新 (9) 根据邻居智能体当前状态的差异来调整拉格朗日乘子. 尽管每次迭代都需要求解一个子优化问题 (8), 但当子问题具有封闭解或易于求解时, ADMM 算法往往具有更优秀的实际应用性能.

3.2 不等式约束分布式优化算法

针对带有函数约束的分布式优化问题, 文献 [18~20] 等基于拉格朗日函数, 通过设计分布式鞍点寻找算法来求解. 针对问题 (3), 其对应的拉格朗日函数 $L: \Omega \times \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= \sum_{i=1}^m f_i(x) + \lambda^\top g(x) \\ &= \sum_{i=1}^m L^i(x, \lambda), \end{aligned}$$

其中, $\mathbb{R}_+^p = \{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \lambda_s \geq 0, s = 1, \dots, p\}$, $g(x) = [g_1(x), \dots, g_p(x)]^\top$, $L^i(x, \lambda) = f_i(x) + \lambda^\top g(x)$. 拉格朗日对偶函数 $h: \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为关于 x 的拉格朗日函数最小值, 即 $h(\lambda) = \inf_{x \in \Omega} L(x, \lambda)$. 优化问题对应的拉格朗日对偶问题如下:

$$\max h(\lambda), \quad \text{s.t. } \lambda \in \mathbb{R}_+^p.$$

当标准斯莱特 (Slater's) 约束条件假设满足时, 原始最优解和对偶最优解可以表征为拉格朗日函数的鞍点, 并且有 $L(x^*, \lambda^*) = f^*$, 其中 (x^*, λ^*) 是拉格朗日函数的鞍点, 也是原始和对偶的最优解, f^* 为优化问题的最优函数值. 因此, 原优化问题可被转化为求解如下的极大极小鞍点问题:

$$\min_{x \in \Omega} \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^p} L(x, \lambda). \quad (10)$$

基于拉格朗日函数鞍点的性质, 可以推导出分布式拉格朗日原始-对偶次梯度算法如下:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(k) &= \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j(k), \\ \bar{\lambda}_i(k) &= \sum_{j=1}^m a_{ij} \lambda_j(k), \\ x_i(k+1) &= P_\Omega(\bar{x}_i(k) - \alpha_k \nabla_x L_i(\bar{x}_i(k), \lambda_i(k))), \\ \lambda_i(k+1) &= P_\Lambda(\bar{\lambda}_i(k) + \alpha_k \nabla_\lambda L_i(x_i(k), \bar{\lambda}_i(k))), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 Λ 为包含对偶解的紧集. 在原始-对偶框架下, 利用拉格朗日对偶理论, 函数约束的分布式优化问题 (3) 通过引入对偶变量, 可被转化为求解关于拉格朗日函数的极大极小 (Minimax) 鞍点问题 (10). 由此可见, 极大极小鞍点动力学为求解带函数约束的分布式优化问题提供了一个统一的研究框架 [21].

近年来,针对极大极小优化问题涌现出大量研究成果,涵盖了强凸-凹、凸-凹、非凸-凹以及非凸-非凹等多种类型.当原始分布式优化问题的目标函数不具有良好的凸性时,对应的非凸 Minimax 问题求解需要进一步平衡原始变量和对偶变量的优化迭代.式(11)这类经典的梯度上升-下降(GDA)算法可以有效求解强凸-强凹和非凸-强凹鞍点优化问题^[22],但对于分布式非凸优化对应的非凸-凹鞍点问题,经典 GDA 算法会出现振荡,无法收敛到稳定驻点.为解决这一挑战,文献[22~24]采用衰减步长和双时间尺度更新步长技术来平衡原始变量和对偶变量的迭代,以确保算法收敛到鞍点问题的解.为进一步降低算法的迭代复杂度,文献[25,26]引入 Moreau-Yosida 光滑技术来稳定变量迭代过程,生成的稳定序列有助于算法实现更低的复杂度.结合原始对偶双光滑技术,最近的非凸-非凹鞍点工作^[27,28]为更复杂的分布式非凸优化提供了算法设计的新思路.

在函数约束的分布式优化问题(4)中,当智能体节点的本地优化变量存在耦合关系时,比如资源分配问题^[29]

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m W_i x_i = \sum_{i=1}^m d_i, \quad (12)$$

其中, x_i 是本地优化变量, $x = \text{col}(x_i)_{i=1}^m$, 约束为本地变量耦合的等式, 其中 W_i 和 d_i 都是本地信息. 这类带有耦合约束的分布式优化问题, 其目标函数和约束均分布在多个智能体节点上. 首先引入辅助变量 z 来处理耦合的约束函数关系, 构建问题对应的增广拉格朗日函数为

$$L_2(x, z, \lambda) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i) + \lambda^\top (Wx - d - (L \otimes I_m)z) - \frac{1}{2} \lambda^\top (L \otimes I_m) \lambda,$$

其中 $W = \text{diag}(W_i)_{i=1}^m$, $d = \text{col}(d_i)_{i=1}^m$, $\lambda = \text{col}(\lambda_i)_{i=1}^m$ 是对偶变量, $z = \text{col}(z_i)_{i=1}^m$ 是辅助变量. 优化问题(12)可转化为以下极大极小鞍点问题:

$$\min_{x \in \Omega, z} \max_{\lambda} L_2(x, z, \lambda).$$

该问题可通过交替优化的方式进行迭代求解, 其算法框架以原始-对偶分解为核心, 可采用分布式对偶梯度法^[30]、ADMM^[31]等典型分布式优化算法进行求解. 每个节点在本地根据当前的对偶变量 λ 和辅助变量 z 更新自己的原始优化变量 x (通常是根据梯度下降等方式). 对偶变量 λ 根据最新的原始变量 x 和 z 的信息进行梯度上升或其他对偶更新. 辅助变量 z 的更新用于协调各本地变量满足耦合约束, 通过节点之间的局部通信实现. 因此, 无论是带全局约束还是本地变量耦合的函数约束问题, 都可以基于原始-对偶框架, 通过解决统一的极大极小鞍点问题来设计分布式优化算法.

3.3 集合约束分布式优化算法

针对带有凸集合约束的分布式优化问题, 一类常用的算法设计是利用投影算子将优化变量映射到集合的可行域内, 从而保证变量的可行性. 典型的分布式投影梯度算法^[32]如下:

$$\begin{aligned} v_i(k) &= \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j(k), \\ x_i(k+1) &= P_{\Omega_i} \left(v_i(k) - \alpha_i(k) \nabla f_i(x_i(k)) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

其中, 步长 $\alpha_i(k)$ 为衰减步长, $P_{\Omega_i}(\cdot)$ 是向本地可行域 Ω_i 投影的投影算子. 投影算子将向量 y 映射到闭凸集 Ω 中的唯一元素 $P_{\Omega}(y) = \arg\min_{v \in \Omega} \|y - v\|$. 为了实现精确收敛, 算法(13)需要采用趋于零的衰减步长, 且其和满足如下条件:

$$\sum_k \alpha_i(k) = \infty, \quad \sum_k \alpha_i(k)^2 < \infty.$$

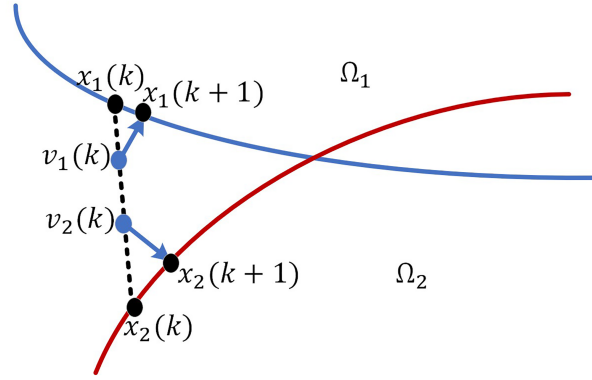


图 3 (网络版彩图) 分布式算法 (14) 示意图.

Figure 3 (Color online) Diagram of distributed algorithm (14).

这种衰减步长的设置在文献 [33~35] 中广泛采用. 然而, 这类算法的计算负担相对较重, 因为每次迭代都需进行投影计算. 此外, 随着迭代次数的增加, 衰减步长会趋近于零, 从而降低了算法的收敛速度. 因此, 该类算法更适用于投影计算简单的应用场景.

当梯度为零时, 算法 (13) 退化为分布式凸交计算. 在这种情况下, 每个节点具有局部的凸集 Ω_i , 而任务是使所有节点趋近于凸集交集中与各个凸集距离之和最短的点, 相应的投影示意图如图 3 所示, 其中对于 $i \in \{1, 2\}$,

$$v_i(k) = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j(k), \quad x_i(k+1) = P_{\Omega_i}(v_i(k)). \quad (14)$$

相应地, 文献 [36] 提出了一种基于连续时间动力系统的分布式凸交计算方法:

$$\dot{x}_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_i - x_j) + P_{\Omega_i}(x_i) - x_i.$$

针对问题 (5), 与分布式投影梯度算法 (13) 对应的连续时间算法形式如下:

$$\dot{x}_i = - \sum_{j=1}^m a_{ij} (x_i - x_j) - \alpha(t) \nabla f_i(x_i) - (x_i - P_{\Omega}(x_i)),$$

其中步长 $\alpha(t)$ 需要满足 $\int_0^\infty \alpha(t) dt = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0$.

如果约束集合很复杂, 投影计算将会变得非常昂贵, 导致投影梯度算法低效甚至无法实现. 为了解决这一问题, 研究者们相继提出了近似投影梯度算法和无投影算法. 在近似投影算法中, 不计算复杂可行集上的精确投影, 而是采用具有适当相对容错的近似投影^[37]. 在足够精确的近似投影下, 这些非精确的投影一阶算法仍然可以保持与精确投影算法相似的收敛速度和迭代复杂度. 无投影算法中一类有效的算法设计为 Frank-Wolfe 算法^[38], 又称条件梯度算法. 它通过求解约束集上的线性最小化问题来保证变量的可行性, 其算法设计如下:

$$\begin{aligned} s &= \operatorname{argmin}_{s \in \Omega} \langle s, \nabla f(x(k)) \rangle, \\ x(k+1) &= (1 - \gamma)x(k) + \gamma s. \end{aligned} \quad (15)$$

此类算法通常比投影梯度算法具有更低的计算成本, 特别是对于机器学习中的单位范数约束和核范数约束等结构性约束集合, 线性最小化问题具有闭式解. 虽然集中式 Frank-Wolfe 算法的研究工作众多^[39~41], 但分布式无投影算法近些年来才被提出. 针对凸光滑优化问题 (5), 文献 [42] 利用平均共识

技术、快速随机平均梯度 (SAGA) 方法和条件梯度迭代, 提出了分布式无投影算法, 如算法 1 所示. 该算法通过多智能体交流各自本地变量 $x_i(k)$, 先计算加权平均 $\bar{x}_i(k)$, 再用梯度跟踪技术来近似全局梯度信息, 最后利用 Frank-Wolfe 更新迭代, 实现分布式无投影优化. 算法每步仅需本地计算与邻居通信, 适合大规模分布式场景. 另一些近期工作 [43, 44] 结合了梯度跟踪和条件梯度更新技术, 提出了分布式随机无投影算法, 避免了全梯度的计算. 这些算法具有次线性收敛速度, 并能为凸目标函数和非凸目标函数提供良好的计算复杂度保证.

