中国科学: 信息科学 2010 年 第 40 卷 第 8 期: 1151 ~ 1164
www.scichina.com info.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

# 十字型阵列的互耦自校正算法

胡晓琴[①②], 陈辉[②], 王永良[②*], 陈建文[②]

① 国防科技大学电子科学与工程学院, 长沙 410073
② 武汉空军雷达学院重点实验室, 武汉 430019
* 通信作者. E-mail: wyl_china2008@yahoo.cn

收稿日期: 2009–01–25; 接受日期: 2009–09–18
国家自然科学基金重点项目 (批准号: 60736009) 资助

**摘要** 针对十字型阵列的互耦校正问题, 提出一种信号源的二维角信息与互耦系数联合估计的互耦自校正算法, 该方法对线阵内和线阵间的互耦同时进行校正. 利用线阵内互耦矩阵及线阵间互耦矩阵的特性, 构造重构矩阵, 将耦合的二维角与互耦系数联合估计问题转化为级联估计问题, 不需要校正源, 避免了高维参数的非线性搜索. 理论分析和仿真结果均表明, 提出的方法可以很好地解决十字型阵列的互耦校正问题, 信号的二维角和互耦系数的估计精度高, 且计算量小.

**关键词**
十字型阵列
互耦
自校正
DOA 估计

## 1 引言

十字型阵列是一种典型的估计二维角信息的阵列, 相对于平面阵和圆阵, 十字型阵列结构简单, 且具有线阵的特点, 线阵的研究成果大多可直接用于十字型阵列; 十字型阵列的克拉美罗界 (Cramer-Rao bound, CRB) 和十字型阵列中线阵的 CRB 相同 [1], 所以, 人们经常采用十字型阵列来进行二维角估计 [2,3]. 但以前对十字型阵列的研究都没有考虑误差 (如阵元幅相误差、阵元位置误差、阵元间互耦等) 的影响, 而各种超分辨方法对误差较敏感, 如果不进行校正或补偿, 往往会导致估计性能急剧下降, 甚至完全失效. 与其他阵列误差相比, 阵元间的互耦效应与阵列的电磁特性密切相关, 由于其复杂性, 其校正与补偿一直未找到简单有效的解决方法.

在互耦校正的早期研究中, 一般都是先对互耦进行电磁测量或通过矩量法进行电磁计算, 再通过互耦的测量值或计算值对 DOA 估计算法进行修正 [4], 然而阵元互耦常随着环境和电磁参数的变化而变化, 其测量精度很难满足实际需要. 后来, 人们将阵列互耦校正转化为参数估计问题, 即将互耦参数和信号源的参数进行联合估计, 参数类的互耦校正方法又可以分为有源校正类算法和自校正类算法. 有源校正类算法 [5,6] 通过在空间设置参数精确已知的辅助信源对阵列进行校正, 计算量较小, 但对辅助信源的参数精度要求高. 自校正类算法 [7~9] 通常将信源参数与互耦参数根据某种优化函数进行联合估计, 它不需要辅助信源, 且可以在信源参数估计的同时完成互耦校正, 校正精度较高. 未利用某些特殊阵列结构 (如均匀圆阵、均匀线阵等) 的自校正算法通常都需要求解一个高维、多模的非线性优化问题, 其运算量庞大, 且全局收敛性往往无法保证.

