



基于影响力函数的自适应鲁棒卡尔曼滤波

薛为, 栾小丽*, 赵顺毅, 刘飞

江南大学轻工过程先进控制教育部重点实验室, 无锡 214122

* 通信作者. E-mail: xlluan@jiangnan.edu.cn

收稿日期: 2024-07-16; 修回日期: 2024-10-17; 接受日期: 2025-01-08; 网络出版日期: 2025-02-18

江苏省研究生科研与实践创新计划 (批准号: KYCX23_2437) 和国家自然科学基金 (批准号: 61991402, 61973136) 资助项目

摘要 为解决卡尔曼 (Kalman) 滤波的工程应用难题, 现有方法往往以过多的性能损失为代价来增强滤波算法鲁棒性, 从而导致估计性能下降. 为进一步提升滤波精度, 本文借助于影响力函数, 构建基于黎卡提 (Riccati) 方程的自适应鲁棒卡尔曼滤波 (adaptive robust Kalman filter, ARKF) 算法, 削弱不确定性影响的同时, 最小化性能损失. 首先, 利用影响力函数实时感知并量化不确定性影响; 其次, 根据量化结果反演不确定性导致的观测偏移量; 然后, 根据观测偏移量实时放缩黎卡提方程先验信息上界, 实现卡尔曼滤波鲁棒性的自适应调整, 减小性能损失; 最后, 通过数值仿真以及在四容水箱实验中的应用, 证实所提算法的有效性及优越性.

关键词 卡尔曼滤波, 自适应鲁棒滤波, 影响力函数, 黎卡提方程, 不确定性

1 引言

状态估计是指根据可获得观测信息重建变量, 同时过滤掉不确定性, 以获得系统状态准确可靠的估计值^[1~5]. 追溯状态估计理论根源, 可以一直追溯到 20 世纪 50 年代: 为解决防空火力的控制问题, Wiener 等^[6]首次在线性滤波、预测问题中引入了统计学概念, 在频域内求解了针对平稳随机信号的最优估计问题. 随着空间导航等技术的迅猛发展, Kalman 和 Bucy^[7]在 1960 年将 Wiener 的思想从频域内的平稳随机信号扩展到了时域内的非平稳随机信号, 提出了著名的卡尔曼滤波 (Kalman filter, KF). 卡尔曼滤波采用递推结构, 突破了平稳性和单变量的限制, 通过求解一个便于计算机数值求解的非线性微分方程——黎卡提方程 (Riccati equation), 巧妙地解决了非平稳随机信号的最优估计问题^[8]. 卡尔曼滤波简单、直观 (无需频域的分析与设计), 估计结果为全局最优且便于计算机实现. 因此, 被广泛应用于空间、导航技术及机器人等领域, 并取得了巨大的成功^[9~13]. 卡尔曼滤波的巨大成功促使学者们尝试着将其应用于工业过程, 对工业系统中难以测量的一些状态变量进行估计. 然而, 由于工业系统的复杂性, 所建模型难以匹配实际系统, 外部扰动难以服从高斯 (Gauss)、白噪声等统计特性. 这些因素均极大地限制了卡尔曼滤波在实际工业系统中的应用, 甚至会导致“发散”现象^[14]. 但也正因为如此, 模型失配且干扰未知等不确定性下的卡尔曼滤波改进研究得到了广泛关注.

引用格式: 薛为, 栾小丽, 赵顺毅, 等. 基于影响力函数的自适应鲁棒卡尔曼滤波. 中国科学: 信息科学, 2025, 55: 601–618, doi: 10.1360/SSI-2024-0213

Xue W, Luan X L, Zhao S Y, et al. An adaptive robust Kalman filter based on influence function. Sci Sin Inform, 2025, 55: 601–618, doi: 10.1360/SSI-2024-0213

针对不确定性下状态估计问题,两种主流的卡尔曼滤波改进方式应运而生.一种改进方式通过观测信息更新模型参数或噪声统计特性,从而消除不确定性对估计误差的影响,被称为自适应卡尔曼滤波(adaptive Kalman filter, AKF).如文献[15]提出用于全球导航卫星系统的第五代混合定位多速率自适应卡尔曼滤波,其会自适应更新观测噪声协方差矩阵;文献[16]提出的自适应卡尔曼滤波利用观测信息,基于最大似然准则更新过程和观测噪声协方差.随后,变分贝叶斯(variational Bayesian, VB)方法也被用于更新过程和观测噪声的协方差[17].自适应卡尔曼滤波更擅长处理高斯噪声统计特性相关不确定性.处理除此之外的不确定性,则需要更多的先验信息.如变分贝叶斯卡尔曼滤波(variational Bayesian Kalman filter, VBKF)[18]需要已知观测矩阵不确定性均值进而自适应更新观测矩阵.

另一种改进方式考虑不确定性,在最坏的情况下设计滤波算法,使估计性能在可接受的范围内,被称为鲁棒卡尔曼滤波(robust Kalman filter, RKF).其一大策略是通过寻求更加符合工程实际的概率密度函数来增强算法对不确定参数或特定干扰的免疫能力.如文献[19]通过马氏距离和Kullback-Leibler(KL)距离利用混合高斯描述过程和量测噪声;鲁棒椭圆卡尔曼滤波(robust elliptically contoured Kalman filter, RECKF)[20]采用混合高斯或 t 分布形成的椭圆柱体来描述观测噪声以此增强算法对各类不确定性的鲁棒性.类似地,倾斜 t 分布、逆威沙特分布也可被用来匹配实际系统中噪声量测噪声的长尾、非对称等特征[21].与传统高斯分布相比,该思路的本质是赋予远离分布中心值更大的概率密度,以此获得对潜在不确定性更大的包容性.同样以鲁棒化为目的,另一策略是增大先验信息的协方差以此来减小时间尺度上不确定性的传递.例如记忆衰退滤波(fading memory Kalman filter, FKF)[22]利用遗忘因子减小历史数据权重获得鲁棒性; H_∞ 滤波(H_∞ filter, HF)[5,23]通过对最大估计误差最小化增大观测权重使估计误差有界的方式获得鲁棒性.为了结合鲁棒卡尔曼滤波和自适应卡尔曼滤波的优点,鲁棒自适应卡尔曼滤波(robust adaptive Kalman filter, RAKF)同时使用自适应结构和鲁棒结构对不同的不确定性分别进行处理.例如文献[24]对观测和过程噪声协方差实施自适应参数更新,同时对故障数据使用鲁棒性结构;文献[25]对观测离群值使用鲁棒结构并对观测噪声协方差实施自适应更新.鲁棒自适应滤波并没有对自适应结构和鲁棒结构进行改变,所以在继承二者优点的同时也沿袭了二者的缺点.

鲁棒卡尔曼滤波很好地削弱了不确定性的影响.然而,鲁棒卡尔曼滤波是以性能损失为代价换取鲁棒性,所以往往会因为保守性(鲁棒性冗余)使得估计性能下降.除此之外,大多数卡尔曼滤波鲁棒化改进都依赖于根据经验人为设定的鲁棒参数,此举有可能导致更多的性能损失.为解决上述问题,本文提出一种自适应鲁棒卡尔曼滤波(adaptive robust Kalman filter, ARKF)算法.利用影响力函数感知环境不确定性和其对估计性能的影响,并进一步根据实时感知结果放缩卡尔曼滤波先验信息协方差上界,从而实现卡尔曼滤波鲁棒性的自适应调整.与现有方法相比,本文的贡献如下:

- 无需人为设置鲁棒相关参数,根据反演观测偏移量自适应地调整黎卡提方程的先验信息上界;
- 所提自适应鲁棒卡尔曼滤波利用自适应结构对鲁棒滤波进行了改进,一定程度上改善了鲁棒卡尔曼滤波鲁棒性容易冗余的缺点;
- 所提自适应鲁棒卡尔曼滤波可以根据不同的环境和模型参数,自适应调节滤波算法的鲁棒性;
- 所提自适应鲁棒卡尔曼滤波可以感知观测向量各维不确定性信息,并投影到状态向量上实现针对状态向量各维度的差异化调整.

2 问题描述

2.1 卡尔曼滤波

考虑如下经后向欧拉算法(backward Euler method, BE[26])得到的离散状态空间方程:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n, \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n, \quad (2)$$

其中, $n \in N$ 表示时间步, $\mathbb{R}^M$ 表示 M 维欧氏空间, $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{M_1}$ 为系统状态向量, $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^{M_2}$ 为系统观测向量, $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^{M_3}$ 为系统控制向量, $\mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_1}$ 为状态转移矩阵, $\mathbf{E}_n \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_3}$ 为系统控制矩阵, $\mathbf{C}_n \in \mathbb{R}^{M_2 \times M_1}$ 为系统观测矩阵, 过程噪声向量 $\mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^{M_1}$ 和观测噪声向量 $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^{M_2}$ 是均值为 0 且协方差分别为 $\mathbf{Q}_n = \mathbb{E}\{\mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^T\}$ 和 $\mathbf{R}_n = \mathbb{E}\{\mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T\}$ 的高斯噪声, 并且向量 $\mathbf{w}_k$ 和 $\mathbf{v}_n$ 对任意 k 和 n 时刻是相互独立且无关的.

卡尔曼滤波目标为估计状态 $\mathbf{x}_n$, 其对应卡尔曼估计值为 $\hat{\mathbf{x}}_n$. 利用从初始到 n 时刻的所有观测数据进行状态误差的期望值最小估计, 即

$$\min \mathbb{E}[(\mathbf{e}_n^x)^T \mathbf{S}_n \mathbf{e}_n^x], \quad (3)$$

其中, $\mathbf{e}_n^x = \mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n$ 为 KF 估计误差, $\mathbf{S}_n \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_1}$ 为人为给定的正定加权矩阵. 基于上述目标 (3), 获得目标函数为 [27]

$$J_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \|\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k\|_{\mathbf{R}_k^{-1}}^2 + \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-\|_{(\mathbf{P}_k^-)^{-1}}^2 - \|\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-\|_{(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}}^2 \right\}, \quad (4)$$

其中, $\|\Phi_n\|_{\mathbf{P}_n}$ 表示 $\Phi_n^T \mathbf{P}_n \Phi_n$. 基于式 (4), 估计问题 (3) 等价转换为下述优化问题:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \arg \min_{\mathbf{x}_n} J_n. \quad (5)$$

给定初始分布 $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0^\delta; \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)$ 和噪声协方差 $\mathbf{Q}_n$ 和 $\mathbf{R}_n$, 基于模型 (1) 和 (2), 式 (5) 中 J_n 可以被卡尔曼滤波 (Kalman filter, KF [5, 28]) 最小化, 即

$$\hat{\mathbf{x}}_n^- = \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n, \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_n^- = \mathbf{A}_n \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{A}_n^T + \mathbf{Q}_n, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_n = [(\mathbf{P}_n^-)^{-1} + \mathbf{C}_n^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C}_n]^{-1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^T \mathbf{R}_n^{-1}, \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n^- + \mathbf{K}_n (\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_n \hat{\mathbf{x}}_n^-), \quad (10)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}_n$ 为 KF 后验状态估计值, $(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_n \hat{\mathbf{x}}_n^-)$ 为 KF 新息, $\mathbf{K}_n$ 为 KF 增益, $\hat{\mathbf{x}}_n^-$ 为 KF 先验状态估计值, $\mathbf{P}_n^- = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n^-)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n^-)^T]$ 为先验误差协方差矩阵, 以及 $\mathbf{P}_n = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T]$ 为后验误差协方差矩阵. 将式 (8) 代入式 (7) 得 KF 代数黎卡提方程为

$$\mathbf{P}_n^- = \mathbf{A}_n \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{A}_n^T + \mathbf{Q}_n - \mathbf{A}_n \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{C}_{n-1}^T (\mathbf{C}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{C}_{n-1}^T + \mathbf{R}_{n-1})^{-1} \mathbf{C}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{A}_n^T. \quad (11)$$

上述代数黎卡提方程揭示了不经过中间变量 $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{P}_n^-$ 可以通过代数关系 (11) 由 $\mathbf{P}_{n-1}^-$ 直接推导得到. 同时, 当 $\mathbf{P}_n^-$ 收敛, 黎卡提方程 (11) 所得解 $\mathbf{P}_n^-$ 生成估计值对应于优化问题 (5) 最优解.