Algorithm 1 Distributed projection-free optimization algorithm.

Input: For all agent $i \in \{1, \dots, m\}$, initialize the variable x_i^1 and the total number of iterations K .

1: **for** $k = 1, 2, \dots, K$ **do**

2: Average estimating step:

$$\bar{x}_i(k) = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j(k);$$

3: Approximate average gradient step:

$$\begin{aligned} \nabla_i^k F &= \overline{\nabla_i^{k-1} F} + \nabla f_i(\bar{x}_i(k)) - \nabla f_i(\bar{x}_i(k-1)); \\ \overline{\nabla_i^k F} &= \sum_{j=1}^m a_{ij} \nabla_j^k F; \end{aligned}$$

4: Projection-free Frank-Wolfe step:

$$\begin{aligned} s_i^k &\in \operatorname{argmin}_{s \in \Omega} \langle \overline{\nabla_i^k F}, s \rangle; \\ x_i(k+1) &= (1 - \gamma_k) \bar{x}_i(k) + \gamma_k s_i^k; \end{aligned}$$

5: **end for**

Output: x_i^K .

本节对若干典型的分布式优化算法的收敛条件及其适用的网络拓扑进行了总结, 重点介绍了一些具有代表性的早期研究工作, 以帮助读者把握分布式凸优化算法的基本框架和核心思想. 随着相关研究的不断深入, 这些算法的收敛条件和适用网络环境已在后续大量文献中得到进一步拓展和完善. 由于篇幅和内容侧重, 本节未能对这些进展作详细介绍, 建议读者参考相关文献以获取分布式优化领域的最新研究成果和应用细节.

4 非理想通信网络下的分布式优化

在分布式优化中, 每个智能体节点仅掌握局部信息, 必须通过网络通信来协同求解全局问题. 因此, 通信效率是分布式优化算法设计的核心考量. 通信的挑战主要源于两个层面: 通信方式 (即网络的拓扑结构) 和通信内容 (即传输信息的质量与成本). 本节的讨论在图 2 分布式优化模型中对应通信网络维度. 我们将网络通信环境分为理想与非理想两种情况进行探讨. 其中, 理想网络假设网络拓扑可靠且双向连通, 通信链路中不存在干扰、噪声或时延等不确定性因素的理想化网络环境. 相对地, 非理想网络泛指不满足上述任一条件的现实网络, 例如网络拓扑为有向或时变图、通信链路存在丢包或时延、信道中存在噪声干扰等.

4.1 通信网络拓扑

本小节重点讨论智能体之间的通信网络是有向的或者时变的情况. 现实世界中的通信网络往往比理想的无向图更为复杂. 由于通信网络的不稳定和通信带宽的限制, 以及节点的异构性、链路的单向性或间歇性故障, 使得有向图、时变图和随机图成为更贴近实际的抽象模型. 这些复杂的拓扑结构对

算法的收敛性与稳定性提出了严峻挑战.

下面首先对常见通信图模型及其性质进行简单介绍. (1) 固定均衡有向图. 有向图的拉普拉斯矩阵 L 满足 $\mathbf{1}_n^\top L = 0$ 和 $L\mathbf{1}_n = 0$. 定义 $\tilde{L} = \frac{L+L^\top}{2}$, 称 $\tilde{L}$ 为其镜像图的拉普拉斯矩阵. 可以看出, $\tilde{L}$ 是对称半正定的拉普拉斯矩阵. (2) 联合连通有向图. 切换的均衡有向图序列 $\mathcal{G}(k)$, $k = 1, \dots$, 存在一致的常数 Q 使得并图 $\mathcal{G}_k^u = (\mathcal{N}, \cup_{l=1, \dots, Q} \mathcal{E}_{k+l})$ 对于所有时刻 k 均为强连通图. 联合连通有向图的双随机邻接矩阵序列 $A(k)$ 满足以下性质: 定义 $\Phi(k, s) = A(k)A(k-1) \dots A(s+1)$, $\forall k \geq s \geq 0$, 那么,

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(k, s) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top$, $\forall s \geq 0$;
- $|\Phi(k, s)_{ij} - \frac{1}{n}| \leq \theta \beta^{k-s}$, $\forall k \geq s \geq 0$, 其中 $\theta = (1 - \frac{\eta}{4n^2})^{-2}$, $\beta = (1 - \frac{\eta}{4n^2})^{\frac{1}{Q}}$.

(3) 随机图. 随机图模型借助概率语言刻画个体之间不确定的信息分享关系. 常见的随机图模型是 gossip 模型, 即在每个时刻从边集 $\mathcal{E}$ 中随机选取一条边 (i, j) , 并允许个体 i 和 j 通信. 随机图利用随机矩阵作为邻接矩阵 A , 比如文献 [34, 45, 46] 中采用如下随机矩阵模型: A 为独立同分布的双随机矩阵序列 (即, 每一行元素之和以及每一列元素之和都等于 1), 且其期望 $\mathbb{E}[A] = \bar{A}$ 对应于一个连通无向图的邻接矩阵. (4) 开放网络. 网络中的智能体的数量可能发生动态变化. 在无线网络中, 网络用户大多是高度动态的, 因为用户可能随时退出其服务, 且新的用户也可能随时加入网络. 因此, 网络中智能体数量的不可预测变化迫切需要研究开放网络的处理方法, 即在该网络中允许智能体随时加入或离开.

固定有向图和联合连通有向图等复杂通信模型打破了信息交换的对称性, 催生了两类主流的算法技术: 基于推和 (push-sum) 技术的分布式算法和基于推拉 (push-pull) 技术的分布式算法. 基于 push-sum 的分布式算法的核心思想是通过引入辅助变量, 将原优化迭代分解为两个并行的线性迭代. 它巧妙地利用列随机矩阵, 成功将平均共识分布式优化算法的适用范围从无向图推广到了更具挑战性的有向图. 具体来说, 推和算法中, 每个节点 i 持有初值 $x_i(0)$, 并维护两个变量: $s_i(k)$ 和 $w_i(k)$, 初始状态为 $s_i(0) = x_i(0)$, $w_i(0) = 1$. 第 k 次迭代的过程为: 对于每个节点 i , 令 $\mathcal{N}_i^{\text{out}}$ 为其出邻居集合, d_i^{out} 为其出度. 则节点 i 将 $s_i(k)$ 和 $w_i(k)$ 平均分配给所有出邻居 (包括自己):

$$\begin{aligned} s_j(k+1) &= \sum_{i \in \mathcal{N}_j^{\text{in}}} \frac{s_i(k)}{d_i^{\text{out}}}, \\ w_j(k+1) &= \sum_{i \in \mathcal{N}_j^{\text{in}}} \frac{w_i(k)}{d_i^{\text{out}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

最后, 通过比值 $x_j(k) = \frac{s_j(k)}{w_j(k)}$ 进行归一化. 文献 [47] 针对强连接的固定有向图, 提出了一种基于 push-sum 方法和文献 [45] 中对偶平均方法的分布式算法. 随后, 文献 [48] 研究了均匀联合强连接的有向时变网络上的分布式算法设计. 这些早期方法多采用衰减步长, 虽然保证了收敛, 但速度相对较慢. 为了加速收敛, 后续研究 [15, 49~51] 进一步提出了采用 push-sum 方法和固定步长的一系列快速分布式优化算法.

第二类分布式优化算法是基于推拉 (push-pull) 技术, 其设计更为精妙. 它同时使用两种权重矩阵: 利用行随机矩阵来“推送 (push)”本地的解估计值给邻居, 同时利用列随机矩阵从邻居处“拉取 (pull)”梯度信息以精确追踪全局梯度. 这种“推”与“拉”的协同机制高效地处理了有向性带来的信息不平衡问题 [52~54]. 推拉技术主要用于分布式优化的梯度跟踪类算法. 系统中每个节点 i 持有变量 $x_i(k)$ 和追踪变量 $y_i(k)$. 算法包含如下推送 (push) 和拉取 (pull) 两个步骤:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(k) - \alpha y_i(k), \\ y_i(k+1) &= \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j(k) + \nabla f_i(x_i(k+1)) - \nabla f_i(x_i(k)), \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $A = [a_{ij}]$ 是行随机矩阵 (用于拉取), $B = [b_{ij}]$ 是列随机矩阵 (用于推送). 针对强凸光滑优化问题, 文献 [52~54] 证明了在强连接有向图上, 基于推拉的算法具有线性收敛速度. 文献 [55] 进一步开发了一种用于均匀联合强连接的时变有向图的推拉算法. 相较于基于推和 (push-sum) 的算法, 分布式推拉 (push-pull) 算法所需的计算和通信量更少, 因为它避免了额外的除法运算 [54]. 最近, 文献 [56] 还提出了一个基于 IQC (integral quadratic constraints) 的统一框架, 用于分析当局部目标函数强凸且光滑时, 文献 [52~54] 提出的各种推拉算法, 以及文献 [16] 中算法推拉变体的线性收敛性. 一个实际的挑战是, 上述两种方法通常要求节点知晓其“出度” (即它向多少个邻居发送信息) 以构建列随机矩阵, 这在广播通信等场景下难以实现 [57]. 为解决此问题, 近期研究已开发出仅需行随机矩阵的分布式算法. 例如, 文献 [58] 假设每个代理都知道其唯一标识符, 通过引入一个能动态消除不平衡性的附加变量, 成功地在仅知晓“入度”的条件下实现了线性收敛. 该算法后来在文献 [59] 中扩展到非协调步长的场景, 只要最大步长足够小, 即使步长不相同也能建立线性收敛性.

随机图通信模型可以刻画通信链路存在随机丢包或间歇性连接的场景. 早期研究如文献 [60] 关注无向随机图上的离散时间算法, 证明在无向随机图上, 如果链路失效是随时间独立同分布 (i.i.d.) 且预期图是连通的, 那么文献 [33] 提出的递减步长 DGD 算法几乎必然收敛到最优解. 近些年来, 一些二阶优化算法被提出用来解决有向随机网络上的分布式优化问题. 文献 [61] 结合牛顿-拉夫逊一致性算法 [62]、推和 (push-sum) 方法 [63], 以及鲁棒化策略 [64] 提出了分布式优化算法, 并表明, 如果离散化步长足够小, 算法几乎必然收敛到全局最小值. 当 Hessian 信息不可用时, 文献 [65] 通过整合文献 [48,66] 的推和 (push-sum) 方法与文献 [64] 的鲁棒化策略, 在递减步长下建立了几乎必然收敛的分布式优化算法. 尽管上述算法对链路故障具有弹性, 但收敛速度相对较慢, 因为文献 [61] 要求小步长, 而文献 [65] 使用递减步长. 为加速收敛速度, 文献 [46] 提出了两种随机图上的分布式 Nesterov 型梯度方法, 并给出了基于任意节点代价函数期望最优性间隙的收敛速率分析.