**引用格式:** 胡晓琴, 陈辉, 王永良, 等. 十字型阵列的互耦自校正算法. 中国科学: 信息科学, 2010, 40: 1151–1164

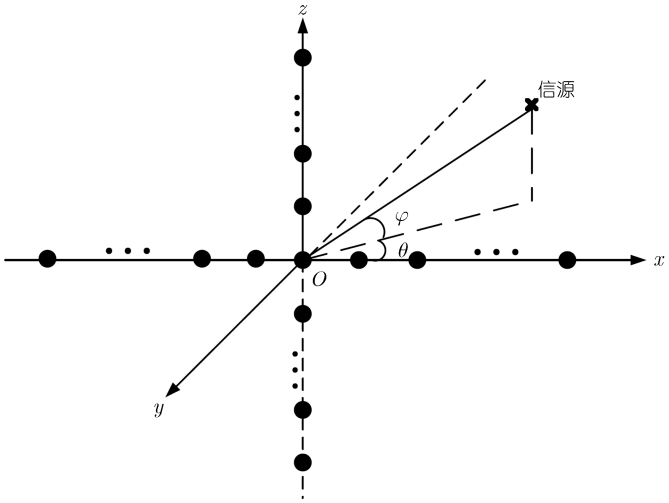



**图 1　十字型阵列结构图**

对于某些特殊的阵列, 人们利用其互耦矩阵的特殊结构来减小参数估计的维数, 降低计算量, 且信源参数和互耦参数估计精度都较高 [10~14]. 均匀线阵的互耦矩阵是一带状、对称 Toeplitz 矩阵, 均匀圆阵的互耦矩阵具有带状循环特性及 Toeplitz 特性, 利用这些特性, 可以实现均匀线阵和均匀圆阵的参数估计和自校正. 十字型阵列中的两个线阵相交, 两个线阵间的阵元很容易发生耦合效应, 这样, 十字型阵列除了线阵内存在互耦外, 两个线阵间的互耦也必须考虑. 所以十字型阵列的互耦校正不像均匀线阵和均匀圆阵可以利用互耦矩阵的 Toeplitz 特性完成互耦自校正, 十字型阵列的互耦很复杂, 特别是两个线阵间的互耦, 所以它的互耦校正很困难, 对线阵的互耦校正方法不能直接用于十字型阵列. 到目前为止, 还没有见到有关这方面的公开报道. 本文在详细分析十字型阵列互耦特性的基础上, 针对十字型阵列的互耦提出一种有效的互耦自校正算法. 该方法在对十字型阵列进行二维估计的同时完成了对互耦参数的在线估计, 不需要校正源, 避免了高维搜索, 估计精度高, 能很好地解决十字型阵列的互耦校正问题.

## 2　十字型阵列的互耦数据模型

### 2.1　十字型阵列结构

十字型阵列由两个正交的线阵组成, 且在两个线阵的中间位置正交, 设交点位于原点 $O$. 为方便分析假定线阵位于坐标轴上 (也可以不在坐标轴上), 这时, 3 个坐标轴 ($x, y, z$ 轴) 中有两个坐标轴上各有一个线阵, 图 1 给出了线阵位于 $x$ 轴和 $z$ 轴的中心对称的十字型阵列结构. 以原点 $O$ 处的阵元为参考阵元, 入射信源的方位角和俯仰角分别为 $\theta$ 和 $\varphi$.

为了保证线阵间的互耦矩阵具有对称性, 将原点处的阵元既看作 $x$ 轴上的阵元也看作 $z$ 轴上的阵元, 设 $x$ 和 $z$ 轴上的阵元数分别为 $2M_x+1, 2M_z+1$, 阵元间距分别为 $d_x, d_z$, 为了保证测角无模糊, 阵元间距一般要满足 $d_x, d_z \leqslant \lambda/2$, $\lambda$ 为波长. 设第 $k$ 个阵元的位置为 $(x_k, z_k)(k = 1, 2, \ldots, 2M_x + 2M_z + 2)$, 则第 $k$ 个阵元相对于参考阵元的相位差为

$$\beta_k = 2\pi(x_k \cos\theta \cos\varphi + z_k \sin\varphi)/\lambda. \tag{1}$$

接收的阵元数据按先 $x$ 轴上的数据后 $z$ 轴上的数据进行排列, 这时

$$x_k=\begin{cases}(k-M_x-1)d_x, & 1\leqslant k\leqslant 2M_x+1;\\ 0, & 2M_x+2\leqslant k\leqslant 2M_x+2M_z+2;\end{cases}\tag{2}$$

$$z_k=\begin{cases}0, & 1\leqslant k\leqslant 2M_x+1;\\ (k-2M_x-1-M_z-1)d_z, & 2M_x+2\leqslant k\leqslant 2M_x+2M_z+2.\end{cases}\tag{3}$$

则导向矢量可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\theta,\varphi)=[&\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(-M_{\mathrm{x}})d_x\cos\theta\cos\varphi/\lambda},\ldots,1,\ldots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi M_{\mathrm{x}}d_x\cos\theta\cos\varphi/\lambda},\\ &\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(-M_z)d_z\sin\varphi/\lambda},\ldots,1,\ldots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi M_zd_z\sin\varphi/\lambda}]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{4}$$

### 2.2 互耦条件下的数据模型

通常在阵列导向矢量建模时, 均假设各阵元相对于其他阵元是独立工作的, 然而由于各阵元间通过空间电磁场的相互作用和影响发生电磁耦合效应, 特别是当阵元间距较小时, 耦合作用表现得很强烈. 为了分析的方便, 假定 $d_x=d_z=d=\lambda/2$, $M_x=M_z=M$.