2.2 不确定性系统的状态估计

当线性高斯系统存在建模误差或受到未知干扰时, 系统矩阵和噪声 $\mathbf{A}_n, \mathbf{E}_n, \mathbf{C}_n, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n$ 受未知不确定 $\Delta \mathbf{A}_n, \Delta \mathbf{E}_n, \Delta \mathbf{C}_n, \bar{\mathbf{w}}_n, \bar{\mathbf{v}}_n$ 影响, 状态空间模型转换为

$$\mathbf{x}_n = (\mathbf{A}_n + \Delta \mathbf{A}_n) \mathbf{x}_{n-1} + (\mathbf{E}_n + \Delta \mathbf{E}_n) \mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n + \bar{\mathbf{w}}_n, \quad (12)$$

$$\mathbf{y}_n = (\mathbf{C}_n + \Delta \mathbf{C}_n) \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n + \bar{\mathbf{v}}_n, \quad (13)$$

其中, $\mathbf{x}_n$ 为状态向量, $\mathbf{y}_n$ 为观测向量, $\mathbf{u}_n$ 为控制向量, $\bar{\mathbf{w}}_n \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_1}$ 为未知过程干扰向量, $\bar{\mathbf{v}}_n \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_2}$ 为未知观测干扰向量, $\Delta \mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1}$ 为未知状态转移失配矩阵, $\Delta \mathbf{E}_n \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_3}$ 为未知控制失配矩阵, $\Delta \mathbf{C}_n \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_1}$ 为未知观测失配矩阵. 不确定性根据类型可以分为模型失配 ($\Delta \mathbf{A}_n, \Delta \mathbf{E}_n, \Delta \mathbf{C}_n$) 和未知干扰 ($\bar{\mathbf{w}}_n, \bar{\mathbf{v}}_n$). 不确定性及其所含任意元素可以为 0、常值、符合任意分布的随机变量等.

注1 模型中任意加性不确定性均可以等价转换为乘性不确定性, 例如 $(\mathbf{A}_n + \Delta \mathbf{A}_n) = \mathbf{A}_n \times \Delta \mathbf{A}'_n$ 或 $(\mathbf{A}_n + \Delta \mathbf{A}_n) = \mathbf{A}_n \otimes \Delta \mathbf{A}'_n$, 其中 $\otimes$ 表示点乘, 即矩阵对应元素分别相乘.

根据模型 (1), (2) 和 (10), 得 KF 新息为

$$\mathbf{e}_n^y = \mathbf{y}_n - \mathbf{C}_n \hat{\mathbf{x}}_n^- = \mathbf{C}_n \mathbf{A}_n \mathbf{e}_{n-1}^x + \mathbf{C}_n \mathbf{w}_n + \mathbf{v}_n, \quad (14)$$

其中, $\mathbf{e}_n^y$ 为 KF 新息, $\mathbf{e}_{n-1}^x = \mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}$ 为 $n-1$ 时刻 KF 估计误差.

根据不确定性模型 (12) 和 (13), 得不确定性下滤波新息为

$$\tilde{\mathbf{e}}_n^y = \mathbf{y}_n - \mathbf{C}_n \tilde{\mathbf{x}}_n^- = \mathbf{C}_n \mathbf{A}_n \tilde{\mathbf{e}}_{n-1}^x + \mathbf{C}_n \mathbf{w}_n + \mathbf{v}_n + \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{w}}_n + \bar{\mathbf{v}}_n + \mathbf{C}_n \Delta \mathbf{A}_n \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{C}_n \Delta \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n, \quad (15)$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}}_n^- = \mathbf{A}_n \tilde{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n$ 为不确定性下先验估计, $\tilde{\mathbf{x}}_n$ 为不确定性下估计值, $\tilde{\mathbf{e}}_n^y$ 为不确定性新息, $\tilde{\mathbf{e}}_{n-1}^x = \mathbf{x}_{n-1} - \tilde{\mathbf{x}}_{n-1}$ 为 $n-1$ 时刻估计误差.

不确定性有可能作用于系统任意位置, 但只会通过传感器测量得到的实时观测信息进行表征. 所以不确定性影响的感知与解析需要依赖于观测 $\mathbf{y}_n$. 具体来说, 不确定性会使得观测反生偏移. 根据高斯噪声下模型 (1) 和 (2)、不确定性模型 (12) 和 (13)、KF 新息 (14) 和不确定性新息 (17), 定义观测偏移量 δ_n 为

$$\begin{aligned} \delta_n &\triangleq \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^\delta = \mathbf{y}_n - \mathbf{C}_n \tilde{\mathbf{x}}_n^- - (\mathbf{y}_n^\delta - \mathbf{C}_n \hat{\mathbf{x}}_n^-) + \mathbf{C}_n (\tilde{\mathbf{x}}_n^- - \hat{\mathbf{x}}_n^-) = \tilde{\mathbf{e}}_n^y - \mathbf{e}_n^y + \mathbf{C}_n \mathbf{A}_n (\tilde{\mathbf{x}}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) \\ &= \mathbf{C}_n \Delta \mathbf{A}_n \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{C}_n \Delta \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{w}}_n + \bar{\mathbf{v}}_n + \mathbf{C}_n \mathbf{A}_n (\tilde{\mathbf{x}}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}), \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\mathbf{y}_n$ 为高斯噪声与不确定性共同作用下观测, 与式 (13) 和 (15) 中观测相同; 为便于区分, 使用 $\mathbf{y}_n^\delta$ 表述高斯噪声下观测, 与式 (2) 和 (14) 中观测 $\mathbf{y}_n$ 相同; δ_n 为不确定性导致的观测偏移量. 即不确定性使得观测从 $\mathbf{y}_n^\delta$ 偏离到 $\mathbf{y}_n$, 其中所发生偏移量 $\delta_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^\delta$.

给定模型 (12) 和 (13), 使用 KF 算法 (6) ~ (10), 得到不确定性下的 KF 估计值为

$$\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta = \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{K}_n [\mathbf{C}_n \Delta \mathbf{A}_n \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{C}_n \Delta \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{w}}_n + \Delta \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n + \bar{\mathbf{v}}_n + \mathbf{C}_n \mathbf{A}_n (\tilde{\mathbf{x}}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})], \quad (17)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta$ 为受不确定性影响偏离最优的 KF 估计值. KF 增益 $\mathbf{K}_n$ 可以最优地处理统计特性已知的 KF 新息, 而不适合处理不确定性新息. 不确定性会导致 KF 估计性能下降、估计误差增大甚至发散. 而鲁棒卡尔曼滤波会在不确定性最大的情况下设计参数, 易导致不必要的性能损失.

3 基于影响力函数的自适应鲁棒卡尔曼滤波

为解决不确定性下卡尔曼滤波性能下降问题, 本文提出一种基于影响力函数的自适应鲁棒卡尔曼滤波 (adaptive robust Kalman filter, ARKF). 利用影响力函数感知不确定性, 并根据感知结果自适应地调节鲁棒性, 在减小不确定性影响的同时最小化性能损失.

3.1 不确定性黎卡提方程

不确定性下 $\mathbf{x}_n$ 的估计值定义为 $\tilde{\mathbf{x}}_n$. 存在不确定性时的估计问题可以转换为如下优化问题:

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = \arg \min_{\mathbf{x}_n} \left\{ \sum_{k=0}^n \tilde{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \right\}, \quad (18)$$

其中,

$$\tilde{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) = F_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k^\delta) + f_k(\Delta \mathbf{A}_k, \Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{C}_k, \bar{\mathbf{w}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k), \quad (19)$$

$$F_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k^\delta) = \|\mathbf{y}_k^\delta - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k\|_{\mathbf{R}_k^{-1}}^2 + \|\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k^-\|_{(\mathbf{P}_k^-)^{-1}}^2 - \|\mathbf{y}_k^\delta - \mathbf{C}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^-\|_{(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}}^2, \quad (20)$$

$\|\Phi_k\|_{\mathbf{P}_k}^2$ 表示 $\Phi_k^T \mathbf{P}_k \Phi_k$; $\tilde{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{E}_k \mathbf{u}_k$ 为 ARKF 模型预测值, 也被称为先验估计; $f_k(\Delta \mathbf{A}_k, \Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{C}_k, \bar{\mathbf{w}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ 表示不确定性对优化过程的影响. 对比模型 (1) 和 (2) 与不确定性模型 (12) 和 (13) 可得, 各不确定性 $(\Delta \mathbf{A}_k, \Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{C}_k, \bar{\mathbf{w}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k)$ 分别通过不同途径影响目标函数, 使得观测 $\mathbf{y}_k^\delta$ 偏离到 $\mathbf{y}_k$, 进而影响 $\tilde{\mathbf{x}}_n$ 发生偏离. 各不确定性未知, 故 $f_k(\Delta \mathbf{A}_k, \Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{C}_k, \bar{\mathbf{w}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ 对优化过程 (18) 影响未知, 导致不确定性下的估计问题 (18) 直接精确求解存在困难.

根据式 (12), (13), (18) 和 (A2) (附录 A), 得不确定性代数黎卡提方程等价形式为

$$\tilde{\mathbf{P}}_n^- = (\mathbf{A}_n + \Delta \mathbf{A}_n) \tilde{\mathbf{P}}_{n-1}^- [\mathbf{I}_{\mathcal{M}_1} + (\mathbf{M}_n + \Delta \mathbf{M}_n) \tilde{\mathbf{P}}_{n-1}^-]^{-1} (\mathbf{A}_n + \Delta \mathbf{A}_n)^T + \mathbf{Q}_n + \Delta \Lambda_n, \quad (21)$$

其中, $\Delta \mathbf{M}_n = \Delta \mathbf{C}_{n-1}^T \mathbf{C}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-1}^T \Delta \mathbf{C}_{n-1} + \Delta \mathbf{C}_{n-1}^T \Delta \mathbf{C}_{n-1}$, $\Delta \Lambda_n \triangleq \mathbb{E}[(\Delta \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n + \bar{\mathbf{w}}_n)(\Delta \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n + \bar{\mathbf{w}}_n)^T]$, 并定义不确定性 $\Delta_n \triangleq (\Delta \mathbf{A}_n, \Delta \mathbf{M}_n, \Delta \Lambda_n)$ 及其弗罗贝尼乌斯范数 (Frobenius norm, F-范数) 为

$$\|\Delta_n\|_F = \|\Delta_n\| = \|(\Delta \mathbf{A}_n, \Delta \mathbf{M}_n, \Delta \Lambda_n)\| = \sqrt{\sum_i \sum_j \Delta_{ij}^2}, \quad (22)$$

其中, $\|\Delta_n\|$ 为 F 范数 $\|\Delta_n\|_F$ 的简写, Δ_{ij} 表示矩阵中第 i 行第 j 列元素, 所以 F 范数为矩阵所有元素的平方和的算术平方根.

注2 滤波增益本质为加权重, 其计算必需经过归一化处理, 所以 $\Delta \Lambda_n$ 和 $\Delta \mathbf{R}_n \triangleq \mathbb{E}[\bar{\mathbf{v}}_n \bar{\mathbf{v}}_n^T]$ 对滤波增益的影响取决于其相对值而不是绝对值. 所以可以采取令 $\Delta \mathbf{R}_n = \mathbf{0}$ 调整 $\Delta \Lambda_n$ 的策略实现 $\Delta \mathbf{R}_n$ 和 $\Delta \Lambda_n$ 的同时调整. 综上, 式 (22) 中 Δ_n 包含 $\Delta \Lambda_n$, 等价于同时包含 $\Delta \Lambda_n$ 和 $\Delta \mathbf{R}_n$, 故式 (12) 和 (13) 与 (21) 中不确定性情况一致. 且当 $\tilde{\mathbf{P}}_n^-$ 收敛时, 将 $\tilde{\mathbf{P}}_n^- = \tilde{\mathbf{P}}_{n-1}^-$ 代入不确定性黎卡提方程 (21) 所得解 $\tilde{\mathbf{P}}_n^-$ 生成估计值, 对应于不确定性下优化问题 (18) 最优解.