针对开放网络的分布式优化问题, 早期研究首先从解决多智能体一致性问题入手, 提出了状态和保持 (sum-of-states preservation) 技术和 gossip 通信框架 [67~69]. 在此基础上, 部分工作开始研究带有简单约束的优化问题. 例如, 文献 [70~72] 等探讨了仅含盒式约束 (box constraints) 的场景. 其中, 文献 [70] 提出了一种投影次梯度方法来解决带盒式约束的优化问题; 文献 [71] 开发了基于对偶平均的算法, 但其步长依赖于实时智能体总数, 在应用中可能难以获取; 文献 [72] 则分析了智能体行为对梯度下降算法性能的影响. 这些工作的局限性在于, 它们主要考虑简单的盒式约束, 因此无法直接应用于通常包含耦合函数约束的复杂分布式优化问题. 为解决这一挑战, 在假定智能体间可进行双向通信的条件下, 文献 [73] 利用投影梯度法和对偶平均法, 提出了一种用于解决开放式多智能体网络上资源分配问题的分布式随机坐标下降算法. 此外, 文献 [74] 针对更一般的有向时变开放网络, 研究并解决了具有动态不等式约束的分布式在线优化问题. 然而, 目前针对智能体数量可随时间变化的开放网络上的分布式优化问题的研究仍然相对较少, 这仍是一个值得深入探索的领域.

4.2 非理想通信链路

由于通信攻击和有限带宽等非理想通信状况的存在, 智能体间交换的信息常伴有时延、噪声干扰等问题. 研究这些干扰因素对算法的影响, 并设计通信高效且鲁棒的分布式优化算法至关重要. 本小节将讨论时延、带有噪声和时延误差的通信数据, 以及旨在降低通信开销的触发机制对算法的影响, 及其应对算法设计.

(1) 通信延迟在多智能体系统中普遍存在, 源于传输时间、通信速度限制、执行输入所需的计算时间和执行时间. 严重的时间延迟可能会降低系统性能, 甚至破坏稳定性. 针对恒定时延和时变有界时延, 一种常用的收敛性分析方法是借鉴文献 [75] 的增广图思想, 引入额外的虚拟节点来捕获延迟的影响, 将原时延问题转化为增广图中的无时延问题. 早期的研究主要集中于具有递减步长的分布式算法. 对于固定的有向图, 文献 [45] 提出的对偶平均算法可以扩展到处理固定常数延迟和随机有界延迟

的情况^[47,76]. 对于时变有向图, 文献[77]扩展了次梯度投影法以处理时延和非相同约束集, 并证明了其在均匀联合强连接且权重平衡网络中的收敛性. 文献[66]证明了基于推和(push-sum)的方法在非权重平衡强连接网络及任意大时变延迟下仍能收敛到最优解. 上述分布式算法使用递减步长, 导致收敛速度较慢. 针对固定强连通有向图, 文献[78,79]研究了采用固定步长的分布式算法^[80]在恒定时间延迟下的收敛性能. 文献[78]表明, 即使存在非均匀恒定延迟, 只要步长足够小, 算法仍收敛; 对于均匀恒定延迟, 给出了确保收敛的显式步长上界.

(2) 通信噪声与异步更新是另一类挑战. 分布式优化要求各节点的局部估计 x_i 收敛到同一全局最优解 x^* . 然而, 信道衰落和网络噪声会引入不确定因素的干扰. 研究如文献[81~83]等探讨了利用带随机噪声的通信状态(即 $x_i + \zeta_{ij}$), 不同分布式优化算法的收敛性. 另外, 大规模网络中, 网络拥堵和节点计算能力差异导致节点常收到邻居的过时通信信息. 分布式同步优化算法需要节点同时更新, 这在实际系统中并不容易实现. 异步算法允许节点利用过时信息($x_j(k - \rho_{ij})$, ρ_{ij} 为时延), 在本地时钟驱动下独立更新, 能改善非理想通信下的收敛性能^[77]. 研究工作^[34,84]将同步次梯度推送算法扩展到异步实现, 但只能收敛到全局最优解的邻域. 为实现精确收敛, 文献[85]中设计了采用非协调自适应步长的分布式异步优化算法. 基于梯度跟踪技术, 文献[86]提出了首个具有线性收敛速率的分布式异步算法. 针对带约束优化问题, 文献[87]提出了采用自适应步长的分布式异步算法, 来处理带有局部约束集的优化问题. 文献[88]提出了异步分布式 ADMM 算法处理线性等式约束问题. 文献[89]提出基于分布式广播的鲁棒算法处理不等式约束及链路故障.

(3) 为解决传统连续时间分布式算法需要智能体间持续通信而导致能耗过高的问题, 事件触发机制应运而生. 研究工作^[90~94]建立了事件触发通信机制, 用于在连通无向图或强连通且权重平衡的有向图上实现分布式连续时间算法. 该机制设计的关键挑战在于, 如何在保证算法收敛的同时, 避免“芝诺现象”(即在有限时间内触发无限次事件). 早期研究多关注单积分器一阶多智能体系统的分布式优化, 其中文献[95]提出了带事件触发 PI 算法实现指数收敛. 为达精确收敛, 文献[96]的 ZGS 算法被扩展至周期性时间触发^[97]和事件触发通信^[98]. 受动态事件触发策略启发, 文献[99]为 ZGS 算法进一步引入动态事件触发通信机制, 实现了比时间触发机制和静态事件触发机制更高的效率. 对于具有双积分器代理动力学的二阶多智能体系统, 文献[100]提出了事件触发算法, 但是这类算法并非完全分布式, 因为其增益参数依赖于图拉普拉斯矩阵的特征值等全局参数. 文献[101]开发了一种无需全局信息的完全分布式的二阶系统算法, 并为其引入动态事件触发通信机制. 另外, 一些事件触发通信策略的设计已将时变拓扑、时延、丢包和有限带宽等通信影响纳入考量. 例如, 文献[102]针对一阶系统, 结合事件触发通信方案和有限带宽, 开发了带有动态编解码器的分布式优化算法.

5 非确定性代价函数下的分布式优化

目前, 已有大量研究工作基于确定性假设, 即假定问题的所有参数均为精确已知, 这在图 2 的分布式优化模型中体现为代价函数维度上的确定性代价函数. 然而, 在复杂多变的现实世界中, 这一假设往往难以满足. 因此, 推动分布式算法从理论研究走向实际应用的核心挑战之一, 在于提升其在非确定性环境下的性能与鲁棒性, 即在图 2 分布式优化模型中, 针对代价函数维度的非确定性代价函数的有效处理. 为应对这一挑战, 学术界基于对不确定性信息的不同建模方式, 衍生出两大研究分支: 分布式随机优化与分布式在线优化. 分布式随机优化假设不确定性信息服从某个(可能未知的)概率分布. 该方法尤其适用于海量数据场景, 通过设计高效的随机采样机制, 各智能体仅需利用部分数据样本便可有效更新决策. 其最终目标是优化全局代价函数的数学期望. 分布式在线优化则面向更为泛化的场景, 它不对未来的数据序列做任何统计性假设. 该方法适用于数据以流式持续到达或环境动态变化的情形, 其核心目标是通过一系列实时决策与学习, 最小化与离线最优决策相比的累积遗憾. 尽管建模假设不同, 但随机优化与在线优化并非完全割裂, 二者在处理不确定性这一共同目标下深度交叉融

合. 例如, 在线学习算法可作为求解随机优化问题的有力工具; 同时, 在线优化也可在特定的随机环境下设计, 以获得更优的性能保证. 因此, 本节将分别对这两个领域的核心思想、关键技术与前沿进展进行探讨.

5.1 分布式随机优化算法

在机器学习、物联网及大规模信号处理等数据密集型应用中, 海量的任务数据使得全局代价函数天然地表现为一个基于数据分布的期望函数, 而非一个简单的有限项加和. 在此类场景下, 若要求每个智能体在每次迭代中都计算完整精确的梯度 (即对整个数据分布进行积分或求和), 在计算上是不可行的, 甚至是不可能的. 为了应对这一核心挑战, 分布式随机优化算法应运而生. 这类算法的核心思想在于, 采用随机梯度 (即利用小批量样本或带噪声的梯度估计) 替代真实梯度进行迭代更新, 从而在单次迭代的计算复杂度与最终收敛性能之间寻求高效的平衡. 本小节将重点探讨分布式随机一阶梯度算法. 这类算法因其较低的计算复杂度 (无需计算二阶 Hessian 矩阵) 而在大规模多智能体系统中展现出优秀的扩展性. 分布式随机梯度算法通常结合了邻居间的平均共识步骤和局部随机梯度, 这在无约束的大规模分布式优化问题中非常流行^[103~105]. 基于类似的设计理念, 近年来, 研究人员针对更复杂的优化问题和各种多智能体网络进行了大量深入研究, 例如, 分布式随机梯度投影算法^[83]、分布式随机镜像下降算法^[106]、随机网络上不完全通信条件下的分布式随机原始-对偶算法^[107], 以及时变有向图上的随机梯度推送算法^[48].

然而, 分布式随机梯度算法的性能通常受限两个方面: 一是每个智能体在本地引入的随机梯度方差; 二是不同智能体之间异构数据集所带来的影响. 为了处理局部方差问题, 研究者们提出了许多方差缩减技术, 旨在减少存储空间和计算复杂度, 例如随机平均梯度算法 (SAGA)^[108]、随机方差缩减梯度算法 (SVRG)^[109]、随机递归梯度算法 (SARAH)^[110] 以及异步方差缩减算法 (Asyn-VR)^[111]. 近年来, 各种方差缩减技术已被应用于设计解决去中心化凸 (强凸) 问题的算法^[112], 然而, 当代价函数是非凸时, 由于缺乏良好的凸性, 高效算法的设计和理论分析变得困难. 最近的研究提出了针对非凸有限和问题的分布式方差缩减方法. 文献^[113] 提出了结合本地 SARAH 方差减小技术和梯度跟踪的分布式梯度估计和跟踪 (D-GET) 算法. 然而, 如文献^[114] 指出, D-GET 不具备网络无关的梯度复杂度. 文献^[114] 中提出的结合 SARAH 的梯度跟踪算法 (GT-SARAH) 以 D-GET 算法两倍通信轮次的代价, 实现了近乎最优的总梯度计算复杂度. 针对大规模集合约束有限和优化问题, 文献^[43] 提出了结合梯度跟踪和方差缩减技术的分布式随机 Frank-Wolfe 算法, 有效处理了随机采样和分布式数据引起的局部和全局方差.