考虑互耦的影响时, 阵列接收数据可表示为

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}(t)+\boldsymbol{N}(t),\tag{5}$$

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_A+\boldsymbol{C}_T)(\boldsymbol{C}_m+\boldsymbol{C}_T\boldsymbol{I})^{-1},\tag{6}$$

式中, $\boldsymbol{A}$ 为无误差时的阵列流型矩阵, $\boldsymbol{S}(t)$ 为信号矢量, $\boldsymbol{N}(t)$ 为噪声矢量. $\boldsymbol{C}$ 为互耦矩阵 [15], $\boldsymbol{C}_A$ 为天线阻抗矩阵, $\boldsymbol{C}_T$ 为负载阻抗矩阵, $\boldsymbol{C}_m$ 为互耦阻抗矩阵. 对于十字型阵列, 互耦矩阵 $\boldsymbol{C}$ 包含线阵内的互耦矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和线阵间的互耦矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则互耦矩阵 $\boldsymbol{C}$ 又可表示为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}.\tag{7}$$

从 (5) 和 (6) 式可看出, 阵元互耦存在时, 由于各阵元入射开路电压的二次反射, 阵元的输出电压变为各阵元开路电压以相应互耦系数为权系数的线性叠加. 这种现象的存在使经典的导向矢量模型不能反映阵列的真实空间响应, 相应地, 阵列协方差矩阵的特征结构也发生了变化. 因此, 常用的超分辨估计算法的性能在互耦存在时会恶化, 当互耦较严重时, 甚至会完全失效.

根据文献 [15] 中对均匀线阵互耦矩阵的计算和建模可知, 无论是线阵内还是线阵间的互耦作用都满足以下特性:

(1) 阵元间的互耦作用与阵元间距成反比, 互耦作用随着阵元间距的增大而减小, 当阵元间距增大到一定值时, 可以近似为 0;

(2) 间距相同的阵元对应的互耦系数相同, 即具有 Toeplitz 性;

(3) 阵元相对于自己的互耦系数为 1.

设线阵内互耦自由度为 $p$, 对于等距均匀线阵, 只需要考虑相邻 $p$ 个阵元间的互耦效应, 则线阵内

互耦矩阵 $\boldsymbol{D}$ 中元素 $D_{ij}$ 的特性可用下式描述:

$$\begin{cases} D_{i,j}=0, & |i-j|>p, \\ D_{i,j}=D_{1,|i-j|+1}, & \\ D_{i,j}=D_{j,i}, & \\ D_{i,j}=1, & i=j. \end{cases} \tag{8}$$

综上所述, 线阵内互耦矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为一带状、对称的 Toeplitz 矩阵, 则线阵内互耦矩阵 $\boldsymbol{D}$ 可以由它的第 1 行元素唯一表征.

线阵间的互耦矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一对称矩阵, 但没有 Toeplitz 特性, 互耦矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的元素 $B_{i,j}$ 具有以下特性:

$$\begin{cases} B_{i,j}=D_{1,k}, & i=M+1, |j-M|=k, 1\leqslant k\leqslant p; \\ B_{i,j}=D_{1,k}, & j=M+1, |i-M|=k, 1\leqslant k\leqslant p; \\ B_{i,j}=0, & d_{ij}>p_1; \\ B_{i,j}=B_{j,i}. & \end{cases} \tag{9}$$

式中, $d_{ij}$ 为第 $i$ 个阵元与第 $j$ 个阵元的距离, $p_1=(p-1)d+\varepsilon$, $\varepsilon$ 为一大于 0 小于 $d$ 的常数, 该值的大小可以根据十字型阵列的具体结构确定. 在实际应用中, $p_1$ 一般取 $\sqrt{(p-1)^2+1}d$. 即 $p=2$ 时, $p_1$ 一般取 $\sqrt{2}d$; $p=3$ 时, $p_1$ 一般取 $\sqrt{5}d$; $p=4$ 时, $p_1$ 一般取 $\sqrt{10}d$; $p=5$ 时, $p_1$ 一般取 $\sqrt{17}d$.