因为式 (A2) 中 $\mathbf{P}_n^-$ 的 Fréchet 导数可逆^[29], 根据隐函数定理 (implicit function Theorem^[30]), 可得如下定理.

定理1 不确定性黎卡提方程 (21) 在 $\mathbf{P}_n^-$ 的领域内有唯一解 $\tilde{\mathbf{P}}_n^- = \mathbf{P}_n^- + \Delta \mathbf{P}_n^- = \mathcal{P}_n(\Delta_n)$, $\Delta_n = (\Delta \mathbf{A}_n, \Delta \mathbf{M}_n, \Delta \Lambda_n)$, $\mathcal{P}_n(\mathbf{0}) = \mathbf{P}_n^-$. 且至少在原点领域内即不确定性 $\|\Delta_n\|$ 足够小时, $\tilde{\mathbf{P}}_n^-$ 中元素是不确定性 $(\Delta \mathbf{A}_n, \Delta \mathbf{M}_n, \Delta \Lambda_n)$ 元素的解析函数.

令 $\Sigma_n = (\mathbf{A}_n, \mathbf{M}_n, \mathbf{Q}_n)$, 并基于定理 1 构建 $\tilde{\mathbf{P}}_n^- = \mathbf{P}_n^- + \Delta \mathbf{P}_n^-$ 且当 $\tilde{\mathbf{P}}_n^-$ 收敛即 $\tilde{\mathbf{P}}_n^- = \tilde{\mathbf{P}}_{n-1}^-$ 时, 根据黎卡提方程等价形式 (A3) 和 (A4), 不确定性黎卡提方程 (21) 表述为

$$\begin{aligned} & \Phi(\mathbf{P}_n^- + \Delta \mathbf{P}_n^-, \Sigma_n + \Delta_n) \\ &= \Phi(\mathbf{P}_n^-, \Sigma_n) + \Phi_{\mathcal{P}}(\Delta \mathbf{P}_n^-) + \Phi_{\mathbf{A}}(\Delta \mathbf{A}_n) + \Phi_{\mathbf{M}}(\Delta \mathbf{M}_n) + \Phi_{\mathbf{Q}}(\Delta \Lambda_n) + \mathbf{G}(\Delta \mathbf{P}_n^-, \Delta_n) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $\Phi_{\mathcal{P}}(\cdot) \in \mathcal{L}(\Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1}, \Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1})$ 为 $\Phi(\mathbf{P}_n^-, \Sigma_n)$ 对 $\mathcal{P}_n$ 在 $\mathcal{P}_n = \mathbf{P}_n^-$ 点处的 Fréchet 导数, 式中 $\mathcal{L}(\Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1}, \Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1})$ 表示线性算子 (linear operators) 空间 $\Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1} \rightarrow \Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1}$, 则存在诱导范数 (induced norm) 为

$$\|\mathcal{P}_n\|_{\mathcal{L}} = \max\{\|\mathcal{P}_n(\mathbf{Z}_n)\| : \|\mathbf{Z}_n\| = 1\}, \quad (24)$$

其中, $\mathcal{P}_n \in \mathcal{L}(\Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1}, \Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1})$. 式 (23) 中函数 $\mathbf{G}(\cdot, \cdot) : \Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1} \times (\Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1} \times \Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1} \times \Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1}) \rightarrow \Re^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1}$ 是一个非线性函数且满足 $\varpi = \|(\mathbf{Z}_n, \Delta_n)\| \rightarrow 0$, $\|\mathbf{G}(\mathbf{Z}_n, \Delta_n)\| = O(\varpi^2)$. 式 (23) 中其他 Fréchet 导数为

$$\Phi_{\mathcal{P}}(\mathbf{Z}_n) = \mathbf{Z}_n - \tilde{\mathbf{A}}_n \mathbf{Z}_n \tilde{\mathbf{A}}_n^T, \quad \Phi_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Z}_n) = -\mathbf{Z}_n, \quad (25)$$

$$\Phi_A(\mathbf{Z}_n) = -(\mathbf{Z}_n \mathbf{P}_n^- \tilde{\mathbf{A}}_n^T + \tilde{\mathbf{A}}_n \mathbf{P}_n^- \mathbf{Z}_n^T), \quad \Phi_M(\mathbf{Z}_n) = \tilde{\mathbf{A}}_n \mathbf{P}_n^- \mathbf{Z}_n \mathbf{P}_n^- \tilde{\mathbf{A}}_n^T, \quad (26)$$

其中, $\tilde{\mathbf{A}}_n = \mathbf{A}_n - \mathbf{C}_n^T (\mathbf{I}_{\mathcal{M}_2} + \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n^- \mathbf{C}_n^T)^{-1} \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n^- \mathbf{A}_n = (\mathbf{I}_{\mathcal{M}_1} + \mathbf{M}_n \mathbf{P}_n^-)^{-1} \mathbf{A}_n$, $\tilde{\mathbf{A}}_n$ 为闭环系统状态转移矩阵且收敛 (即其谱半径小于 1).

注3 至少在 $\mathbf{P}_n^-$ 领域内 (即 $\|\mathbf{P}_n^-\|$ 足够小), Φ_P 存在; 至少在 $\mathbf{M}_n$ 领域内 (即 $\|\mathbf{M}_n\|$ 足够小), Φ_M 存在; Φ_A 和 Φ_Q 同理.

非线性函数 $\mathbf{G}(\mathbf{Z}_n, \Delta_n)$ 表达式如附录 B 所示. 将式 (A4) 和 (25) 代入式 (23) 得

$$\Phi_P(\Delta \mathbf{P}_n^-) = \Delta \Lambda_n - \Phi_A(\Delta \mathbf{A}_n) - \Phi_M(\Delta \mathbf{M}_n) - \mathbf{G}(\Delta \mathbf{P}_n^-, \Delta_n). \quad (27)$$

$\Phi_P(\cdot)$ 的特征值 μ_{ij} 为 $\mu_{ij} = 1 - \lambda_i \lambda_j, |\lambda_i| < 1 \Rightarrow 0 < |\mu_{i,j}| < 2, \lambda_i = \lambda_i(\tilde{\mathbf{A}}_n)$ 为 $\tilde{\mathbf{A}}_n$ 的特征值, 且位于复平面单位圆内. 由 $0 < |\mu_{i,j}| < 2$ 可知, 存在 Φ_P 的逆算子, 则根据式 (27) 可得

$$\Delta \mathbf{P}_n^- = \Phi_P^{-1}(\Delta \Lambda_n) - \Phi_P^{-1}[\Phi_A(\Delta \mathbf{A}_n)] - \Phi_P^{-1}[\Phi_M(\Delta \mathbf{M}_n)] - \Phi_P^{-1}[\mathbf{G}(\Delta \mathbf{P}_n^-, \Delta_n)]. \quad (28)$$

当 $\Delta_n \rightarrow \mathbf{0}$ 时, 根据式 (28) 可得

$$\|\Delta \mathbf{P}_n^-\| \leq K_Q \|\Delta \Lambda_n\| + K_A \|\Delta \mathbf{A}_n\| + K_M \|\Delta \mathbf{M}_n\| + O(\|\Delta_n\|^2), \quad (29)$$

其中, $K_Q = \|\Phi_P^{-1}\|_{\mathcal{L}}, K_A = \|\Phi_P^{-1} \circ \Phi_A\|_{\mathcal{L}}, K_M = \|\Phi_P^{-1} \circ \Phi_M\|_{\mathcal{L}}$, 符号 $\circ$ 表示复合函数, 即 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. 当 $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ 时, 式 (29) 等价于

$$\|\Delta \mathbf{P}_n^-\| \leq K_\Delta \|\Delta_n\| + O(\|\Delta_n\|^2), \quad (30)$$

其中, K_Δ 是和 K_Q, K_A, K_M 有关的标量. 式 (30) 表明 $\|\Delta \mathbf{P}_n^-\|$ 存在上界, 且 $\|\Delta \mathbf{P}_n^-\|$ 上界与不确定性范数 $\|\Delta_n\|$ 成正相关关系. $\|\Delta \mathbf{P}_n^-\|$ 上界与滤波鲁棒性相关, 证明不同程度不确定性需要相应鲁棒性进行处理. 因此, 根据实时不确定性 Δ_n 放缩先验信息协方差, 进行鲁棒性自适应调整, 从而实现减少性能损失的同时削弱不确定性影响.

3.2 基于影响力函数的观测偏移量反演

鲁棒性自适应调整, 需要实时感知当前环境中不确定性程度, 并进一步根据感知结果, 解析不确定性对估计性能的影响, 通过增大先验误差协方差矩阵 $\mathbf{P}_n^-$, 自适应提高鲁棒性, 获得抵抗不确定性的能力, 从而减小不确定性影响. 为了感知不确定性并解析其影响, 构建影响力辅助函数为

$$\mathbf{x}_n(\varepsilon) = \arg \min_{\mathbf{x}_n} \left\{ \sum_{k=0}^n F_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k^\delta) + \varepsilon [\tilde{F}_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)] \right\}, \quad (31)$$

其中, $\varepsilon \in [0, 1]$ 为不确定性影响因子, 可以放大或缩小不确定性对估计结果的影响. 当 $\varepsilon = 0$ 时, $\mathbf{x}_n(0) = \hat{\mathbf{x}}_n$ (见式 (5)); 当 $\varepsilon = 1$ 时, $\mathbf{x}_n(1) = \tilde{\mathbf{x}}_n$ (见式 (18)). 不确定性使得系统状态的最优估计值发生了偏移. 辅助函数 (31) 构建了高斯下估计值和不确定性下估计值的函数关系, 并利用影响因子放缩其大小凸显不确定性影响趋势, 从而根据趋势解析不确定性和估计性能的函数关系, 进而完成对影响程度的量化.

为了定量解析不确定性影响力, 根据文献 [31] 和式 (C8) (附录 C), 可得式 (31) 中 $\mathbf{x}_n(\varepsilon)$ 对 ε 的偏导为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = - \left[\frac{\partial^2 F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \tilde{F}_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} - \frac{\partial F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} \right]. \quad (32)$$

当 Δ_n 足够小, 即 $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ 时, 式 (16) 中观测偏移量 $\|\delta_n\| \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{\|\delta_n\| \rightarrow 0} \tilde{F}_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n). \quad (33)$$

因为 $\mathbf{x}_n$ 是连续变量且当 δ_n 足够小时, 使用式 (33) 和前向欧拉法 (explicit forward Euler method [32]) 简化式 (32) 中第二项为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} - \frac{\partial F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} &\approx \frac{\partial F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} - \frac{\partial F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} \\ &\approx \left[\frac{\partial^2 F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{y}_n^\delta \partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} \right] (\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^\delta). \end{aligned} \quad (34)$$

代入式 (34) 和 $\delta_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^\delta$ 到式 (32) 中, 可得

$$\frac{\partial \mathbf{x}_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \approx - \left[\frac{\partial^2 F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} \right]^{-1} \left[\frac{\partial^2 F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{y}_n^\delta \partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} \right] \delta_n. \quad (35)$$

根据定理 1, 使用式 (35) 和前向欧拉法得

$$\mathbf{x}_n(1) - \mathbf{x}_n(0) \approx -(1-0) \left[\frac{\partial^2 F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} \right]^{-1} \left[\frac{\partial^2 F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{y}_n^\delta \partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_n(0)} \right] \delta_n. \quad (36)$$

综上, 借助目标函数 $F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)$, 利用表征不确定性大小的观测偏移量 δ_n 和不确定性下的 KF 估计 $\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta$, 解析不确定性对估计性能的影响, 从而得到不确定性对估计性能的影响力 $\mathbf{L}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n) &\triangleq \frac{\partial \tilde{F}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)^\top}{\partial \delta_n} \Big|_{\delta_n=0} = \frac{\partial F_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)^\top}{\partial \delta_n} \Big|_{\delta_n=0} = \frac{\partial F_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)^\top}{\partial \mathbf{x}_n(1)} \Big|_{\delta_n=0} \frac{\partial \mathbf{x}_n(1)}{\partial \delta_n} \Big|_{\delta_n=0} \\ &= - \frac{\partial F_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)^\top}{\partial \mathbf{x}_n} \left[\frac{\partial^2 F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \right]^{-1} \frac{\partial^2 F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{y}_n^\delta \partial \mathbf{x}_n}. \end{aligned} \quad (37)$$

将式 (20) 代入上述式 (37), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n) &\triangleq \frac{\partial \tilde{F}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)^\top}{\partial \delta_n} \Big|_{\delta_n=0} \\ &= 2[(\mathbf{P}_n^-)^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta - \tilde{\mathbf{x}}_n^-) - \mathbf{C}_n^\top \mathbf{R}_n^{-1}(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_n \hat{\mathbf{x}}_n^\Delta)]^\top [(\mathbf{P}_n^-)^{-1} + \mathbf{C}_n^\top \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C}_n]^{-1} \mathbf{C}_n^\top \mathbf{R}_n^{-1}, \end{aligned} \quad (38)$$

其中, $\mathbf{y}_n$ 为传感器获得当前观测; $\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta$ 为不确定性下基于 KF 算法 (6) ~ (10) 得到估计值, 如式 (17) 所示; 其余参数和 KF 参数一致. $\mathbf{L}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)$ 为不确定性对估计性能的影响力函数. 从影响力函数 (38) 可得, 不确定性对估计性能的量化原则可以描述为单位观测偏移量使得目标函数的偏移程度. 具体来说, 根据式 (16) 可得不确定性都会也只能通过观测进行表征, 所以通过感知观测偏移量来感知不确定性. 进一步, 利用单位观测偏移量对目标函数的影响程度来表征单位不确定性对估计性能的影响. 影响力可以较好地反应滤波算法鲁棒性: 影响力越大表明滤波算法鲁棒性越差; 影响力越小表明单位不确定性对滤波估计性能影响较小.