按照抽样机制的不同, 随机算法大致可以分为有放回抽样随机算法和无放回抽样随机算法. 大多数现有的随机梯度下降 (SGD) 算法属于有放回抽样算法, 其中数据被均匀采样以生成无偏的梯度估计. 相比之下, 无放回抽样随机算法, 又称为无放回随机重洗牌算法 (random reshuffling, RR), 按顺序遍历数据, 每个数据仅学习一次, 在实践中通常比 SGD 性能更好^[115,116]. 然而, 尽管 RR 在实践中表现出色, 但 RR 的梯度是有偏的, 这使得理论分析困难. 尽管 RR 中的有偏梯度不能完全近似真实梯度, 但最近的一些工作提供了关于 RR 在 (强) 凸优化中优于 SGD 的启发性分析^[115,117,118]. 文献^[115] 建立了 RR 在各种凸问题上的收敛速率优于 SGD. 对于非凸优化, 文献^[117] 证明 RR 算法在常数误差下实现次线性收敛; 文献^[119] 研究表明, 采用递减步长时 RR 算法可以实现无常数误差收敛. 在多智能体网络中, 文献^[120] 提出了一种分布式 RR 算法, 要求每个智能体每周期内与邻居进行多轮通信以达成共识. 文献^[121] 开发了分布式随机近端算法 (DPG-RR), 将 RR 算法扩展到多智能体网络上的非光滑凸优化问题. 挑战在于, 在采用常数步长时, 这些 RR 算法由于随机梯度方差只能收敛到驻点邻域. 尽管 SGD 算法有多种多样的方差缩减技术, 但 RR 算法的方差缩减研究工作相对较少. 对于强凸优化, 文献^[118] 首次研究了结合方差缩减的 RR 算法, 并提出了一种摊销方差缩减梯度下降算法. 对于一般凸优化, 文献^[122] 利用 SVRG 技术, 提出了 RR 算法的不同方差缩减变体, 以提

高随机洗牌算法的收敛速率. 文献 [123] 提出的分布式方差减小随机重洗牌算法在采用常数步长时收敛到驻点邻域, 该邻域在温和条件下可以任意缩小, 且通信轮次远少于文献 [120] 中分布式 RR 算法.

虽然随机优化方法具有很好的计算效率, 但是当优化问题中存在参数不确定性时, 其高效性也会受到影响. 针对不确定性参数问题, 传统的鲁棒优化假设参数 θ 的具体取值未知, 但其所属的不确定性集合 U_θ 已知. 其核心思想是寻求在最坏情况下的性能最优解, 即求解 $\min_x \max_{\theta \in U_\theta} f(x, \theta)$. 针对分布式场景, 文献 [124] 中提出了一种基于割平面一致性的完全分布式算法, 该算法通过对约束集进行外部多面体近似, 使得各智能体仅计算并交换其局部可行集的线性近似, 从而保证了算法在大规模网络中的可扩展性. 然而, 它通常会产生保守解, 并且当选择了不好的集合 U_θ 时, 有时会变得难以处理 (例如, 该集合由非凸不等式的隐式系统给出) [125]. 与鲁棒优化不同, 随机优化假设可以获得关于未知参数的统计或分布信息, 例如参数 θ 服从某个概率分布 $\mathcal{D}$. 然而, 当用于估计分布的数据有限或含噪时, 得到的分布模型可能存在偏差, 进而导致优化结果次优甚至不可行. 为了弥合上述两种方法的不足, 近期研究开始探索数据驱动的思路. 例如, 文献 [126] 提出了一种耦合的分布式随机近似算法. 该方法允许每个智能体通过数据驱动的学习算法, 在线地对未知参数的概率分布 $\mathcal{D}$ 进行参数估计, 并将这一过程与决策变量的优化耦合进行. 具体而言, 每个智能体通过随机近似方法同步更新其对概率分布参数和决策变量的估计, 再通过网络共识协议与邻居节点进行信息融合与对齐. 这种方法融合了参数学习与优化过程, 为处理参数未知的分布式问题提供了新的解决路径.

在分析随机优化算法的性能时, 我们通常关注其收敛速度和最终收敛精度. 对于凸或强凸问题, 一个重要的度量是收敛速率, 它描述了算法的期望 (或高概率) 次优解 $\mathbb{E}[f(x_k) - f^*]$ 随迭代次数 k 减小的速度. 例如, 线性收敛 (几何收敛) $\mathcal{O}(\rho^k)$ 表示算法能够以恒定比例 $0 < \rho < 1$ 快速收敛到最优解, 而次线性收敛 $\mathcal{O}(1/k)$ 则表示收敛速度相对较慢. 当目标函数为非凸时, 我们通常不考察函数值与最优值的差距, 而是关注算法能否收敛到驻点 (stationary point). 此时, 常用的收敛性度量是梯度的范数 $\mathbb{E}[\|\nabla f(x_k)\|^2]$. 若该值能收敛到零, 则表明算法能够找到一个驻点. 值得注意的是, 由于随机梯度的存在, 算法可能只收敛到驻点的邻域, 此时需要分析最终误差界的大小.

5.2 分布式在线优化算法

在更具挑战性的实际分布式决策问题 (如无人系统、智能电网) 中, 分布式在线优化进一步引入了实时性、动态性和未来信息不可知的挑战, 这使其成为一个更具复杂性但也更具现实意义的研究前沿. 与传统批处理或离线分布式优化不同, 分布式在线算法必须在数据持续流入、环境可能动态变化的背景下, 仅依靠局部和瞬时信息进行决策和学习. 为了应对这些独特的挑战, 现有工作已发展出多样化的分布式在线优化算法. 受分布式在线优化问题广泛应用价值的驱动, 许多离线分布式优化方法已被成功扩展至在线环境, 典型代表包括分布式在线对偶平均算法 [127]、分布式在线镜像下降算法 [128] 以及用于函数约束优化问题的分布式在线原始对偶算法 [129~131] 等. 在线优化中, 由于未来信息是未知的, 难以直接评估算法性能与全局最优解的差距. 因此, 通常采用遗憾界 (regret) 作为性能度量, 即关注实际决策的累积损失与理想最优决策之间的差距. 具体地, 静态遗憾定义如下:

$$\mathcal{R}_T = \sum_{t=1}^T f_t(x_t) - \min_x \sum_{t=1}^T f_t(x), \quad (18)$$

其中, $\sum_{t=1}^T f_t(x_t)$ 是在线算法在 T 个时间步内的累积损失, 而 $\min_x \sum_{t=1}^T f_t(x)$ 则对应于假设已知全部损失函数后所能获得的最优固定决策的最小累积损失. 当环境具有明显动态性时, 更具挑战性的度量是动态遗憾:

$$\tilde{\mathcal{R}}_T = \sum_{t=1}^T f_t(x_t) - \sum_{t=1}^T f_t(x_t^*), \quad (19)$$

其中 x_t^* 是在每个时间步 t 的最优离线决策. 动态遗憾能够更好地衡量算法对时变最优解的跟踪能力. 总体而言, 静态遗憾反映了算法对未知流式数据的长期学习能力, 而动态遗憾则侧重评估算法在快速变化环境下的适应性与响应速度. 注意, 下段中提到的遗憾界均为静态遗憾.

针对集合约束的在线优化问题, 现有大多数分布式在线算法多依赖于投影算子. 但在高维结构化约束问题 (如低秩矩阵补全^[41]、结构化支持向量机 (SVM)^[132]), 投影操作计算成本高昂, 并不适合高实时性要求. 因此, 最近的研究^[133] 将集中式在线 Frank-Wolfe (OFW) 方法^[134] 扩展到分布式环境, 并提出了分布式在线条件梯度 (D-OCG) 算法, 实现了 $\mathcal{O}(T^{3/4})$ 的遗憾界. 随后, 文献^[135] 将“跟随扰动领导者”技术应用于平滑损失函数, 将分布式在线凸优化的遗憾界改进至 $\mathcal{O}(T^{2/3})$. 另外, 现有的分布式在线方法大多受限于对精确梯度计算的依赖, 即使对于中等规模的数据集, 这种计算成本也可能非常高昂. 在涉及大规模流数据的高维在线优化问题中, 计算精确梯度变得不切实际^[136]. 为了突破这一限制, 最近的研究^[137] 提出了一种基于共识的分布式在线无投影优化算法, 利用随机梯度估计, 渐近实现了在线凸优化的最优紧遗憾界.

当目标函数的解析表达式未知, 或者其梯度信息由于系统复杂性、安全性限制或高昂的计算成本而难以获取时, 赌博机反馈 (bandit feedback) 成为重要的无梯度零阶优化方法. 例如, 在通信网络资源动态配置或多机器人协同对抗等场景中, 智能体仅能通过执行某个动作来观测到系统反馈的性能指标 (即函数值). 这种仅依靠环境返回的函数值进行的零阶优化方法在一些场景下也被视为在线优化. 在线零阶优化算法框架的核心在于, 无需一阶梯度信息, 巧妙利用函数查询值来估计梯度, 并结合在线优化学习机制以适应环境动态. 在分布式零阶优化算法中, 往往只返回少数指定点的函数值, 包括只返回一个点函数值的单点赌博机反馈^[138~140], 以及揭示多个点函数值的多点赌博机反馈, 其中两点赌博机反馈被更广泛地利用^[141~143]. 关于分布式在线优化算法的前沿性能结果, 包括静态遗憾界和动态遗憾界, 可以参考文献^[144]. 当在线优化问题进一步考虑系统中物理实体的动力学时, 即优化仅能获得物理系统反馈的输出值, 反馈优化问题这一控制范式近年涌现, 旨在使物理系统能够自主达到高效的运行点. 其核心思想是将优化迭代与物理设备 (或“物理系统”) 通过闭环方式互连. 文献^[145] 研究了无模型的反馈优化控制器, 基于当前输入和测量输出处的目标函数值构建梯度估计来更新控制输入, 而无需稳态灵敏度. 针对无中心节点的多智能体系统, 文献^[146] 进一步设计了分布式反馈优化算法.

6 分布式优化的应用场景

随着多智能体系统在各类复杂环境中的广泛部署, 分布式优化算法正展现出巨大的应用价值. 其通过充分利用各智能体的本地计算与通信能力, 不仅提升了系统的整体效率与鲁棒性, 也为大规模、动态环境下的协同决策提供了有力支撑. 在实际应用中, 分布式优化已成为多机器人系统中高效协同目标跟踪的关键技术, 为实现分布式感知与实时响应提供理论基础; 在工业物联网中, 大规模任务的分布式分配与调度极大提升了生产灵活性和资源利用率; 在智能电网中, 分布式经济调度优化则助力于提升电力系统的安全性与经济性, 实现能源的高效分配. 以下将结合上述典型场景, 进一步阐述分布式优化方法在实际工业系统中的应用.