## 3 十字型阵列的互耦自校正算法

### 3.1 算法原理

记 $\boldsymbol{D}$ 中第 1 行中非 0 的 $p$ 个元素为 $\boldsymbol{d}=[d_1,d_2,\ldots,d_p]^{\mathrm{T}}$, 设 $\boldsymbol{B}$ 中异于 $\boldsymbol{D}$ 的非零元素有 $\bar{p}$ 个, 并记为 $\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\ldots,b_{\bar{p}}]^{\mathrm{T}}$, 且互耦系数矢量 $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. 设信号源数为 $N$, 互耦导向矢量 $\boldsymbol{a}(\theta,\varphi,\boldsymbol{c})$ 满足无秩 $4M$ 模糊, 互耦条件下的导向矢量为

$$\boldsymbol{CA}=[\boldsymbol{a}(\theta_1,\varphi_1,\boldsymbol{c}),\boldsymbol{a}(\theta_2,\varphi_2,\boldsymbol{c}),\ldots,\boldsymbol{a}(\theta_N,\varphi_N,\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{Ca}(\theta_1,\varphi_1),\boldsymbol{Ca}(\theta_2,\varphi_2),\ldots,\boldsymbol{Ca}(\theta_N,\varphi_N)]. \tag{10}$$

则互耦条件下的 MUSIC 谱为

$$F(\theta,\varphi,\boldsymbol{c})=\frac{1}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta,\varphi)\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_N\boldsymbol{U}_N^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Ca}(\theta,\varphi)}, \tag{11}$$

式中, $\boldsymbol{U}_N$ 为噪声子空间. 用联合搜索的方式进行参数估计时, 搜索的维数由不存在互耦时的二维变成了 $2(p+\bar{p}+N-1)$ 维. 在实际的工程实现中, 计算量太大, 不能满足实时处理的要求.

对于无误差时的导向矢量 $\boldsymbol{a}(\theta,\varphi)$, 其可以分为

$$\boldsymbol{a}(\theta,\varphi)=[\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}(\theta,\varphi),\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}(\theta,\varphi)]^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

$\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi),\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)$ 分别为 $x$ 轴和 $z$ 轴上无误差时的导向矢量, 结合 (7) 式可得

$$\boldsymbol{a}(\theta,\varphi,\boldsymbol{c})=\boldsymbol{Ca}(\theta,\varphi)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)\\ \boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Da}_1(\theta,\varphi)+\boldsymbol{Ba}_2(\theta,\varphi)\\ \boldsymbol{Ba}_1(\theta,\varphi)+\boldsymbol{Da}_2(\theta,\varphi)\end{bmatrix} \tag{13}$$

互耦矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为一带状、对称的 Toeplitz 矩阵, 所以

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)=\boldsymbol{T}_1[\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)]\boldsymbol{d}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)=\boldsymbol{T}_1[\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)]\boldsymbol{b}. \tag{15}$$

$\boldsymbol{T}_1[\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)](\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)=\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi),\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi))$ 为一 $(2M+1)\times p$ 的重构矩阵, 可具体表示为

$$\boldsymbol{T}_1[\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)]=\boldsymbol{T}_a[\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)]+\boldsymbol{T}_b[\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)]; \tag{16}$$

$$[\boldsymbol{T}_a]_{i,j}=\begin{cases}\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(i+j-1), & i+j\leqslant 2M+2\\ 0, & \text{其他;}\end{cases} \tag{17}$$

$$[\boldsymbol{T}_b]_{i,j}=\begin{cases}\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(i-j+1), & i\geqslant j\geqslant 2;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases} \tag{18}$$

线阵间的互耦矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵, 将其分为两部分, 即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$, 其中 $\boldsymbol{B}_1$ 对应于含有 $\boldsymbol{D}$ 中元素的部分, $\boldsymbol{B}_2$ 为异于 $\boldsymbol{D}$ 中元素的部分. 则

$$\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)=\boldsymbol{B}_1\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{B}_2\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi), \tag{19}$$

$$\boldsymbol{B}_1\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)=\boldsymbol{T}_2[\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)]\tilde{\boldsymbol{c}}. \tag{20}$$