基于不确定性影响力 $\mathbf{L}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)$, 反演表征不确定性 Δ_n 大小的观测偏移量 δ_n . 由式 (37) 可知

$$F_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n) = \mathbf{L}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n) \delta_n + \beta_n, \quad (39)$$

$$F_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n) = \left\{ \|\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_n \hat{\mathbf{x}}_n^\Delta\|_{\mathbf{R}_n^{-1}}^2 + \|\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta - \tilde{\mathbf{x}}_n^-\|_{(\mathbf{P}_n^-)^{-1}}^2 - \|\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_n \tilde{\mathbf{x}}_n^-\|_{(\mathbf{C}_n \mathbf{P}_n^- \mathbf{C}_n^\top + \mathbf{R}_n)^{-1}}^2 \right\}, \quad (40)$$

$$\beta_n = \min\{F_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n) \mid \forall (\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)\} = 0. \quad (41)$$

时间窗口起始时刻为 m ($m = n - \mathcal{M}_2 + 1$, 其中 $\mathcal{M}_2$ 为观测向量维度), 当前时刻 n 作为截止时刻, 则窗口长度为 $\mathcal{M}_2$. 不确定性导致的观测偏移量在长度为 $\mathcal{M}_2$, 起始截止为 $[m, n]$ 的时间窗口内的均值为 $\mathbb{E}(\delta_n)$, 则扩展式 (39) 至整个时间窗口内得到

$$F_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n) = \mathbf{L}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n) \mathbb{E}(\delta_n),$$

$$\begin{aligned}
F_{n-1}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}^\Delta, \mathbf{y}_{n-1}) &= \mathbf{L}_{n-1}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}^\Delta, \mathbf{y}_{n-1}) \mathbb{E}(\delta_n), \\
&\dots \\
F_m(\hat{\mathbf{x}}_m^\Delta, \mathbf{y}_m) &= \mathbf{L}_m(\hat{\mathbf{x}}_m^\Delta, \mathbf{y}_m) \mathbb{E}(\delta_n).
\end{aligned}$$

将上述 $\mathcal{M}_2$ 个扩展方程整合为一个扩展矩阵:

$$\mathbf{F}_{m,n} = \mathbf{L}_{m,n} \mathbb{E}(\delta_n), \quad (42)$$

$$\mathbf{F}_{m,n} = \left[F_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n) \cdots F_m(\hat{\mathbf{x}}_m^\Delta, \mathbf{y}_m) \right]^\mathrm{T}, \quad \mathbf{L}_{m,n} = \left[\mathbf{L}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)^\mathrm{T} \cdots \mathbf{L}_m(\hat{\mathbf{x}}_m^\Delta, \mathbf{y}_m)^\mathrm{T} \right]^\mathrm{T}. \quad (43)$$

综上可得,

$$\mathbb{E}(\delta_n) = \begin{cases} \mathbf{L}_{m,n}^{-1} \mathbf{F}_{m,n}, & \exists \mathbf{L}_{m,n}^{-1}; \\ \mathbf{0}, & \text{其他,} \end{cases} \quad (44)$$

其中, δ_n 为可以表征不确定性大小的观测偏移量, $F_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)$ 为目标函数, $\mathbf{L}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^\Delta, \mathbf{y}_n)$ 为不确定性对估计性能的影响力, 即不确定性导致的单位观测偏移量对目标函数的影响程度.

不确定性的未知与不可预测性, 导致不确定性的发生与否、发生位置、发生程度同样无法基于已有信息进行预测. 本节借助影响力函数, 对包含不确定性的观测信息进行解析, 并进一步反演出了表征不确定性大小的观测偏移量, 为鲁棒性的自适应提供了依据.

3.3 基于观测偏移量的自适应鲁棒卡尔曼滤波

根据定理 1 以及式 (30) 可知, ARKF 可以通过增大 KF (6) ~ (10) 中先验协方差矩阵获得鲁棒性, 从而减小不确定性的影响. 由定理 1 可知 $\tilde{\mathbf{P}}_n^- = \mathbf{P}_n^- + \Delta \mathbf{P}_n^-$. 基于观测偏移量 δ_n 计算不确定性导致的先验协方差矩阵偏移量 $\Delta \mathbf{P}_n^-$. 由式 (20) 和 (36) 可得

$$\tilde{\mathbf{x}}_n^- - \hat{\mathbf{x}}_n^- \approx [(\mathbf{P}_n^-)^{-1} + \mathbf{C}_n^\mathrm{T} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C}_n]^{-1} \mathbf{C}_n^\mathrm{T} \mathbf{R}_n^{-1} \delta_n. \quad (45)$$

不确定性使得先验估计值从 $\hat{\mathbf{x}}_n^-$ 偏移到 $\tilde{\mathbf{x}}_n^-$ 且过滤掉不确定性在状态间的影响, 基于式 (45) 得

$$\Delta \mathbf{P}_n^- = \mathbb{E}[(\tilde{\mathbf{x}}_n^- - \hat{\mathbf{x}}_n^-)(\tilde{\mathbf{x}}_n^- - \hat{\mathbf{x}}_n^-)^\mathrm{T}] \odot \mathbf{I}_{\mathcal{M}_1} = \Gamma_n \mathbb{E}(\delta_{n-1}) \mathbb{E}(\delta_{n-1})^\mathrm{T} \Gamma_n^\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{M}_1}, \quad (46)$$

其中, $\Gamma_n = \mathbf{A}_n [(\mathbf{P}_{n-1}^-)^{-1} + \mathbf{C}_{n-1}^\mathrm{T} \mathbf{R}_{n-1}^{-1} \mathbf{C}_{n-1}]^{-1} \mathbf{C}_{n-1}^\mathrm{T} \mathbf{R}_{n-1}^{-1}$; $\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{M}_1}$ 中 $\otimes$ 表示点乘, 即矩阵对应元素相乘. $\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{M}_1}$ 运算可以保留 $\mathbf{P}$ 矩阵对角线元素, 其余位置元素置 0. 例如 $[a, b; c, d] \otimes \mathbf{I}_2 = [a, 0; 0, d]$.

综上, 自适应鲁棒卡尔曼滤波 (adaptive robust Kalman filter, ARKF) 为

$$\tilde{\mathbf{x}}_n^- = \mathbf{A}_n \tilde{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n, \quad (47)$$

$$\mathbf{P}_n^- = \mathbf{A}_n \tilde{\mathbf{P}}_{n-1} \mathbf{A}_n^\mathrm{T} + \mathbf{Q}_n, \quad (48)$$

$$\Gamma_n = \mathbf{A}_n [(\mathbf{P}_{n-1}^-)^{-1} + \mathbf{C}_{n-1}^\mathrm{T} \mathbf{R}_{n-1}^{-1} \mathbf{C}_{n-1}]^{-1} \mathbf{C}_{n-1}^\mathrm{T} \mathbf{R}_{n-1}^{-1}, \quad (49)$$

$$\Delta \mathbf{P}_n^- = \Gamma_n \mathbb{E}(\delta_{n-1}) \mathbb{E}(\delta_{n-1})^\mathrm{T} \Gamma_n^\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{M}_1}, \quad (50)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_n^- = \mathbf{P}_n^- + \Delta \mathbf{P}_n^-, \quad (51)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_n = \left[(\tilde{\mathbf{P}}_n^-)^{-1} + \mathbf{C}_n^\mathrm{T} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{C}_n \right]^{-1}, \quad (52)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_n = \tilde{\mathbf{P}}_n \mathbf{C}_n^\mathrm{T} \mathbf{R}_n^{-1}, \quad (53)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_n = \tilde{\mathbf{x}}_n^- + \tilde{\mathbf{K}}_n (\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_n \tilde{\mathbf{x}}_n^-), \quad (54)$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}}_n^-$ 为 ARKF 先验估计; $\tilde{\mathbf{P}}_n^- \geq \mathbb{E}[(\mathbf{x}_n - \tilde{\mathbf{x}}_n^-)(\mathbf{x}_n - \tilde{\mathbf{x}}_n^-)^\mathrm{T}]$ 为 ARKF 先验信息上界矩阵, 表示先验误差协方差矩阵上界; $\tilde{\mathbf{P}}_n \geq \mathbb{E}[(\mathbf{x}_n - \tilde{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \tilde{\mathbf{x}}_n)^\mathrm{T}]$ 为 ARKF 后验信息上界矩阵, 表示后验误差协方差矩阵上界; $\tilde{\mathbf{x}}_n$ 为 ARKF 后验估计, 简称 ARKF 估计; $\tilde{\mathbf{K}}_n$ 为 ARKF 滤波增益.

算法 1 Adaptive robust Kalman filter (ARKF) algorithm.**Input:** $A_n, E_n, C_n, Q_n, R_n, \tilde{P}_1, u_n, y_n, \tilde{x}_1, \mathcal{M}_2$;

```

1: for  $n = 2, 3, \dots$  do
2:    $\tilde{x}_n^- = A_n \tilde{x}_{n-1} + E_n u_n$ ;
3:    $P_n^- = A_n \tilde{P}_{n-1} A_n^T + Q_n$ ;
4:    $P_n = [(P_n^-)^{-1} + C_n^T R_n^{-1} C_n]^{-1}$ ;
5:    $K_n = P_n C_n^T R_n^{-1}$ ;
6:    $\hat{x}_n^\Delta = \tilde{x}_n^- + K_n (y_n - C_n \tilde{x}_n^-)$ ;
7:   Calculate the influence  $L_n(\hat{x}_n^\Delta, y_n)$  according to (38);
8:   Calculate the objective function  $F_n(\hat{x}_n^\Delta, y_n)$  according to (40);
9:   Calculate the observation deviation mean  $\mathbb{E}(\delta_{n-1})$  according to (44);
10:   $\Gamma_n = A_n [(P_{n-1}^-)^{-1} + C_{n-1}^T R_{n-1}^{-1} C_{n-1}]^{-1} C_{n-1}^T R_{n-1}^{-1}$ ;
11:   $\Delta P_n^- = \Gamma_n \mathbb{E}(\delta_{n-1}) \mathbb{E}(\delta_{n-1})^T \Gamma_n^T \otimes I_{\mathcal{M}_1}$ ;
12:   $\tilde{P}_n^- = P_n^- + \Delta P_n^-$ ;
13:   $\tilde{P}_n = [(\tilde{P}_n^-)^{-1} + C_n^T R_n^{-1} C_n]^{-1}$ ;
14:   $\tilde{K}_n = \tilde{P}_n C_n^T R_n^{-1}$ ;
15:   $\tilde{x}_n = \tilde{x}_n^- + \tilde{K}_n (y_n - C_n \tilde{x}_n^-)$ ;
16: end for

```

Output: $\tilde{x}_n$.**3.4 自适应鲁棒卡尔曼滤波分析及伪代码**

由式 (47) ~ (54) 可知, 自适应鲁棒卡尔曼滤波参数 $\|\mathbb{E}(\delta_n)\| \in [0, +\infty] \Rightarrow \Delta P_n^- \in [0, +\infty]$. 当不存在不确定性时, 自适应鲁棒卡尔曼滤波自适应地变为卡尔曼滤波, 即 $\|\mathbb{E}(\delta_n)\| \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta P_n^- \rightarrow 0 \Rightarrow \text{ARKF} \rightarrow \text{KF}$. 当存在不确定性时, 依据 $\mathbb{E}(\delta_n)$, ARKF 会根据当前环境中不确定性程度提供尽可能小但足够的鲁棒性以增大估计性能. 自适应鲁棒卡尔曼滤波算法伪代码如算法 1 所示, 其对应流程图如图 1 所示. 基于算法 1 进行算法复杂度分析, 可得复杂度分析结果如表 1^[33] 所示. 表中 l 为嵌套内循环数. 由算法 1 和 表 1 可知, ARKF 并没有嵌套内循环, 所以时间和空间复杂度都为 $O(n)$. 若只针对一个时刻进行分析, ARKF 运行时间大概是 KF 的三倍.