(1) 多机器人目标跟踪问题. 在多机器人目标跟踪问题中, 一组机器人收集移动目标节点 (称为目标) 的测量数据, 并尝试共同估计目标的轨迹. 多机器人目标跟踪问题出现在许多机器人应用中, 涵盖环境监测、监视及自动驾驶等自主机器人系统. 在这些场景中, 可基于目标估计轨迹进行场景预测, 以保障系统安全运行. 图 4 展示了多机器人目标跟踪问题, 其中一组四旋翼飞行器对标记的地面车辆 (目标) 进行噪声观测, 且每个四旋翼飞行器可以观测到车辆的区域有限. 多机器人目标跟踪问题可以归结为最大后验优化问题, 其中机器人试图在给定机器人对目标的所有观测集的情况下计算一个估计值, 以最大化目标轨迹的后验分布. 假定目标的运动学模型为 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 目标在 t 时刻的状

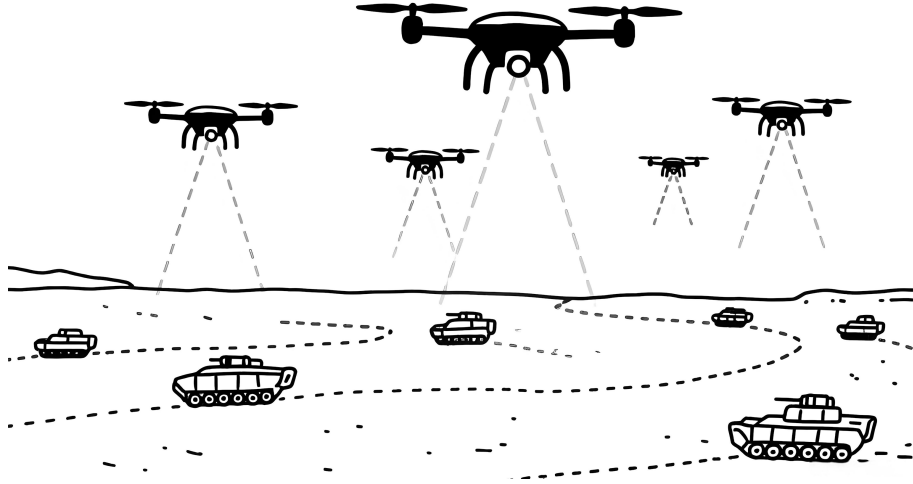


图 4 多机器人目标跟踪场景.

Figure 4 Multi-robot target tracking scenario.

态估计为 $x_t \in \mathbb{R}^n$. 机器人 i 在 t 时刻对目标的观测值为 $y_{i,t} \in \mathbb{R}^m$, 机器人 i 对目标的测量模型为 $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. 机器人 i 只知道自己的观测值 $y_{i,t}$ 和测量模型 h_i , 但不知道其他机器人的观测值 $y_{j,t}$ 和测量模型 h_j . 给定所有机器人对目标状态的观测, 寻求使目标轨迹的后验优化问题为

$$\min_x \sum_{t=0}^{T-1} \|x_{t+1} - g(x_t)\|_{\Omega_t}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} \|y_{i,t} - h_i(x_t)\|_{\Lambda_{i,t}}^2. \quad (20)$$

该问题中优化变量 x 是目标轨迹估计值, 代价函数的第一部分为目标在下一时刻的状态估计值与根据目标当前状态估计值推算的下一时刻状态的误差, 第二部分是每个机器人的观测值与根据当前状态估计值计算的期望测量值的误差. 由于目标函数中存在由 x 引起的耦合, 优化问题是不可分离的, 因此, 当前问题形式不适合进行分布式优化. 尽管如此, 可以通过简单的重构, 得到一个可分离的优化问题, 即为每个机器人分配一个 x 的本地副本 $\hat{x}_i$. 重构后的优化问题为

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}} & \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{N} \|\hat{x}_{i,t+1} - g(\hat{x}_{i,t})\|_{\Omega_t}^2 \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-1} \|y_{i,t} - h_i(\hat{x}_{i,t})\|_{\Lambda_{i,t}}^2 \\ \text{s.t. } & \hat{x}_i = \hat{x}_j, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (21)$$

经过这种重构, 得到的优化问题是可分离的, 因此, 可以应用典型的分布式优化算法, 比如基于平均共识的 EXTRA 类算法^[12~14]、梯度跟踪类算法^[15~17]、ADMM 算法^[88,147,148]等, 完成对移动目标轨迹的估计和跟踪.

(2) 工业物联网中的大规模任务分配. 在现代工业互联网系统中, 机器人承担着重要的任务执行角色, 如何将多任务合理分配给不同机器人, 以实现任务完成总成本最小化, 是一个典型的分布式优化问题. 具体而言, 任务分配旨在寻求如何最优地将 M 个任务分配给 N 个机器人, 使得所有任务的完成总成本最小. 该问题通常被建模为一个加权二分图 (如图 5 所示): 该图的顶点划分为两个集合, 分别代表机器人和任务, 且同一集合内的任意两个节点之间不存在边连接. 图中每一条边都带有一个权重, 表示任务与机器人的匹配成本. 在任务分配场景中, 边权重 $c_{i,j}$ 表示将任务 j 分配给机器人 i 所产生的成本. 值得注意的是, 每个机器人只了解自身对各任务的成本信息 $c_{i,m}$, $m = 1, 2, \dots, M$, 而无法获取其他机器人的任务成本信息 $c_{j,m}$, $j \neq i$, $m = 1, 2, \dots, M$. 机器人 i 对所有 M 个任务成本信息

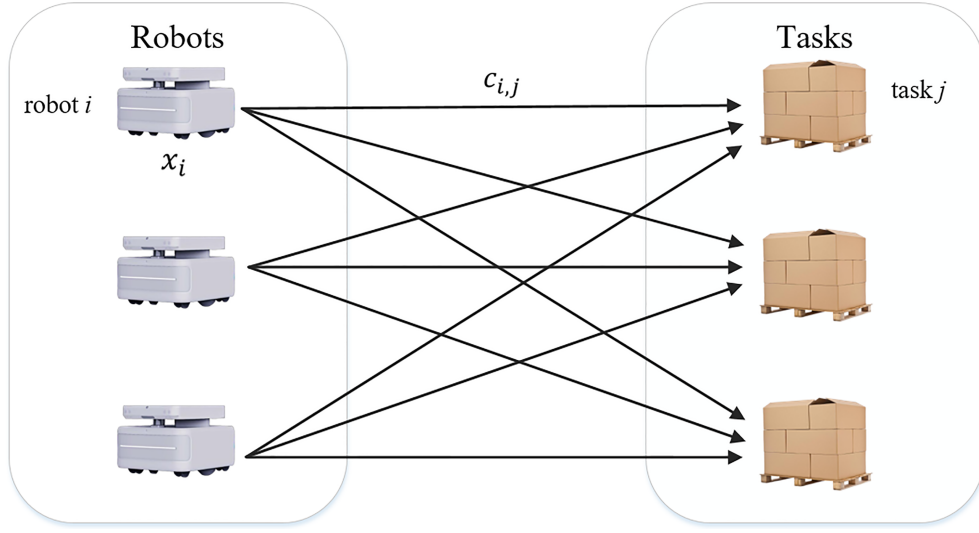


图 5 (网络版彩图) 多机器人任务分配问题.

Figure 5 (Color online) Multi-robot task assignment problem.

的集合为 $c_i = (c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,M})^\top \in \mathbb{R}^M$. 从优化角度来看, 任务分配问题可等效表述为一个整数优化问题. 许多优化方法通过求解其松弛问题进行近似, 尤其当目标函数为线性且约束为仿射时, 这些方法通常能够获得最优分配结果. 具体地, 令机器人 i 的决策变量为 $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,M})^\top \in \mathbb{R}^M$, 其中 $x_{i,j} \in \{0, 1\}$. 若 $x_{i,j} = 1$, 则代表将任务 j 分配给机器人 i ; 若 $x_{i,j} = 0$, 则代表不会将任务 j 分配给机器人 i . 整个任务分配的决策变量为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^\top$. 相关的松弛优化问题的形式为

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & \sum_{i=1}^N c_i^\top x_i \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^N x_i = 1_M, \\
 & 1_M^\top x_i = 1, \\
 & 0 \leq x \leq 1.
 \end{aligned} \tag{22}$$

虽然目标函数是可分离的, 但由于第一个约束中优化变量之间的耦合, 整体优化问题并非可分离. 因此, 可以通过为每个机器人分配 x 的本地副本, 将原问题转化为一个可分离的形式, 从而使其适用于分布式优化方法. 针对松弛凸优化问题, 文献 [149] 利用鞍点动力学, 创新性地提出了基于乐观梯度下降 (optimistic gradient decent ascent, OGDA) 和外梯度 (extra-gradient, EG) 的分布式优化算法, 实现了精确收敛到放松问题的最优解. 具体的建模转化及求解流程可参考文献 [149~152].

(3) 智能电网的分布式经济调度. 经济调度旨在优化发电机组的出力分配, 以实现电力系统运行成本的最小化. 分布式经济调度则通过分布式方式实现经济调度决策, 能够更好地适应现代电力系统中无中心化控制的运行需求. IEEE-39 母线电力系统模型包括 10 台发电机和 39 条母线, 未设立集中控制中心, 完全采用分布式架构. 系统中共有 19 个负载分布在不同母线上, 通信网络由两部分组成: 一部分连接所有发电机控制器, 另一部分连接系统内的所有智能电表. 此外, 每台发电机均与附近的电表相连, 以实时获取潮流信息. 假设电力系统中共有 n_b 个母线, m_l 条输电线路, 以及 n_g 个发电机母线 (假设每个发电机母线都有一台发电机, 若某母线有多台发电机或负载, 分析方法同样适用). 经济

调度问题可以描述如下:

$$\begin{aligned} \min_{P_g} F(P_g) &= \sum_{i=1}^{n_g} F_i(P_{g,i}) \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{i=1}^{n_g} P_{g,i} = P_{\text{load}} + P_{\text{loss}}, \\ &P_{g,i}^{\min} \leq P_{g,i} \leq P_{g,i}^{\max}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $P_{g,i}$ 是第 i 台发电机的有功输出, $F_i(P_{g,i})$ 表示其成本函数, P_{load} 是电力系统的总负荷, P_{loss} 是系统损耗, $P_{g,i}^{\min}$ 和 $P_{g,i}^{\max}$ 分别是第 i 台发电机的输出上下限. 通常, 成本函数 $F_i(P_{g,i})$ 采用二次型表达式, $F_i(P_{g,i}) = \alpha_i + \beta_i P_{g,i} + \gamma_i P_{g,i}^2$, 其中 α_i , β_i 和 γ_i 分别为第 i 台发电机的成本系数. 已有文献 [153~156] 针对带发电容量约束的电网经济调度问题, 系统研究了完全分布式的优化算法.

7 挑战和未来展望

当前多智能体系统分布式优化面临的挑战主要体现在算法对复杂网络环境和非凸约束问题的适应能力有限. 一方面, 现有方法多依赖静态或缓慢变化的网络拓扑假设, 难以有效应对实际系统中频繁的连通性变化、通信链路中断及异构网络结构等复杂场景. 另一方面, 现有分布式优化研究大多聚焦于凸优化问题, 在处理非凸目标和复杂约束时, 算法设计和收敛速度仍显薄弱. 现有方法尚未充分融合连续时间动力学的理论优势, 未能高效应用加速前沿技术, 限制了分布式优化在高可靠性和高计算效率要求下的应用推广.

此外, 分布式优化在动态在线环境下的鲁棒性与安全性同样面临巨大挑战. 系统在面对恶意攻击、数据污染及隐私泄露等风险时, 特别是在隐私保护和黑盒优化等场景下, 尚缺乏系统性的理论与方法. 同时, 物理系统的动态特性要求分布式优化算法能够实时追踪环境变化及动态约束, 但现有优化方法对时变目标和系统扰动的适应性、稳定性和收敛性保障仍待提升. 与此同时, 针对资源受限环境的轻量级算法设计不足, 算法与硬件的协同优化以及在真实平台上的大规模实证验证进展缓慢, 理论成果与实际工程落地之间仍存在明显鸿沟.

面向未来, 多智能体系统分布式优化研究可从以下 4 个方面重点突破.