式中, $\tilde{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{T}_2[\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)]$ 也为一 $(2M+1)\times p$ 的重构矩阵, 具体表示为

$$[\boldsymbol{T}_2]_{i,j}=\begin{cases}\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M+1), & i+j=M+2, i-j=M;\\ \bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M-j+2)+\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M+j), & i=M+1, 2\leqslant j\leqslant p;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases} \tag{21}$$

$\boldsymbol{B}_2$ 的结构及非零元素的个数都没有很明显的规律, 只能根据 $p$ 值、$\bar{p}$ 值和十字型阵列结构具体分析. 设 $\boldsymbol{B}_2\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)=\boldsymbol{T}_3[\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)]\tilde{\boldsymbol{c}}$, $\boldsymbol{T}_3[\bar{\boldsymbol{a}}(\theta,\varphi)]$ 是一以第 $(M+1)$ 行为对称轴的上下对称的矩阵, 维数为 $(2M+1)\times\bar{p}$, 下面给出实际工程中常遇到的几种情况, 即 $p=2,3,4$ 时对应的重构矩阵 $\boldsymbol{T}_3$ 的具体表达式.

$p=2$ 时, $\bar{p}=1$, 则

$$[\boldsymbol{T}_3^{(2)}]_{i,j}=\begin{cases}\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M+1-j)+\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M+1+j), & |i-(M+1)|=1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases} \tag{22}$$

线阵内互耦自由度不同时, 重构矩阵 $\boldsymbol{T}_3$ 的表达式也不同, 这里, 在重构矩阵 $\boldsymbol{T}_3$ 上加右上标以示区别.

$p=3$ 时, $\bar{p}=2$, 则

$$[\boldsymbol{T}_3^{(3)}]_{i,j}=\begin{cases}[\boldsymbol{T}_3^{(2)}]_{i,j}, & j=1;\\ \bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M-1)+\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M+3), & |i-(M+1)|=1, j=2;\\ \bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M)+\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M+2), & |i-(M+1)|=2, j=2;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases} \tag{23}$$

$p=4$ 时, $\bar{p}=4$, 则

$$[\boldsymbol{T}_3^{(4)}]_{i,j}=\begin{cases}[\boldsymbol{T}_3^{(3)}]_{i,j}, & j=1,2;\\ \bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M-2)+\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M+4), & |i-(M+1)|=1, j=4;\\ \bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M-1)+\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M+3), & |i-(M+1)|=2, j=3;\\ \bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M)+\bar{\boldsymbol{a}}_{\theta,\varphi}(M+2), & |i-(M+1)|=3, j=4;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{24}$$

当 $p$ 为其他值时, 也可以写出重构矩阵 $\boldsymbol{T}_3$ 的具体表达式, $p$ 越大, $\boldsymbol{T}_3$ 的表达式越复杂, 但是唯一确定的.

将重构矩阵 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\boldsymbol{T}_3$ 代入 (13) 式得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(\theta,\varphi,\boldsymbol{c})=\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}(\theta,\varphi)&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_1[\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)]\boldsymbol{d}+\boldsymbol{T}_2[\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)]\boldsymbol{d}+\boldsymbol{T}_3[\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)]\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{T}_2[\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)]\boldsymbol{d}+\boldsymbol{T}_3[\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)]\boldsymbol{b}+\boldsymbol{T}_1[\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)]\boldsymbol{d}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_1[\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)]+\boldsymbol{T}_2[\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)] & \boldsymbol{T}_3[\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)]\\ \boldsymbol{T}_2[\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)]+\boldsymbol{T}_1[\boldsymbol{a}_2(\theta,\varphi)] & \boldsymbol{T}_3[\boldsymbol{a}_1(\theta,\varphi)]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{c}\end{aligned} \tag{25}$$

将 (25) 式代入 (11) 式可得

$$F(\theta,\varphi,\boldsymbol{c})=\frac{1}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_N\boldsymbol{U}_N^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{c}}=\frac{1}{\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)\boldsymbol{c}}, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)=\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_N\boldsymbol{U}_N^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}. \tag{27}$$