4 仿真与实验验证

本节分别通过仿真和实验对所提自适应鲁棒卡尔曼滤波 (adaptive robust Kalman filter, ARKF) (算法 1) 进行有效性分析, 并基于此进一步提供所提算法的使用指南. 本节将均方根误差 (root mean square error, RMSE^[34]) 作为主要性能指标.

4.1 基于二维多项式模型的算法分析

本节将所提滤波 (ARKF, 算法 1) 与卡尔曼滤波 (Kalman filter, KF^[28])、记忆衰退卡尔曼滤波 (fading memory Kalman filter, FKF^[22])、鲁棒椭圆卡尔曼滤波 (robust elliptically contoured Kalman filter, RECKF^[20]) 和变分贝叶斯卡尔曼滤波 (variational Bayesian Kalman filter, VBKF^[18]) 等算法在二维多项式模型上进行仿真对比. 不确定性模型 (12) 和 (13) 描述为 $E_n = [1, 1]^T$, $C_n = I_2$ 且 $A_n = [1, 1 + d_n; 0, 1]$, 其中, 当 $150 \leq n \leq 250$ 时, $d_n = 6$, 其余时刻 $d_n = 0$. 控制信号 $u_n = 1$. 系统初始状态为 $x_1 = [1, 0.1]^T$, 其余初始相关参数为 $P_1 = 0$, $Q_n = I_2$, $R_n = I_2$. 整个过程运行 400 步 (秒). 对比算法相关参数设置如下: FKF 中鲁棒参数 $\lambda_n = 1.1$; VBKF 中 $\bar{m} = 1, \rho = 0.9$ ($\rho \in (0, 1]$), $\hat{\alpha}_0 = 1, \hat{\beta}_0 = 1, L = 7$, 当 $200 \leq n \leq 210$ 时, $\eta = 10^5$, 其余时刻 $\eta = 10^6$; RECKF 中 $N_{\max} = 11, \epsilon = 10^{-2}$ 且 EC 分布选择为 LEC (Student's t) 分布. 仿真部分不确定性情况如图 2 所示, 所有不确定性具体参数

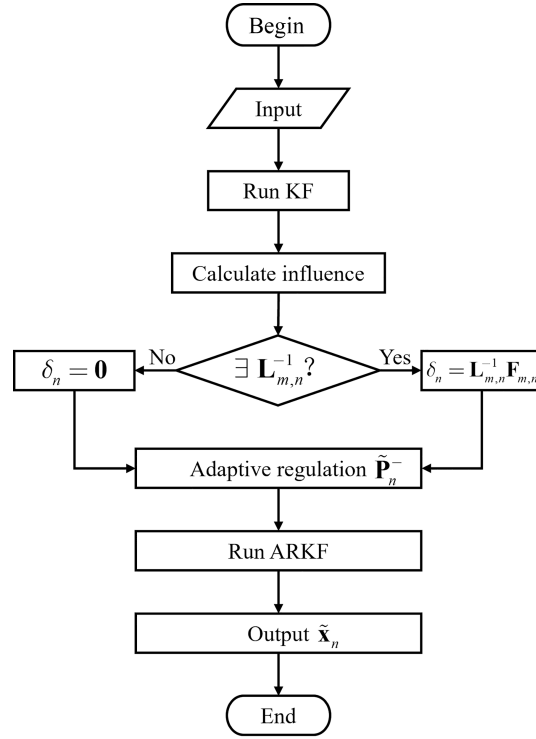


图 1 ARKF 流程图.

Figure 1 ARKF flowchart.

表 1 ARKF 复杂度分析与常见滤波对比.

Table 1 ARKF complexity analysis and comparison of common filters.

Filter	Time complexity $T(n)$	Space complexity $S(n)$
Adaptive robust Kalman filter (ARKF)	$O(n)$	$O(n)$
Kalman filter (KF) [28]	$O(n)$	$O(n)$
Fading memory Kalman filter (FKF) [22]	$O(n)$	$O(n)$
H_∞ filter (HF) [5, 23]	$O(n)$	$O(n)$
Strong tracking Kalman filter (STKF) [33]	$O(n)$	$O(n)$
Robust elliptically contoured Kalman filter (RECKF) [20]	$O(nl)$	$O(n)$
Variational Bayesian Kalman filter (VBKF) [18]	$O(nl)$	$O(n)$

如表 2 所示. 不确定性模型 (12) 和 (13) 作出如下相应等价变化:

$$\mathbf{x}_n = \Delta \mathbf{A}_n \otimes \mathbf{A}_n \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{y}_n = c_n \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n,$$

其中, $\Delta \mathbf{A}_n \otimes \mathbf{A}_n$ 表示点乘, 即矩阵对应元素相乘; Weibull(0.1, 9) 表示比例参数 0.1 形状参数 9 的韦伯分布 (Weibull distribution); $t(100)$ 表示自由度为 100 的 t 分布 (student's t -distribution); $\mathcal{N}(1, 0.01)$ 表示均值为 0 方差为 0.01 的高斯分布 (Gaussian distribution). 在本节, 未说明不确定性设置为无不确定性, 即加性不确定性为 0, 乘性不确定性为 1.

图 2(a) 和 (b) 中纵坐标为均方根误差 (root mean square error, RMSE), 其表达式如下:

$$\text{RMSE}_n^j = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_{j,i} - \tilde{\mathbf{x}}_{j,i})^2},$$

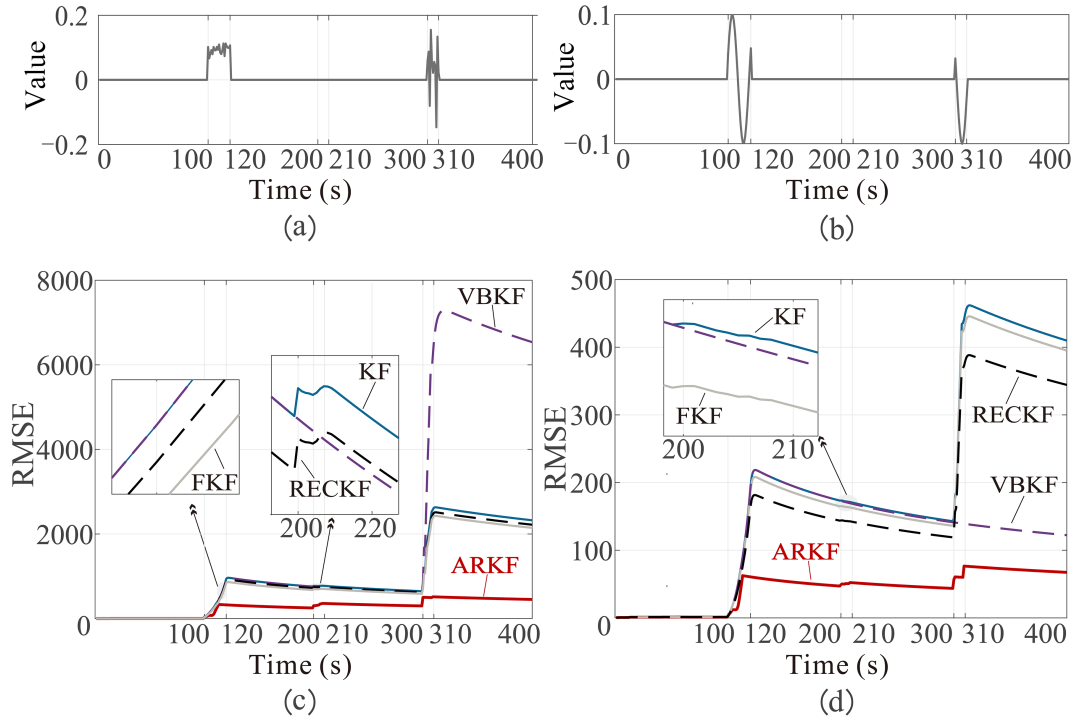


图 2 (网络版彩图) 二维多项式仿真结果. (a) $\Delta A_n\{1,1\}$; (b) $\Delta A_n\{2,2\}$; (c) 第一维状态; (d) 第二维状态.

Figure 2 (Color online) Two-dimensional polynomial simulation results. (a) $\Delta A_n\{1,1\}$; (b) $\Delta A_n\{2,2\}$; (c) the first state; (d) the second state.

表 2 二维多项式模型仿真环境.

Table 2 Two-dimensional polynomial modeling simulation environment.

	100 ~ 120 s	200 ~ 210 s	300 ~ 310 s
$\Delta A_n\{1,1\}$	Weibull(0.1, 9)	1	$0.1t(100)$
$\Delta A_n\{2,2\}$	$0.1 \sin(\frac{n}{\pi})$	1	$0.1 \cos(\frac{n}{\pi})$
c_n	1	$\mathcal{N}(1, 0.01)$	1

其中, RMSE_n^j 表示 n 时刻第 j 维状态 RMSE, $\mathbf{x}_{j,i}$ 表示 i 时刻真实状态 $\mathbf{x}_i$ 的第 j 维度, $\tilde{\mathbf{x}}_{j,i}$ 表示估计状态 $\tilde{\mathbf{x}}_i$ 在 i 时刻的第 j 维度. 类似地, 其余滤波的 RSME 只需将 $\tilde{\mathbf{x}}_{j,i}$ 替换为相应估计值.

二维多项式仿真结果如图 2 所示. 在仿真结果中, 所提算法 ARKF 性能表现良好. ARKF 可以感知当前环境并以此调整自身鲁棒性以应对各种未知的不确定性. 除此之外, 依托于偏差反演机制, 鲁棒性的调整是以观测维度数的自由度进行的, 使得可以差异化处理各维度不确定性. 其余滤波算法以固定鲁棒性来应对所有时刻的不确定性, 易出现鲁棒性不足或鲁棒性冗余情况.

为进一步展示 ARKF 算法, 如图 3 所示, 进行了 3 个时间范围内的蒙特卡洛仿真. 分别是 (s): 1 ~ 150, 1 ~ 250, 和 1 ~ 400. 各滤波仿真参数与不确定性参数与图 2 一致, 其中不确定性统计特性与图 2 一致, 但具体数值不同. 蒙特卡洛仿真次数为 500 次. 仿真结果表明图 2 结果具有代表性. 所提 ARKF 表现出的估计性能在所设参数和当前仿真环境中优于其他对比滤波.