(1) 突破静态连通性假设, 构建面向复杂动态拓扑的通用算法框架. 亟需突破现有算法对静态或缓慢变化连通图的依赖. 未来研究应着力发展拓扑无关的自适应协同机制, 赋予算法自主感知与应对网络间歇性断连、超图结构表征的高阶交互、拓扑高频动态重组及异构通信链路等极端场景的能力. 需在从传统图到时变有向图乃至超图等动态拓扑环境下, 建立统一的收敛性理论分析框架, 为无人机集群动态编队、深空探测网络等高鲁棒性需求应用提供理论基础.

(2) 融合连续视角, 攻克非凸约束下的分布式加速, 提升大规模分布式优化计算效率. 未来研究应充分利用常微分方程 (ODE) 连续时间模型的理论优势, 实现 Nesterov 加速等先进技术的分布式实现, 构建微分方程引导的通用加速框架. 同时, 需重点突破带 (非线性) 硬约束的分布式非凸优化难题, 通过融合原始-对偶方法处理复杂约束, 并建立算法收敛至 (近似) 临界点或有效解的理论保证, 为系统的快速分布式决策与控制提供理论支撑.

(3) 强化在线学习与反馈优化的鲁棒性与安全性以适应动态环境. 应对动态环境、对抗干扰与隐私风险是在线分布式优化的核心挑战. 未来工作需拓展鲁棒梯度方法及拜占庭容错机制以有效抵御数据污染与对抗攻击; 同时, 发展融合差分隐私与安全多方计算的分布式零阶优化技术, 在保护个体数据隐私的前提下, 解决梯度信息缺失或存在泄露风险的黑盒优化问题. 此外必须紧密结合物理系统 (如智能电网、过程控制) 的动态特性, 设计能够实时跟踪时变目标函数与动态约束的分布式反馈优化算法, 实现物理系统的快速稳定运行.

(4) 推动理论成果的规模化落地. 未来工作需大力开发硬件感知的轻量化算法, 如采用梯度/模型量化、通信稀疏化、事件触发机制及分布式随机优化等技术, 降低通信带宽与计算资源消耗. 同时, 需积极探索算法与专用加速硬件 (如 AI 加速器、低功耗 FPGA) 的协同优化设计. 最终, 通过在真实边缘计算平台 (大规模 IoT、工业物联网 IIoT) 上进行大规模实证验证并推动相关标准构建, 促进理论成果在智能制造、智慧能源网络、智能交通系统及群体机器人等工业场景中的高效、可靠规模化应用.

8 总结

分布式优化作为多智能体系统协同控制与决策的核心技术, 其发展围绕效率提升这一核心挑战展开. 本文系统梳理了多智能体分布式优化领域的研究脉络: 从基础问题模型 (无约束优化、不等式约束优化和集合约束优化) 的建立, 到典型算法 (平均共识和梯度跟踪、原始-对偶框架、投影优化) 的分类解析; 进而聚焦非理想通信网络和非确定性代价函数下的分布式算法设计, 深入剖析了当前研究的核心突破与瓶颈. 面对非理想通信网络, 研究揭示了复杂拓扑和非理想通信链路对算法收敛的制约, 并通过推拉和推和技术、异步通信设计、事件触发机制等策略提升网络适应性. 针对非确定性代价函数, 随机优化方法能够有效处理大规模数据带来的挑战, 而在线优化则更好地应对了信息实时性和动态环境的需求. 尽管当前研究已大幅提升算法在复杂场景下的实用性, 但仍面临诸多亟待解决的共性难题, 例如: 复杂网络环境下算法的适应性仍显不足, 非凸问题的理论保障尚不完善, 在线环境下的鲁棒性有待提升, 以及算法与硬件的协同设计尚未形成系统化方案. 未来, 针对上述问题的持续攻关将进一步推动多智能体分布式优化理论与应用的发展.

参考文献

- 1 Wen G, Yu X, Liu Z. Recent progress on the study of distributed economic dispatch in smart grid: an overview. *Front Inform Technol Electron Eng*, 2021, 22: 25–39
- 2 Lin Z, Liu H H T. Topology-based distributed optimization for multi-UAV cooperative wildfire monitoring. *Optim Control Appl Method*, 2018, 39: 1530–1548
- 3 Hu C F, Yang N, Wang N. Fuzzy multi-objective distributed cooperative tracking of ground target for multiple unmanned aerial vehicles. *Control Theory Appl*, 2018, 35: 1101–1110 [胡超芳, 杨娜, 王娜. 多无人机模糊多目标分布式地面目标协同追踪. *控制理论与应用*, 2018, 35: 1101–1110]
- 4 Meng W, Xie L, Xiao W. Optimal TDOA sensor-pair placement with uncertainty in source location. *IEEE Trans Veh Technol*, 2016, 65: 9260–9271
- 5 Zhang Y, Lou Y, Hong Y, et al. Distributed projection-based algorithms for source localization in wireless sensor networks. *IEEE Trans Wireless Commun*, 2015, 14: 3131–3142
- 6 Yang T, Yi X, Wu J, et al. A survey of distributed optimization. *Annu Rev Control*, 2019, 47: 278–305
- 7 Yang T, Chai T Y. Research status and prospects of distributed collaborative optimization. *Sci Sin Tech*, 2020, 50: 1413–1425 [杨涛, 柴天佑. 分布式协同优化的研究现状与展望. *中国科学: 技术科学*, 2020, 50: 1414–1425]
- 8 Cai Z, Wang L, Zhao J, et al. Virtual target guidance-based distributed model predictive control for formation control of multiple uavs. *Chinese J Aeronaut*, 2020, 33: 293–312
- 9 Yi P, Hong Y G. Distributed cooperative optimization and its applications. *Sci Sin Math*, 2016, 46: 1547–1564 [衣鹏, 洪奕光. 分布式合作优化及其应用. *中国科学: 数学*, 2016, 46: 1547–1564]
- 10 Jiang X, Zeng X L, Sun J, et al. Research status and prospect of distributed optimization for multiple aircraft. *Acta Aeronaut et Astronaut Sin*, 2021, 42: 524551 [姜霞, 曾宪琳, 孙健, 等. 多飞行器的分布式优化研究现状与展望. *航空学报*, 2021, 42: 524551]
- 11 Jiang B T, Wen G H, Zhou J L, et al. Cross-domain cooperative technology of intelligent unmanned swarm systems: current status and prospects. *Chinese J Eng Sci*, 2024, 26: 117–126 [江碧涛, 温广辉, 周佳玲, 郑德智. 智能无人集群系统跨域协同技术研究现状与展望. *中国工程科学*, 2024, 26: 117–126]
- 12 Shi W, Ling Q, Wu G, et al. EXTRA: an exact first-order algorithm for decentralized consensus optimization. *SIAM J Optim*, 2014, 25: 944–966
- 13 Shi W, Ling Q, Wu G, et al. A proximal gradient algorithm for decentralized composite optimization. *IEEE Trans Signal Process*, 2015, 63: 6013–6023

- 14 Mokhtari A, Ribeiro A. DSA: decentralized double stochastic averaging gradient algorithm. In: Proceedings of the 49th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, 2015. 406–410
- 15 Nedić A, Olshevsky A, Shi W. Achieving geometric convergence for distributed optimization over time-varying graphs. *SIAM J Optim*, 2017, 27: 2597–2633
- 16 Xu J, Zhu S, Soh Y C, et al. Convergence of asynchronous distributed gradient methods over stochastic networks. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 434–448
- 17 Nedić A, Olshevsky A, Shi W, et al. Geometrically convergent distributed optimization with uncoordinated step-sizes. In: Proceedings of American Control Conference (ACC), 2017. 3950–3955
- 18 Yuan D M, Xu S Y, Zhao H Y. Distributed primal-dual subgradient method for multiagent optimization via consensus algorithms. *IEEE Trans Syst Man Cybern B*, 2011, 41: 1715–1724
- 19 Zhu M H, Martinez S. On distributed convex optimization under inequality and equality constraints. *IEEE Trans Automat Contr*, 2012, 57: 151–164
- 20 Chang T H, Nedic A, Scaglione A. Distributed constrained optimization by consensus-based primal-dual perturbation method. *IEEE Trans Automat Contr*, 2014, 59: 1524–1538
- 21 Huang Y, Meng Z, Sun J, et al. A unified distributed method for constrained networked optimization via saddle-point dynamics. *IEEE Trans Automat Contr*, 2024, 69: 1818–1825
- 22 Lin T, Jin C, Jordan M I. On gradient descent ascent for nonconvex-concave minimax problems. In: Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning, 2020. 6083–6093
- 23 Jin C, Netrapalli P, Jordan M I. What is local optimality in nonconvex-nonconcave minimax optimization? In: Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning, 2020. 4880–4889
- 24 Lu S, Tsaknakis I, Hong M, et al. Hybrid block successive approximation for one-sided non-convex min-max problems: algorithms and applications. *IEEE Trans Signal Process*, 2020, 68: 3676–3691
- 25 Xu Z, Zhang H, Xu Y, et al. A unified single-loop alternating gradient projection algorithm for nonconvex-concave and convex-nonconcave minimax problems. *Math Program*, 2023, 201: 635–706
- 26 Zhang J, Xiao P, Sun R, et al. A single-loop smoothed gradient descent-ascent algorithm for nonconvex-concave min-max problems. In: Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems, 2020
- 27 Zheng T, Zhu L, So A M C, et al. Universal gradient descent ascent method for nonconvex-nonconcave minimax optimization. In: Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems, 2023. 54075–54110
- 28 Li J, Zhu L, So A M C. Nonsmooth nonconvex-nonconcave minimax optimization: primal-dual balancing and iteration complexity analysis. 2022. ArXiv:2209.10825
- 29 Doostmohammadian M, Aghasi A, Pirani M, et al. Survey of distributed algorithms for resource allocation over multi-agent systems. *Annu Rev Control*, 2025, 59: 100983
- 30 Lian M, Guo Z, Wen S, et al. Distributed adaptive algorithm for resource allocation problem over weight-unbalanced graphs. *IEEE Trans Netw Sci Eng*, 2024, 11: 416–426
- 31 Jiang W, Doostmohammadian M, Charalambous T. Distributed resource allocation via admm over digraphs. In: Proceedings of the 61st Conference on Decision and Control, 2022. 5645–5651
- 32 Nedic A, Ozdaglar A, Parrilo P A. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks. *IEEE Trans Automat Contr*, 2010, 55: 922–938
- 33 Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2009, 54: 48–61
- 34 Srivastava K, Nedic A. Distributed asynchronous constrained stochastic optimization. *IEEE J Sel Top Signal Process*, 2011, 5: 772–790
- 35 Lou Y, Shi G, Johansson K H, et al. Approximate projected consensus for convex intersection computation: convergence analysis and critical error angle. *IEEE Trans Automat Contr*, 2014, 59: 1722–1736
- 36 Shi G, Johansson K H, Hong Y. Reaching an optimal consensus: dynamical systems that compute intersections of convex sets. *IEEE Trans Automat Contr*, 2013, 58: 610–622
- 37 Lee S, Zavlanos M M. Approximate projection methods for decentralized optimization with functional constraints. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 3248–3260
- 38 Frank M, Wolfe P. An algorithm for quadratic programming. *Naval Res Logistics*, 1956, 3: 95–110
- 39 Zhang L, Wang G, Romero D, et al. Randomized block frank-olfe for convergent large-scale learning. *IEEE Trans Signal Process*, 2017, 65: 6448–6461
- 40 Li B, Coutino M, B. Giannakis G, et al. A momentum-guided Frank-Wolfe algorithm. *IEEE Trans Signal Process*, 2021, 69: 3597–3611
- 41 Jaggi M. Revisiting Frank-Wolfe: projection-free sparse convex optimization. In: Proceedings of the 30th