互耦条件下的 MUSIC 谱又可转化为

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)\boldsymbol{c}=0. \tag{28}$$

由于互耦系数不全为 0, $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$, (28) 式成立的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)$ 为奇异矩阵. 当 $p+\bar{p}\leqslant 4M+1-N$, 且互耦导向矢量 $\boldsymbol{a}(\theta,\varphi,\boldsymbol{c})$ 满足无秩 $4M$ 模糊时, 通常情况下, $(p+\bar{p})\times(p+\bar{p})$ 矩阵 $\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)$ 是满秩的, 当且仅当 $(\theta,\varphi)$ 对应于信号的方位角和俯仰角时才会出现秩损, 使其变为奇异矩阵. 利用这个特性, 可以先用下式估计十字型阵列的方位角和俯仰角:

$$(\hat{\theta},\hat{\varphi})=\arg\min_{(\theta,\varphi)}\{\lambda_{\min}[\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)]\} \tag{29}$$

或

$$(\hat{\theta},\hat{\varphi})=\arg\min_{(\theta,\varphi)}\{\det[\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)]\}. \tag{30}$$

式中, $\lambda_{\min}[\cdot]$ 为求矩阵最小特征值的算子, $\det[\cdot]$ 为求矩阵行列式的算子.

利用估计的方位角和俯仰角 $(\hat{\theta},\hat{\varphi})$, 得到互耦系数为

$$\hat{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{e}_{\min}[\boldsymbol{f}(\hat{\theta},\hat{\varphi})],\qquad \boldsymbol{e}_{\min}(1)=1. \tag{31}$$

$\boldsymbol{e}_{\min}[\cdot]$ 为求矩阵最小特征值对应特征矢量的算子.

### 3.2 算法步骤

根据上面的分析可以得到十字型阵列的二维角和互耦系数的联合估计方法, 称为十字型阵列的互耦自校正算法 (简称为 CCAC 算法), 现总结如下:

(1) 计算数据协方差矩阵的估计值 $\hat{\boldsymbol{R}}$;

(2) 对 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 进行特征分解, 得到噪声子空间 $\hat{\boldsymbol{U}}_N$;

(3) 根据 (16)∼(18) 式得到重构矩阵 $\boldsymbol{T}_1$;

(4) 根据 (21) 式得到重构矩阵 $\boldsymbol{T}_2$;

(5) 根据 $p$ 值、$\bar{p}$ 值和十字型阵列结构确定重构矩阵 $\boldsymbol{T}_3$;

(6) 根据 (25) 式得到重构矩阵 $\boldsymbol{T}$;

(7) 根据 (27) 式得到 $\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)$;

(8) 根据 (29) 或 (30) 式得到方位角和俯仰角的估计值 $(\hat{\theta},\hat{\varphi})$;

(9) 根据 (31) 式估计互耦系数 $\hat{\boldsymbol{c}}$.

通过对十字型阵列结构的分析, 发现十字型阵列的互耦影响除了在线阵内存在外, 线阵间也存在互耦, 这样, 十字型阵列的互耦问题就变得很复杂. 线阵内的互耦矩阵 $\boldsymbol{D}$ 是一带状、对称的 Toeplitz 矩阵, 线阵间的互耦矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一对称矩阵, 基于互耦矩阵的这些特性, 通过分割矩阵和构造重构矩阵, 将相互耦合的 $(\theta,\varphi)$ 和互耦系数 $\boldsymbol{c}$ 的联合估计问题转化为 "解耦" 估计, 即先估计方位角和俯仰角 $(\theta,\varphi)$ 再估计互耦系数 $\boldsymbol{c}$. 这样, 就不需要求解高维的非线性搜索, 只需要进行二维搜索就能解决十字型阵列的二维参数及互耦系数的估计问题. 当线阵内的互耦自由度 $p$ 为 1 时, $\boldsymbol{D}$ 为单位阵, 则提出的 CCAC 算法退化为无误差时的二维 MUSIC 算法. 在计算量方面, 与互耦不补偿的算法相比, 提出的 CCAC 算法计算量有所增加, 前面求重构矩阵是简单的加法运算, 对计算量影响不大, 增加的部分主要体现在最后搜索过程中增加了求行列式或特征分解. 当搜索范围较小时, 增加的计算量并不多, 基本上能满足实时处理的要求. 提出的 CCAC 算法虽然增加了计算量, 但同时对互耦也进行了校正, 且相对于互耦校正中常用的多维非线性搜索, CCAC 算法的计算量很小.