4.2 基于四容水箱实验的算法验证

在二维多项式仿真的基础上, 一个基于四容水箱的对比实验进一步展示所提 ARKF 滤波的性能. 本节对比滤波为卡尔曼滤波 (Kalman filter, KF [28])、记忆衰退滤波 (fading memory Kalman filter, FKF) [22]、 H_∞ 滤波 (H_∞ filter, HF) [5, 23]、变分贝叶斯卡尔曼滤波 (variational Bayesian Kalman filter,

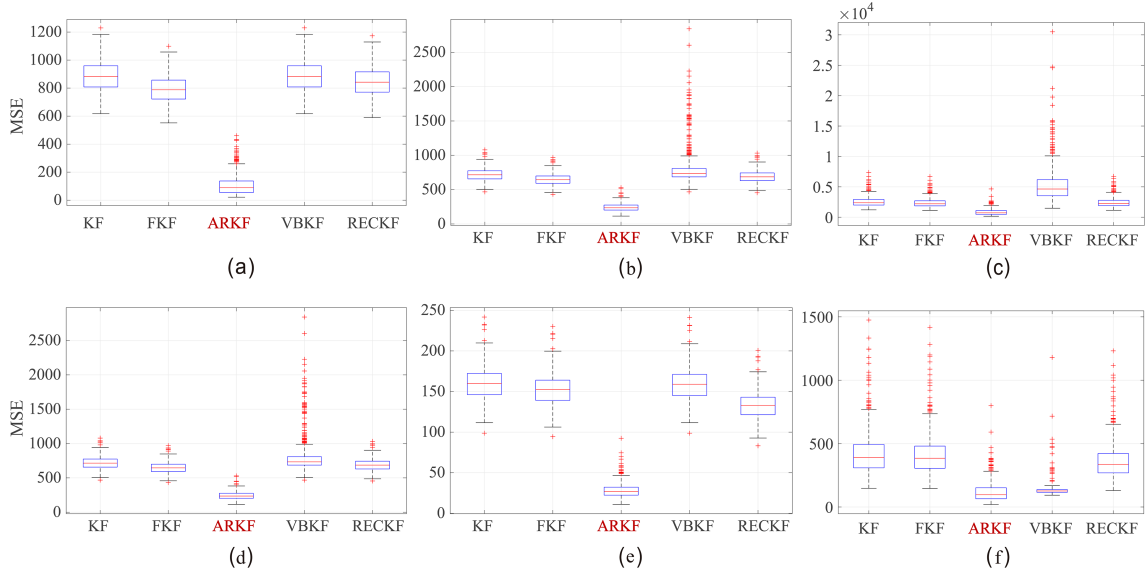


图 3 (网络版彩图) 二维多项式蒙特卡洛仿真结果. 第一维状态时间范围 (s): (a) 1 ~ 150, (b) 1 ~ 250, (c) 1 ~ 400; 第二维状态时间范围 (s): (d) 1 ~ 150, (e) 1 ~ 250, (f) 1 ~ 400.

Figure 3 (Color online) Two-dimensional polynomial Monte Carlo simulation results. The first state time (s): (a) 1 ~ 150, (b) 1 ~ 250, (c) 1 ~ 400; the second state time (s): (d) 1 ~ 150, (e) 1 ~ 250, (f) 1 ~ 400.

VBKF)^[18], 和强追踪卡尔曼滤波算法 (strong tracking Kalman filter, STKF^[33]).

实验使用四容水箱装置. 图 4 展示了实验装置及其示意图, 其中两台水泵通过两条水管向不同的水箱供水. 水箱 3 和 4 也分别通过底部出水孔向水箱 1 和 2 供水. 控制输入 $\mathbf{u}_n = [u_n(1), u_n(2)]^T$ 并定义状态变量 $\mathbf{x}_n = [x_n(1), x_n(2), x_n(3), x_n(4)]^T = [h_n(1) - s(1), h_n(2) - s(2), h_n(3) - s(3), h_n(4) - s(4)]^T$, 其中 $h_n(i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ 代表在 n 时刻第 i 个水箱, $[s(1), s(2), s(3), s(4)]^T = [0.1226, 0.2602, 0.0101, 0.0408]^T$ m. 相应的状态空间模型以式 (12) 和 (13) 为结构辨识^[35] 为

$$\mathbf{A}'_n = \begin{bmatrix} 0.9321 & 0 & 0.4173 & 0 \\ 0 & 0.9395 & 0 & 0.1123 \\ 0 & 0 & 0.8613 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.909 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}'_n = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0 \\ 0 & 0.0013 \\ 0 & 0.0006 \\ 0.0021 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

传感器设置使得观测向量第一维和第二维分别为 $[h_n(1) - s(1)]$ 和 $[h_n(2) - s(2)]$. 此外, 为了更好地展示滤波在不同类型不确定性下的检测和估计性能, “虚拟” 噪声: $\mathbf{v}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_n)$, 其中 $\mathbf{R}_n = 10^{-2} \mathbf{I}_2$ 和 “虚拟” 噪声观测矩阵不确定性一同加入观测数据形成观测为 $\mathbf{y}_n = \mathbf{c}_n \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$. 观测矩阵不确定性参数 $\mathbf{c}_n$ 值如表 3 所示. 各水箱水位由水位传感器获得, 其相应观测值和水泵控制输入如图 4 所示. 综上, 水箱实验状态估计目的为结合 “虚拟” 观测数据 $\mathbf{y}_n$ 估计各水箱水位.

为了完成目的, 过程噪声协方差设置为 $\mathbf{Q}_n = 10^{-4} \mathbf{I}_4$ 以表明系统辨识获得参数精度相对较高. 水箱实验仿真时间设置为 700 s. 水箱系统初始化参数为 $\mathbf{x}_1 = [-0.0047, -0.0089, -0.0012, 0.0066]^T$ 以及 $\mathbf{P}_1 = \mathbf{0}$. 水箱实验不确定性参数置如表 3 所示. 水箱系统辨识过程模型与 “虚拟” 观测一起作为不确定性模型, 即实际模型 (12) 和 (13) 如下所示:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}'_n \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{E}'_n \mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{c}_n \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n.$$

滤波所使用模型, 即标称模型如下所示:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{a}_n \mathbf{A}_n \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{e}_n \mathbf{E}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n,$$

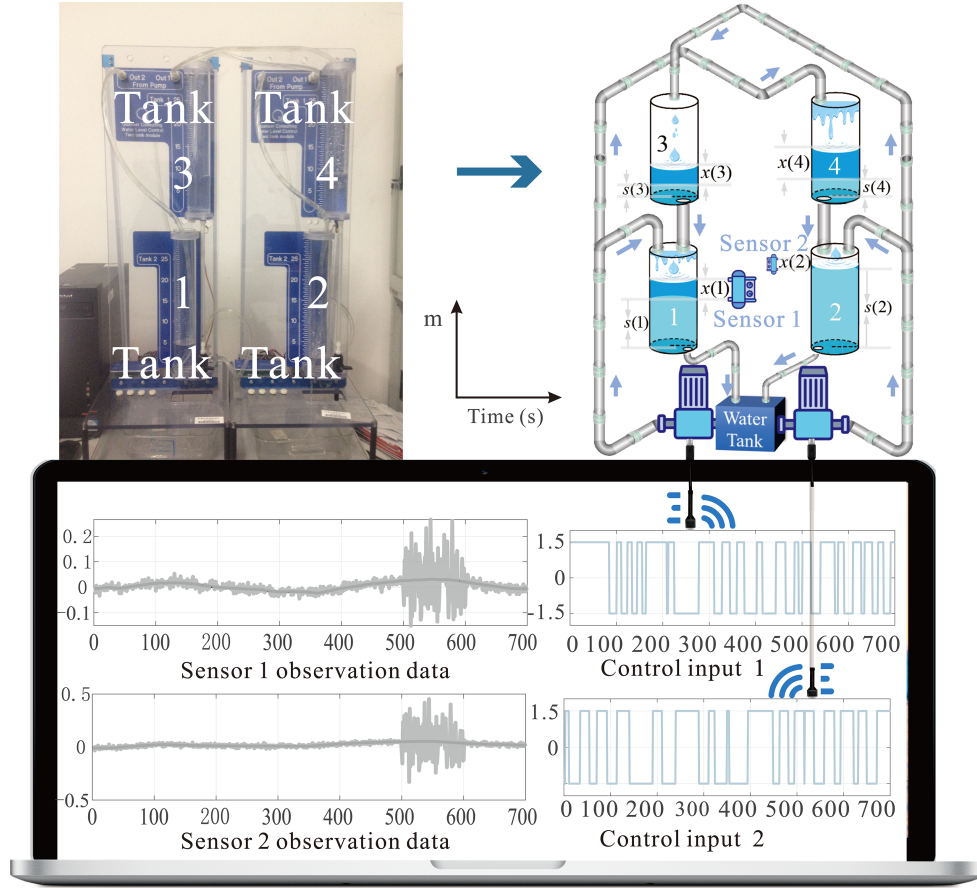


图4 (网络版彩图) 四容水箱系统.

Figure 4 (Color online) Quadruple-capacity water tank system.

表3 水箱系统实验环境.

Table 3 Experimental environment of the water tank system.

100 ~ 200 s	300 ~ 400 s	500 ~ 600 s
$\Delta \mathbf{A}_n\{1, 1\} = 0.10$	$a_n = 0.9$	$a_n \sim t(100)$
$\Delta \mathbf{A}_n\{2, 2\} = 0.99$	$e_n \sim \mathcal{N}(1, 49)$	$c_n \sim \mathcal{N}(1, 3)$

其中, 在 100 ~ 200 s 时刻, 为了体现维度间差异对标称模型进行变换, 使其可以在不同维度产生不同的不确定性, 即标称模型 $a_n \mathbf{A}_n$ 替换为 $\Delta \mathbf{A}_n \otimes \mathbf{A}_n = \text{diag}(\Delta \mathbf{A}_n\{1, 1\}, \Delta \mathbf{A}_n\{2, 2\}, 1, 1) \otimes \mathbf{A}_n$, $\Delta \mathbf{A}_n \otimes \mathbf{A}_n$ 表示点乘, 即矩阵对应元素相乘. 针对滤波而言, 实际系统未知, 标称系统已知但存在不确定性. 在本节, 未说明不确定性设置为无不确定性, 即加性不确定性为 0, 乘性不确定性为 1.

对比滤波所需参数设置如下: HF 参数 $\gamma_n = 30$, $\mathbf{L}_n = \mathbf{I}_4$, $\mathbf{S}_n = \mathbf{I}_4$; FKF 鲁棒参数为 $\lambda_n = 1.3$ ($\lambda_n > 1$); VBKF 参数为 $\bar{m} = 1$, $\rho = 0.9$ ($\rho \in (0, 1]$), $\hat{\alpha}_0 = 1$, $\hat{\beta}_0 = 1$, $L = 7$, 当 $500 \leq n \leq 700$ 时, $\eta = 10^4$, 其余时刻 $\eta = 0.1$; STKF 参数为 $\beta = 4.5$, $\rho = 0.95$.