- International Conference on Machine Learning, 2013. 427–435
- 42 Wai H T, Lafond J, Scaglione A, et al. Decentralized Frank-Wolfe algorithm for convex and nonconvex problems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2017, 62: 5522–5537
 - 43 Jiang X, Zeng X, Xie L, et al. Distributed stochastic projection-free algorithm for constrained optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2025, 70: 2479–2494
 - 44 Hou J, Zeng X, Chen C. Distributed gradient-free and projection-free algorithm for stochastic constrained optimization. *Auton Intell Syst*, 2024, 4: 6
 - 45 Duchi J C, Agarwal A, Wainwright M J. Dual averaging for distributed optimization: convergence analysis and network scaling. *IEEE Trans Automat Contr*, 2012, 57: 592–606
 - 46 Jakovetic D, Xavier J M F, Moura J M F. Convergence rates of distributed nesterov-like gradient methods on random networks. *IEEE Trans Signal Process*, 2014, 62: 868–882
 - 47 Tsianos K I, Lawlor S, Rabbat M G. Push-sum distributed dual averaging for convex optimization. In: *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2012. 5453–5458
 - 48 Nedic A, Olshevsky A. Distributed optimization over time-varying directed graphs. *IEEE Trans Automat Contr*, 2015, 60: 601–615
 - 49 Xi C, Khan U A. DEXTRA: a fast algorithm for optimization over directed graphs. *IEEE Trans Automat Contr*, 2017, 62: 4980–4993
 - 50 Zeng J, Yin W. Extrapush for convex smooth decentralized optimization over directed networks. *J Comput Math*, 2017, 35: 381–394
 - 51 Xi C, Xin R, Khan U A. ADD-OPT: accelerated distributed directed optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 1329–1339
 - 52 Du W, Yao L, Wu D, et al. Accelerated distributed energy management for microgrids. In: *Proceedings of the IEEE Power and Energy Society General Meeting*, 2018
 - 53 Xin R, Khan U A. A linear algorithm for optimization over directed graphs with geometric convergence. *IEEE Control Systems Letters*, 2018, 2: 325–330
 - 54 Pu S, Shi W, Xu J, et al. A push-pull gradient method for distributed optimization in networks. In: *Proceedings of the 57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2018. 3385–3390
 - 55 Saadatniai F, Xin R, Khan U A. Optimization over time-varying directed graphs with row and column-stochastic matrices. 2018. [ArXiv:1810.07393](https://arxiv.org/abs/1810.07393)
 - 56 Zhang S, Yi X, George J, et al. Computational convergence analysis of distributed optimization algorithms for directed graphs. In: *Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, 2019
 - 57 Hendrickx J M, Tsitsiklis J N. Fundamental limitations for anonymous distributed systems with broadcast communication. In: *Proceedings of the 53rd Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton)*, 2015. 9–16
 - 58 Xi C, Mai V S, Xin R, et al. Linear convergence in optimization over directed graphs with row-stochastic matrices. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 3558–3565
 - 59 Xin R, Xi C, Khan U A. FROST-fast row-stochastic optimization with uncoordinated step-sizes. *EURASIP J Adv Signal Process*, 2019, 2019: 1–4
 - 60 Lobel I, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for convex optimization over random networks. *IEEE Trans Automat Contr*, 2011, 56: 1291–1306
 - 61 Carli R, Notarstefano G, Schenato L, et al. Analysis of newton-raphson consensus for multi-agent convex optimization under asynchronous and lossy communication. In: *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2015. 418–424
 - 62 Varagnolo D, Zanella F, Cenedese A, et al. Newton-Raphson consensus for distributed convex optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2016, 61: 994–1009
 - 63 Kempe D, Dobra A, Gehrke J. Gossip-based computation of aggregate information. In: *Proceedings of the 44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 2003. 482–491
 - 64 Dominguez-Garcia A D, Hadjicostis C N, Vaidya N H. Resilient networked control of distributed energy resources. *IEEE J Sel Areas Commun*, 2012, 30: 1137–1148
 - 65 Wu J, Yang T, Wu D, et al. Distributed optimal dispatch of distributed energy resources over lossy communication networks. *IEEE Trans Smart Grid*, 2017, 8: 3125–3137
 - 66 Yang T, Lu J, Wu D, et al. A distributed algorithm for economic dispatch over time-varying directed networks with delays. *IEEE Trans Ind Electron*, 2017, 64: 5095–5106

- 67 Oliva G, Franceschelli M, Gasparri A, et al. A sum-of-states preservation framework for open multiagent systems with nonlinear heterogeneous coupling. *IEEE Trans Automat Contr*, 2024, 69: 1991–1998
- 68 Hendrickx J M, Martin S. Open multi-agent systems: Gossiping with random arrivals and departures. In: *Proceedings of the 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, 2017. 763–768
- 69 Monnoyer de Galland C, Hendrickx J M. Fundamental performance limitations for average consensus in open multi-agent systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2023, 68: 646–659
- 70 Hayashi N. Distributed subgradient method in open multiagent systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2023, 68: 6192–6199
- 71 Hsieh Y G, Iutzeler F, Malick J, et al. Optimization in open networks via dual averaging. In: *Proceedings of the 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2021. 514–520
- 72 Hendrickx J M, Rabbat M G. Stability of decentralized gradient descent in open multi-agent systems. In: *Proceedings of the 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2020. 4885–4890
- 73 Liu Y, Ye M, Ding L, et al. Distributed online resource allocation in open networks. *IEEE Trans Automat Contr*, 2024, 69: 8876–8883
- 74 Sawamura R, Hayashi N, Inuiguchi M. A distributed primal-dual push-sum algorithm on open multiagent networks. *IEEE Trans Automat Contr*, 2025, 70: 1192–1199
- 75 Tsitsiklis J N. Problems in decentralized decision making and computation. Dissertation for Ph.D. Degree. Cambridge: MIT, 1984
- 76 Tsianos K I, Rabbat M G. Distributed consensus and optimization under communication delays. In: *Proceedings of the 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton)*, 2011. 974–982
- 77 Lin P, Ren W, Song Y. Distributed multi-agent optimization subject to nonidentical constraints and communication delays. *Automatica*, 2016, 65: 120–131
- 78 Zhao C, Duan X, Shi Y. Analysis of consensus-based economic dispatch algorithm under time delays. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2020, 50: 2978–2988
- 79 Yang T, Wu D, Sun Y, et al. Impacts of time delays on distributed algorithms for economic dispatch. In: *Proceedings of the IEEE Power and Energy Society General Meeting*, 2015
- 80 Yang S, Tan S, Xu J X. Consensus based approach for economic dispatch problem in a smart grid. *IEEE Trans Power Syst*, 2013, 28: 4416–4426
- 81 Kushner H J, Yin G. Asymptotic properties of distributed and communicating stochastic approximation algorithms. *SIAM J Control Optim*, 1987, 25: 1266–1290
- 82 Bianchi P, Jakubowicz J. Convergence of a multi-agent projected stochastic gradient algorithm for non-convex optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2013, 58: 391–405
- 83 SundharRam S, Nedic A, Veeravalli V V. Distributed stochastic subgradient projection algorithms for convex optimization. *J Opt Theory Appl*, 2010, 147: 516–545
- 84 Assran M S, Rabbat M G. Asynchronous gradient push. *IEEE Trans Automat Contr*, 2021, 66: 168–183
- 85 Zhang J, You K. AsySPA: an exact asynchronous algorithm for convex optimization over digraphs. *IEEE Trans Automat Contr*, 2020, 65: 2494–2509
- 86 Tian Y, Sun Y, Scutari G. Achieving linear convergence in distributed asynchronous multiagent optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2020, 65: 5264–5279
- 87 Nie R, Du W, Wang T, et al. Distributed asynchronous optimization of multiagent systems: convergence analysis and its application. *IEEE Trans Ind Inf*, 2024, 20: 8983–8992
- 88 Wei E, Ozdaglar A. On the $o(1/k)$ convergence of asynchronous distributed alternating direction method of multipliers. In: *Proceedings of IEEE Global Conference on Signal and Information Processing*, Austin, 2013. 551–554
- 89 Li H, Lu Q, Chen G, et al. Distributed constrained optimization over unbalanced directed networks using asynchronous broadcast-based algorithm. *IEEE Trans Automat Contr*, 2021, 66: 1102–1115
- 90 Ding L, Han Q L, Ge X, et al. An overview of recent advances in event-triggered consensus of multiagent systems. *IEEE Trans Cybern*, 2018, 48: 1110–1123
- 91 Nowzari C, Garcia E, Cortés J. Event-triggered communication and control of networked systems for multi-agent consensus. *Automatica*, 2019, 105: 1–27
- 92 Yi X, Yang T, Wu J, et al. Distributed event-triggered control for global consensus of multi-agent systems with input saturation. *Automatica*, 2019, 100: 1–9
- 93 Zhang Y, Sun J, Liang H, et al. Event-triggered adaptive tracking control for multiagent systems with unknown disturbances. *IEEE Trans Cybern*, 2020, 50: 890–901
- 94 Jiang X, Zeng X, Sun J, et al. Distributed hybrid impulsive algorithm with supervisory resetting for nonlinear