水箱实验结果如图 5 和 6 所示. 图 5 为第一维和第二维估计结果及其对应增益变化. 图 6 为第三维和第四维估计结果及其余增益情况. 由实验结果可知, FKF 和 HF 等算法鲁棒参数只能针对整体而非每一维进行鲁棒化. 这意味着, 当某一维度没有不确定性发生时, 也会做出相应的变化, 从而导致不必要的性能损失. 而 ARKF 可以针对每一观测维度感知不确定性, 并通过感知结果针对每一状态维度差异化地调整鲁棒性. 综上, 所提 ARKF 算法实现了设计目的, 面对不同类型不同程度的不确定性自

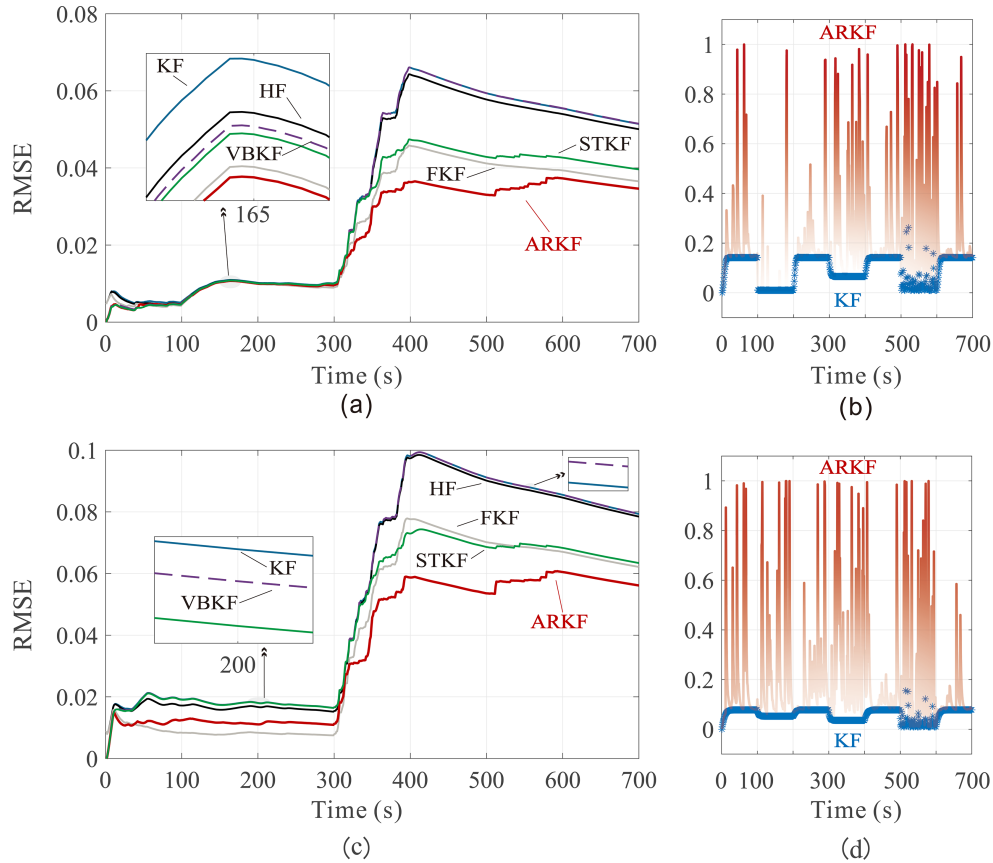


图 5 (网络版彩图) 水箱实验第一、二维度状态实验结果. (a) 第一维状态; (b) $\tilde{K}_n\{1,1\}$ 及 $K_n\{1,1\}$; (c) 第二维状态; (d) $\tilde{K}_n\{2,2\}$ 及 $K_n\{2,2\}$.

Figure 5 (Color online) First and second state experimental results in water tank experiment. (a) The first state; (b) $\tilde{K}_n\{1,1\}$ and $K_n\{1,1\}$; (c) the second state; (d) $\tilde{K}_n\{2,2\}$ and $K_n\{2,2\}$.

表 4 水箱实验各滤波算法运行时间 (s).

Table 4 Runtime (s) of each filtering algorithm for water tank experiments.

Filter	Single experiment runtime	100 Monte Carlo experiment runtime
Adaptive robust Kalman filter (ARKF)	0.471537	18.5708
Kalman filter (KF)	0.188829	3.4902
Fading memory Kalman filter (FKF)	0.083090	3.5736
H_∞ filter (HF)	0.109597	3.6829
Variational Bayesian Kalman filter (VBKF)	0.210244	9.3873
Strong tracking Kalman filter (STKF)	0.093397	21.3548

适应地调整了增益, 获得了期望的估计效果. 表 4 展示了各个算法的具体运行时间. 其中, 单次实验指图 5 和 6 对应实验, ARKF 运行时间为 KF 运行时间的 2.5 倍; 为了进一步分析算法运行时间, 在相同参数下进行 100 次蒙特卡洛实验, 得到各滤波算法 100 次实验运行总时间, ARKF 和 STKF 算法易出现某些矩阵奇异值接近于 0, 增大求逆运算时间, 导致整个滤波算法运行时间增大, 使得 ARKF 运行时间为 KF 的 5 倍, 也因此导致 STKF 运行时间超过 ARKF.

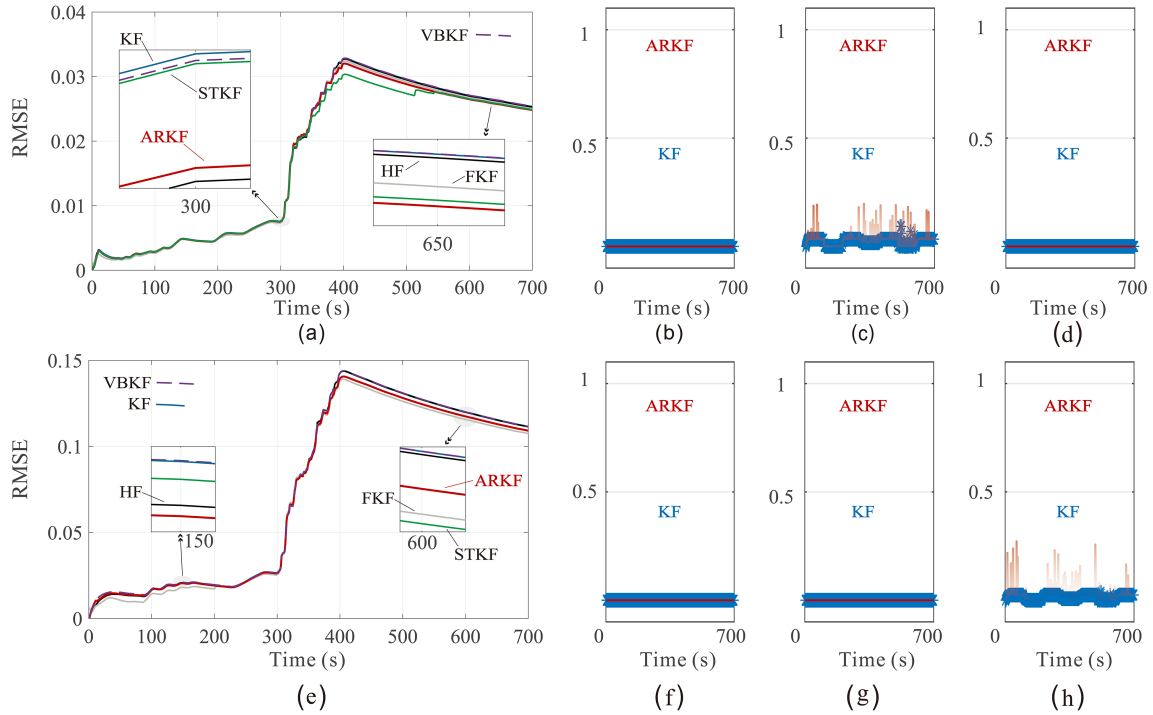


图 6 (网络版彩图) 水箱实验第三、四维状态实验结果及增益. (a) 第三维状态; (b) $\tilde{K}_n\{2,1\}$ 及 $K_n\{2,1\}$; (c) $\tilde{K}_n\{3,1\}$ 及 $K_n\{3,1\}$; (d) $\tilde{K}_n\{4,1\}$ 及 $K_n\{4,1\}$; (e) 第四维状态; (f) $\tilde{K}_n\{1,2\}$ 及 $K_n\{1,2\}$; (g) $\tilde{K}_n\{3,2\}$ 及 $K_n\{3,2\}$; (h) $\tilde{K}_n\{4,2\}$ 及 $K_n\{4,2\}$.

Figure 6 (Color online) Third and fourth dimension state experiment results and the rest of the gain in water tank experiment. (a) The third state; (b) $\tilde{K}_n\{2,1\}$ and $K_n\{2,1\}$; (c) $\tilde{K}_n\{3,1\}$ and $K_n\{3,1\}$; (d) $\tilde{K}_n\{4,1\}$ and $K_n\{4,1\}$; (e) the fourth state; (f) $\tilde{K}_n\{1,2\}$ and $K_n\{1,2\}$; (g) $\tilde{K}_n\{3,2\}$ and $K_n\{3,2\}$; (h) $\tilde{K}_n\{4,2\}$ and $K_n\{4,2\}$.

5 结论

本文针对不确定性系统对卡尔曼滤波进行了改进, 提出了一种自适应鲁棒卡尔曼滤波. 所提自适应鲁棒卡尔曼滤波利用影响力函数量化不确定性影响, 并进一步基于影响反演不确定性程度, 进而自适应地调整卡尔曼滤波鲁棒性. 仿真和实验结果表明, 一方面, 所提自适应鲁棒卡尔曼滤波无需人为设置鲁棒上界, 可以自动实时计算适合的鲁棒参数以满足要求; 另一方面, 自适应鲁棒卡尔曼滤波不但实现了时间尺度上的自适应, 也实现了状态维度间的差异化自适应. 因此, 自适应鲁棒卡尔曼滤波很好地协调了滤波鲁棒性与保守性之间的矛盾, 即根据当前不确定性程度实时提供适合的鲁棒性.

参考文献

- 1 Sun X Y, Zhou P. Enhanced PID control method based on unknown state estimation and neural network-based compensation. *Sci Sin Inform*, 2023, 53: 715–736 [孙霄阳, 周平. 基于未知状态估计与神经网络补偿的增强 PID 控制方法. *中国科学: 信息科学*, 2023, 53: 715–736]
- 2 Gao H, Li X. *Robust Filtering for Uncertain Systems*. Cham: Springer, 2014
- 3 Stoorvogel A A. *The H_∞ control problem: a state space approach*. Dissertation for Ph.D. Degree. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 1990
- 4 Jazwinski A H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Massachusetts: Courier Corporation, 2007
- 5 Shmaliy Y S, Zhao S Y. *Optimal and Robust State Estimation: Finite Impulse Response (FIR) and Kalman Approaches*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2022
- 6 Wiener N, Masani P. The prediction theory of multivariate stochastic processes: I. The regularity condition. *Acta Math*, 1957, 98: 111–150
- 7 Kalman R E, Bucy R S. New results in linear filtering and prediction theory. *J Basic Eng*, 1961, 83: 95–108