- optimization problems. *Intl J Robust Nonlinear*, 2021, 31: 3230–3247
- 95 Kia S S, Cortés J, Martínez S. Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication. *Automatica*, 2015, 55: 254–264
 - 96 Lu J, Tang C Y. Zero-gradient-sum algorithms for distributed convex optimization: the continuous-time case. *IEEE Trans Automat Contr*, 2012, 57: 2348–2354
 - 97 Chen W, Ren W. Event-triggered zero-gradient-sum distributed consensus optimization over directed networks. *Automatica*, 2016, 65: 90–97
 - 98 Liu J, Chen W. Distributed convex optimisation with event-triggered communication in networked systems. *Int J Syst Sci*, 2016, 47: 3876–3887
 - 99 Du W, Yi X, George J, et al. Distributed optimization with dynamic event-triggered mechanisms. In: *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2018. 969–974
 - 100 Tran N T, Wang Y W, Liu X K, et al. Distributed optimization problem for second-order multi-agent systems with event-triggered and time-triggered communication. *J Franklin Inst*, 2019, 356: 10196–10215
 - 101 Yi X, Yao L, Yang T, et al. Distributed optimization for second-order multi-agent systems with dynamic event-triggered communication. In: *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2018. 3397–3402
 - 102 Liu S, Xie L, Quevedo D E. Event-triggered quantized communication-based distributed convex optimization. *IEEE Trans Control Netw Syst*, 2018, 5: 167–178
 - 103 Li Z, Liu B, Ding Z. Consensus-based cooperative algorithms for training over distributed data sets using stochastic gradients. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2022, 33: 5579–5589
 - 104 Li W, Wu Z, Chen T, et al. Communication-censored distributed stochastic gradient descent. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2022, 33: 6831–6843
 - 105 Yuan D, Ho D W C, Xu S. Stochastic strongly convex optimization via distributed epoch stochastic gradient algorithm. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2021, 32: 2344–2357
 - 106 Yu Z, Ho D W C, Yuan D. Distributed randomized gradient-free mirror descent algorithm for constrained optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2022, 67: 957–964
 - 107 Lei J, Chen H F, Fang H T. Asymptotic properties of primal-dual algorithm for distributed stochastic optimization over random networks with imperfect communications. *SIAM J Control Optim*, 2018, 56: 2159–2188
 - 108 Defazio A, Bach F, Lacoste-Julien S. SAGA: a fast incremental gradient method with support for non-strongly convex composite objectives. In: *Proceedings of the 27th International Conference on Neural Information Processing Systems*, 2014. 1646–1654
 - 109 Johnson R, Zhang T. Accelerating stochastic gradient descent using predictive variance reduction. In: *Proceedings of the 26th International Conference on Neural Information Processing Systems*, 2013. 315–323
 - 110 Nguyen L M, Liu J, Scheinberg K, et al. SARAH: a novel method for machine learning problems using stochastic recursive gradient. In: *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning*, 2017. 2613–2621
 - 111 Lei J, Shanbhag U V. Asynchronous variance-reduced block schemes for composite non-convex stochastic optimization: block-specific steplengths and adapted batch-sizes. *Opt Method Softw*, 2020, 37: 264–294
 - 112 Xin R, Khan U A, Kar S. Variance-reduced decentralized stochastic optimization with accelerated convergence. *IEEE Trans Signal Process*, 2020, 68: 6255–6271
 - 113 Sun H, Lu S, Hong M. Improving the sample and communication complexity for decentralized non-convex optimization: joint gradient estimation and tracking. In: *Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning*, 2020. 9217–9228
 - 114 Xin R, Khan U A, Kar S. Fast decentralized nonconvex finite-sum optimization with recursive variance reduction. *SIAM J Optim*, 2022, 32: 1–28
 - 115 Gürbüzbalaban M, Ozdaglar A, Parrilo P A. Why random reshuffling beats stochastic gradient descent. *Math Program*, 2021, 186: 49–84
 - 116 Meng Q, Chen W, Wang Y, et al. Convergence analysis of distributed stochastic gradient descent with shuffling. *Neurocomputing*, 2019, 337: 46–57
 - 117 Mishchenko K, Khaled A, Richtárik P. Random reshuffling: simple analysis with vast improvements. In: *Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems*, 2020. 17309–17320
 - 118 Ying B, Yuan K, Sayed A H. Variance-reduced stochastic learning under random reshuffling. *IEEE Trans Signal Process*, 2020, 68: 1390–1408
 - 119 Nguyen L M, Tran-Dinh Q, Phan D T, et al. A unified convergence analysis for shuffling-type gradient methods. *J Mach Learn Res*, 2021, 22: 1–44
 - 120 Huang K, Li X, Milzarek A, et al. Distributed random reshuffling over networks. *IEEE Trans Signal Process*, 2023,

- 71: 1143–1158
- 121 Jiang X, Zeng X, Sun J, et al. Distributed stochastic proximal algorithm with random reshuffling for nonsmooth finite-sum optimization. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2024, 35: 4082–4096
 - 122 Malinovsky G, Sailanbayev A, Richtárik P. Random reshuffling with variance reduction: new analysis and better rates. In: *Proceedings of the 39th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, 2023. 1347–1357
 - 123 Jiang X, Zeng X, Xie L, et al. Variance-reduced reshuffling gradient descent for nonconvex optimization: Centralized and distributed algorithms. *Automatica*, 2025, 171: 111954
 - 124 Bürger M, Notarstefano G, Allgöwer F. A polyhedral approximation framework for convex and robust distributed optimization. *IEEE Trans Autom Control*, 2014, 59: 384–395
 - 125 Bertsimas D, Gupta V, Kallus N. Data-driven robust optimization. *Math Program*, 2018, 167: 235–292
 - 126 Yang Y, Lei J. Analysis of coupled distributed stochastic approximation for misspecified optimization. *Neurocomputing*, 2025, 622: 129310
 - 127 Hosseini S, Chapman A, Mesbahi M. Online distributed convex optimization on dynamic networks. *IEEE Trans Automat Contr*, 2016, 61: 3545–3550
 - 128 Shahrapour S, Jadbabaie A. Distributed online optimization in dynamic environments using mirror descent. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 714–725
 - 129 Yi X, Li X, Yang T, et al. Distributed online convex optimization with time-varying constraints: tighter cumulative constraint violation bounds under Slater's condition. *IEEE Trans Autom Control*, 2025, 70: 5764–5779
 - 130 Lu K, Xu H. Online distributed optimization with strongly pseudoconvex-sum cost functions and coupled inequality constraints. *Automatica*, 2023, 156: 111203
 - 131 Li X, Yi X, Xie L. Distributed online optimization for multi-agent networks with coupled inequality constraints. *IEEE Trans Automat Contr*, 2021, 66: 3575–3591
 - 132 Lacoste-Julien S, Jaggi M, Schmidt M, et al. Block-coordinate Frank-Wolfe optimization for structural SVMs. In: *Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning*, 2013. 53–61
 - 133 Zhang W, Zhao P, Zhu W, et al. Projection-free distributed online learning in networks. In: *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning*, 2017. 4054–4062
 - 134 Elad Hazan S K. Projection-free online learning. In: *Proceedings of the International Conference on Machine Learning*, 2012. 1843–1850
 - 135 Wang Y, Wan Y, Zhang S, et al. Distributed projection-free online learning for smooth and convex losses. *AAAI*, 2023, 37: 10226–10234
 - 136 Dekel O, Gilad-Bachrach R, Shamir O, et al. Optimal distributed online prediction using mini-batches. *J Mach Learn Res*, 2012, 13: 165–202
 - 137 Thang N K, Srivastav A, Trystram D, et al. A stochastic conditional gradient algorithm for decentralized online convex optimization. *J Parallel Distr Comput*, 2022, 169: 334–351
 - 138 Cao X, Başar T. Decentralized online convex optimization based on signs of relative states. *Automatica*, 2021, 129: 109676
 - 139 Lei J, Yi P, Hong Y, et al. Online convex optimization over erdos-renyi random networks. In: *Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems*, 2020. 15591–15601
 - 140 Yuan D, Proutiere A, Shi G. Distributed online optimization with long-term constraints. *IEEE Trans Automat Contr*, 2022, 67: 1089–1104
 - 141 Li J, Li C, Yu W, et al. Distributed online bandit learning in dynamic environments over unbalanced digraphs. *IEEE Trans Netw Sci Eng*, 2021, 8: 3034–3047
 - 142 Pang Y, Hu G. Randomized gradient-free distributed online optimization with time-varying cost functions. In: *Proceedings of the 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, 2019. 4910–4915
 - 143 Yi X, Li X, Yang T, et al. Distributed bandit online convex optimization with time-varying coupled inequality constraints. *IEEE Trans Automat Contr*, 2021, 66: 4620–4635
 - 144 Li X, Xie L, Li N. A survey on distributed online optimization and online games. *Annu Rev Control*, 2023, 56: 100904
 - 145 He Z, Bolognani S, He J, et al. Model-free nonlinear feedback optimization. *IEEE Trans Automat Contr*, 2024, 69: 4554–4569
 - 146 Wang W, He Z, Belgioioso G, et al. Online feedback optimization over networks: a distributed model-free approach. In: *Proceedings of the 63rd Conference on Decision and Control (CDC)*, 2024
 - 147 Chang T H, Hong M, Liao W C, et al. Asynchronous distributed admm for large-scale optimization—part I: algorithm and convergence analysis. *IEEE Trans Signal Process*, 2016, 64: 3118–3130
 - 148 Hong M. A distributed, asynchronous, and incremental algorithm for nonconvex optimization: an ADMM approach.

- IEEE Trans Control Netw Syst, 2018, 5: 935–945
- 149 Huang Y, Kuai J, Cui S, et al. Distributed algorithms via saddle-point dynamics for multi-robot task assignment. IEEE Robot Autom Lett, 2024, 9: 11178–11185
- 150 Liu L, Shell D A. Optimal market-based multi-robot task allocation via strategic pricing. Robot Sci Syst, 2013, 9: 33–40
- 151 Giordani S, Lujak M, Martinelli F. A distributed algorithm for the multi-robot task allocation problem. In: Proceedings of the 23rd International Conference on Industrial Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems, 2010. 721–730
- 152 Haksar R N, Shorhiwa O, Washington P, et al. Consensus-based admm for task assignment in multi-robot teams. In: Proceedings of the International Symposium of Robotics Research, 2019. 35–51
- 153 Yi P, Hong Y, Liu F. Initialization-free distributed algorithms for optimal resource allocation with feasibility constraints and application to economic dispatch of power systems. Automatica, 2016, 74: 259–269
- 154 Cherukuri A, Cortes J. Distributed generator coordination for initialization and anytime optimization in economic dispatch. IEEE Trans Control Netw Syst, 2015, 2: 226–237
- 155 Zhang W, Liu W, Wang X, et al. Online optimal generation control based on constrained distributed gradient algorithm. IEEE Trans Power Syst, 2015, 30: 35–45
- 156 Zhao C, Topcu U, Li N, et al. Design and stability of load-side primary frequency control in power systems. IEEE Trans Automat Contr, 2014, 59: 1177–1189

Survey and prospects of distributed optimization in multi-agent systems

Xia JIANG¹, Xianlin ZENG², Jian SUN^{2,3*} & Jie CHEN^{2,4}

1. *Department of Mechanical Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong 999077, China*

2. *National Key Laboratory of Autonomous Intelligent Unmanned Systems, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*

3. *Beijing Institute of Technology Chongqing Innovation Center, Chongqing 401120, China*

4. *School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*

* Corresponding author. E-mail: sunjian@bit.edu.cn

Abstract With deeper research into multi-agent systems and increasing practical application demands, distributed optimization has garnered significant attention from both academia and industry in recent years. Enhancing algorithmic efficiency has become a core challenge in this field. This paper presents a survey of distributed optimization algorithms for multi-agent systems. First, the research background, fundamental definitions, and core problem models are introduced. Subsequently, the paper systematically reviews classical distributed optimization algorithms. Furthermore, from the two key dimensions of non-ideal communication networks and non-deterministic cost functions, it explores the core design ideas, bottlenecks, and improvement strategies of current algorithms. Finally, this paper presents application examples and unique value of distributed optimization in unmanned systems, industrial Internet of Things, and smart grids. By summarizing and reviewing existing research findings, this paper aims to offer a valuable reference for researchers in the field and provides a forward-looking perspective on future research directions.

Keywords distributed optimization, multi-agent systems, non-ideal communication network, non-deterministic cost function, algorithm design