- 8 Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J Basic Eng*, 1960, 82: 35–45
- 9 Dai B, He Y Q, Gu F, et al. Multi-sensor fusion for unmanned aerial vehicles based on the combination of filtering and optimization. *Sci Sin Inform*, 2020, 50: 1919–1931 [代波, 何玉庆, 谷丰, 等. 结合滤波与优化的无人机多传感器融合方法. *中国科学: 信息科学*, 2020, 50: 1919–1931]
- 10 Guo S H, Luo S J, Huang D R, et al. Path following and status consistency control of autonomous vehicles. *Sci Sin Inform*, 2024, 54: 394–412 [郭胜辉, 罗世坚, 黄大荣, 等. 自动驾驶车辆道路跟驰与状态一致性控制. *中国科学: 信息科学*, 2024, 54: 394–412]
- 11 Li S, Shi D, Lou Y, et al. Generalized multikernel maximum correntropy Kalman filter for disturbance estimation. *IEEE Trans Automat Contr*, 2024, 69: 3732–3747
- 12 Zhuang Y, Gu M W, Wang W, et al. Collaborative positioning of multiple mobile robots based on autonomous motion state estimation and information interaction. *Sci Sin Inform*, 2010, 40: 1351–1362 [庄严, 顾明伟, 王伟, 等. 基于自主运动状态估计及信息交互的多移动机器人协作定位. *中国科学: 信息科学*, 2010, 40: 1351–1362]
- 13 Liang Y Q, Han C Z, Sun Y J, et al. Hybrid state estimation and model set design for semi-ballistic re-entry vehicles with invariant structures. *Sci Sin Inform*, 2011, 41: 311–323 [梁勇奇, 韩崇昭, 孙耀杰, 等. 不变结构半弹道式再入飞行器的混合状态估计与模型集设计. *中国科学: 信息科学*, 2011, 41: 311–323]
- 14 Fitzgerald R. Divergence of the Kalman filter. *IEEE Trans Automat Contr*, 1971, 16: 736–747
- 15 Bai L, Sun C, Dempster A G, et al. GNSS-5G hybrid positioning based on multi-rate measurements fusion and proactive measurement uncertainty prediction. *IEEE Trans Instrum Meas*, 2022, 71: 1–15
- 16 Hide C, Moore T, Smith M. Adaptive Kalman filtering for low-cost INS/GPS. *J Navigation*, 2003, 56: 143–152
- 17 Huang Y, Zhang Y, Wu Z, et al. A novel adaptive Kalman filter with inaccurate process and measurement noise covariance matrices. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 63: 594–601
- 18 Yu X, Meng Z. Robust Kalman filters with unknown covariance of multiplicative noise. *IEEE Trans Automat Contr*, 2024, 69: 1171–1178
- 19 Ge Q B, Wang H B, Yang Q M, et al. Estimation of robot motion state based on improved Gaussian mixture model. *Acta Autom Sin*, 2022, 48: 1972–1983 [葛泉波, 王贺彬, 杨秦敏, 等. 基于改进高斯混合模型的机器人运动状态估计. *自动化学报*, 2022, 48: 1972–1983]
- 20 Xue C, Huang Y, Zhu F, et al. An outlier-robust Kalman filter with adaptive selection of elliptically contoured distributions. *IEEE Trans Signal Process*, 2022, 70: 994–1009
- 21 Nurminen H, Ardeshiri T, Piche R, et al. Robust inference for state-space models with skewed measurement noise. *IEEE Signal Process Lett*, 2015, 22: 1898–1902
- 22 Xia Q, Rao M, Ying Y, et al. Adaptive fading Kalman filter with an application. *Automatica*, 1994, 30: 1333–1338
- 23 Simon D. *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006
- 24 Hajiyev C, Soken H E. Robust adaptive Kalman filter for estimation of UAV dynamics in the presence of sensor/actuator faults. *Aerospace Sci Tech*, 2013, 28: 376–383
- 25 Li Y, Li J. Robust adaptive Kalman filtering for target tracking with unknown observation noise. In: *Proceedings of the 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 2012
- 26 Shmaliy Y S, Zhao S, Ahn C K. Kalman and UFIR state estimation with coloured measurement noise using backward Euler method. *IET Signal Process*, 2020, 14: 64–71
- 27 Lewis F L, Xie L, Popa D. *Optimal and Robust Estimation: With An Introduction to Stochastic Control Theory*. Boca Raton: CRC Press, 2017
- 28 Simon D. *Alternate Kalman Filter Formulations*. Hoboken: John Wiley & Sons, Ltd., 2006
- 29 Konstantinov M M, Petkov P H, Christov N D. Perturbation analysis of the discrete Riccati equation. *Kybernetika*, 1993, 291: 18–29
- 30 Kantorovich L V, Akilov G P, Brown D E, et al. *Functional Analysis*. Amsterdam: Elsevier, 2016
- 31 Koh P W, Liang P. Understanding black-box predictions via influence functions. In: *Proceedings of International Conference on Machine Learning*, 2017
- 32 Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. *Numerical Recipes in Fortran: the Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press, 1992
- 33 Zhao T, Tong W, Mao Y. Hybrid nonsingleton fuzzy strong tracking Kalman filtering for high precision photoelectric tracking system. *IEEE Trans Ind Inf*, 2022, 19: 2395–2408
- 34 Hodson T O. Root-mean-square error (RMSE) or mean absolute error (MAE): when to use them or not. *Geosci Model Dev*, 2022, 15: 5481–5487
- 35 Zhao S, Ma Y, Huang B. Probabilistic monitoring of sensors in state-space with variational Bayesian inference. *IEEE Trans Ind Electron*, 2019, 66: 2154–2163

附录 A 黎卡提方程等价形式

高斯噪声下估计问题对应黎卡提方程 (11) 为

$$\mathbf{P}_n^- = \mathbf{A}_n \mathbf{P}_{n-1}^- \mathbf{A}_n^T + \mathbf{Q}_n - \mathbf{A}_n \mathbf{P}_{n-1}^- \mathbf{C}_{n-1}^T (\mathbf{C}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1}^- \mathbf{C}_{n-1}^T + \mathbf{R}_{n-1})^{-1} \mathbf{C}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1}^- \mathbf{A}_n^T. \quad (\text{A1})$$

式 (A1) 等价形式为

$$\mathbf{P}_n^- = \mathbf{A}_n \mathbf{P}_{n-1}^- (\mathbf{I}_{\mathcal{M}_1} + \mathbf{M}_n \mathbf{P}_{n-1}^-)^{-1} \mathbf{A}_n^T + \mathbf{Q}_n, \quad (\text{A2})$$

其中 $\mathbf{M}_n = \mathbf{C}_{n-1}^T \mathbf{C}_{n-1}$. 当 $\mathbf{P}_n^-$ 收敛时, 满足 $\mathbf{P}_n^- = \mathbf{P}_{n-1}^-$ 并将 $\mathbf{P}_n^-$ 作为函数 $\mathcal{P}_n$ 在零点的取值, 即 $\mathcal{P}_n(0) = \mathbf{P}_n^-$ 代入式 (A2) 得隐函数

$$\mathcal{P}_n - \mathbf{A}_n \mathcal{P}_n (\mathbf{I}_{\mathcal{M}_1} + \mathbf{M}_n \mathcal{P}_n)^{-1} \mathbf{A}_n^T - \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}. \quad (\text{A3})$$

进一步, 为了便于表述和推导, 定义式 (A3) 中等号左边为 $\Phi(\mathcal{P}_n, \Sigma_n) \triangleq \Phi(\mathcal{P}_n, \mathbf{A}_n, \mathbf{M}_n, \mathbf{Q}_n)$, 其中 $\Sigma_n = (\mathbf{A}_n, \mathbf{M}_n, \mathbf{Q}_n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1}$. 所以式 (A3) 可以等价表述为

$$\Phi(\mathbf{P}_n^-, \Sigma_n) = \mathbf{0}. \quad (\text{A4})$$

附录 B 非线性函数 $G(\mathbf{Z}_n, \Delta_n)$

根据式 (23) 和 (25), 当 $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_n^T$ 时, $G(\mathbf{Z}_n, \Delta_n)$ 表达式为

$$\begin{aligned} G(\mathbf{Z}_n, \Delta_n) = & \tilde{\mathbf{A}}_n (\mathbf{Z}_n \tilde{\mathbf{R}}_n^{-T} \mathbf{M}_n \mathbf{Z}_n + \mathbf{Z}_n \tilde{\mathbf{R}}_n^{-T} \Delta \mathbf{M}_n \mathbf{P}_n^- + \mathbf{P}_n^- \Delta \mathbf{M}_n \tilde{\mathbf{R}}_n^{-1} \mathbf{Z}_n - \mathbf{P}_n^- \Delta \mathbf{M}_n \mathbf{P}_n^- \tilde{\mathbf{R}}_n^{-T} \Delta \mathbf{M}_n \mathbf{P}_n^-) \tilde{\mathbf{A}}_n^T \\ & - \tilde{\mathbf{A}}_n (\mathbf{P}_n^- \Delta \mathbf{M}_n \mathbf{P}_n^- - \mathbf{Z}_n) \tilde{\mathbf{R}}_n^{-T} \Delta \mathbf{A}_n^T - \Delta \mathbf{A}_n \tilde{\mathbf{R}}_n^{-1} (\mathbf{P}_n^- \Delta \mathbf{M}_n \mathbf{P}_n^- - \mathbf{Z}_n) \tilde{\mathbf{A}}_n^T - \Delta \mathbf{A}_n \mathbf{P}_n^- \tilde{\mathbf{R}}_n^{-T} \Delta \mathbf{A}_n^T + o(\Delta_n^2), \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

其中, $\tilde{\Phi}_n = (\tilde{\mathbf{R}}_n + \tilde{\mathbf{M}}_n)^{-1}$, $\tilde{\mathbf{R}}_n = \mathbf{I}_{\mathcal{M}_1} + \mathbf{M}_n \mathbf{P}_n^-$, $\tilde{\mathbf{M}}_n = (\mathbf{M}_n + \Delta \mathbf{M}_n) \mathbf{Z}_n + \Delta \mathbf{M}_n \mathbf{P}_n^-$, 以及 $o(\Delta_n^2)$ 表示 3 阶及更高阶项.

附录 C 偏导 $\left. \frac{\partial \mathbf{x}_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$

当影响力函数辅助函数为

$$\mathbf{x}_n(\varepsilon) = \arg \min_{\mathbf{x}_n} \left\{ \sum_{i=0}^n F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + \varepsilon [\tilde{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)] \right\}, \quad (\text{C1})$$

则 $\mathbf{x}_n(\varepsilon)$ 对 ε 的偏导计算如下. 定义偏移量 $\mathbf{e}_n^\varepsilon = \mathbf{x}_n(\varepsilon) - \mathbf{x}_n(0)$, 且 $\mathbf{x}_n(0)$ 与 ε 相互独立, 则偏导可以等价转换为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{e}_n^\varepsilon}{\partial \varepsilon}. \quad (\text{C2})$$

因为 $\mathbf{x}_n(\varepsilon)$ 为式 (C1) 最优值, 所以最优一阶条件为

$$\mathbf{0} = \left. \frac{\partial \sum_{i=0}^n F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(\varepsilon)} + \left. \frac{\partial \varepsilon [\tilde{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)]}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(\varepsilon)}. \quad (\text{C3})$$

进一步, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\mathbf{x}_n(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{x}_n(0)$, 对式 (C3) 进行泰勒 (Taylor) 展开得

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \approx & \left[\left. \frac{\partial \sum_{i=0}^n F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} + \left. \frac{\varepsilon \partial [\tilde{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)]}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right] \\ & + \left[\left. \frac{\partial^2 \sum_{i=0}^n F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} + \left. \frac{\varepsilon \partial^2 [\tilde{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)]}{\partial \mathbf{x}_n^2} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right] \mathbf{e}_n^\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{C4})$$

其中 $\mathbf{e}_n^\varepsilon$ 的高阶无穷小项被移除. 然后, 为了求解 $\mathbf{e}_n^\varepsilon$, 对式 (C4) 进行等价变形得到

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n^\varepsilon \approx & - \left[\left. \frac{\partial^2 \sum_{i=0}^n F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} + \left. \frac{\varepsilon \partial^2 [\tilde{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)]}{\partial \mathbf{x}_n^2} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right]^{-1} \\ & \times \left[\left. \frac{\partial \sum_{i=0}^n F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} + \left. \frac{\varepsilon \partial [\tilde{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)]}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C5})$$

因为 $\mathbf{x}_n(0) = \hat{\mathbf{x}}_n$ 是 $\sum_{i=0}^n F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i^\delta)$ 的最小值, 所以有

$$\left. \frac{\partial \sum_{i=0}^n F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n} \right|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} = \mathbf{0}. \quad (\text{C6})$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 将式 (C6) 代入式 (C5) 得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n^\varepsilon &\approx - \left[\frac{\partial^2 \sum_{i=0}^n F(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right]^{-1} \left[\frac{\partial [\tilde{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)]}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right] \varepsilon \\ &\approx - \left[\frac{\partial^2 F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right]^{-1} \left[\frac{\partial [\tilde{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)]}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{C7})$$

根据式 (C2) 和 (C7), 计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}_n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= - \left[\frac{\partial^2 F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right]^{-1} \frac{\partial [\tilde{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)]}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \\ &= - \left[\frac{\partial^2 F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n^2} \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \tilde{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} - \frac{\partial F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n^\delta)}{\partial \mathbf{x}_n} \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(0)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C8})$$

An adaptive robust Kalman filter based on influence function

Wei XUE, Xiaoli LUAN*, Shunyi ZHAO & Fei LIU

Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education), Jiangnan University, Wuxi 214122, China

* Corresponding author. E-mail: xlluan@jiangnan.edu.cn

Abstract To solve the engineering application problems of the Kalman filter, the existing methods often enhance the robustness at the cost of excessive performance loss, which leads to performance degradation. To improve the filtering accuracy, this paper constructs the adaptive robust Kalman filter (ARKF) algorithm based on the Riccati equation with the influence function to minimize the performance loss while reducing uncertainty. First, the influence function is used to perceive and quantify the uncertainty influence in real time; second, the observation deviation caused by uncertainty is inverted according to the quantification; then, the priori covariance matrix of the Riccati equation is adjusted according to the observation deviation, thus realizing the adaptive tuning of the robustness and minimizing the performance loss; lastly, the effectiveness and superiority of the proposed algorithm are demonstrated by numerical simulation and application in the quadruple-capacity water tank experiments.

Keywords Kalman filter, adaptive robust filter, influence function, Riccati equation, uncertainty