## 4 算法的性能分析

### 4.1 参数估计统计一致性

当阵列快拍数趋向于无穷大时, 样本协方差矩阵趋近于真值, 经过特征分解后得到的噪声子空间投影矩阵的估计值也趋近于真实值, 即

$$\hat{\boldsymbol{U}}_N\hat{\boldsymbol{U}}_N^{\mathrm{H}} \to \boldsymbol{U}_N\boldsymbol{U}_N^{\mathrm{H}}, \tag{32}$$

则相应的二维角估计问题可以表示为

$$(\hat{\theta},\hat{\varphi}) = \arg\min_{(\theta,\varphi)}\{\lambda_{\min}[\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)]\}, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{f}(\theta,\varphi) = \boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_N\boldsymbol{U}_N^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}. \tag{34}$$

只有当 $\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)$ 为奇异矩阵时, 代价函数式 (34) 才可以取最小值 0, 所以只要证明 $\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)$ 秩损的充要条件为 $(\theta,\varphi)$ 的取值为某一信源的真实二维角 $(\theta_i,\varphi_i)(i=1,2,\ldots,N)$, 便可证明二维角估计的一致性, 即

$$(\theta,\varphi) = (\theta_i,\varphi_i) \Leftrightarrow \lambda_{\min}[\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)]. \tag{35}$$

充分条件可由 (28) 式直接得出, 必要条件也就是要证明 (28) 式的解有 $N$ 个, 且为真实的信号方向, 下面用反证法来证明必要条件. 若存在与信源方向不同的 $(\theta_{N+1},\varphi_{N+1})(N+1\leqslant 4M+1)$ 使 $\boldsymbol{f}(\theta,\varphi)$ 秩损, 则有下式成立

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{f}(\theta_{N+1},\varphi_{N+1})\boldsymbol{c}=0, \tag{36}$$

即

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_N\boldsymbol{U}_N^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{c}=0. \tag{37}$$

所以, 矢量 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}(\theta_{N+1},\varphi_{N+1})$ 应位于阵列协方差矩阵的信号子空间中, 根据子空间基与矢量的线性表示关系有

$$\boldsymbol{\Gamma}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}(\theta_1,\varphi_1),\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}(\theta_2,\varphi_2),\ldots,\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}(\theta_N,\varphi_N)]=\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}(\theta_{N+1},\varphi_{N+1}), \tag{38}$$

其中, $\boldsymbol{\Gamma}[\cdot]$ 为某一线性算子. 上式表明有 $N+1$ 个阵列导向矢量相关, 且 $N+1\leqslant 4M+1$, 这与我们对阵列流型无秩 $4M$ 模糊的假设相矛盾, 则证明了解的个数不可能大于 $N+1$.

再证解的个数不少于信号源数 $N$. 当 $\boldsymbol{c}$ 已知时, (26) 式为互耦已知条件下的 MUSIC 算法, 其解有 $N$ 个, 所以解的个数不可能少于 $N$. 由此方位角和俯仰角的统计一致性得到了证明.

下面证明互耦系数估计统计一致性, 实际上就是要证明: 矩阵 $\boldsymbol{f}(\theta_i,\varphi_i)(i=1,2,\ldots,N)$ 的零空间维数均为 1, 它们零特征值对应的首一特征矢量相同且等于互耦系数矢量. 这里仍然用反证法, 如果矩阵 $\boldsymbol{f}(\theta_i,\varphi_i)(i=1,2,\ldots,N)$ 的零空间维数为 $L_i(L_i>1)$, 则有下式成立:

$$\boldsymbol{c}_{k_i}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_N\boldsymbol{U}_N^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{c}_{k_i}=0,\quad k_i=1,2,\ldots,L_i;i=1,2,\ldots,N. \tag{39}$$

根据上式有 $\sum_{i=1}^{N}L_i$ 个导向矢量 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{c}_{k_i}=\boldsymbol{C}_{k_i}\boldsymbol{a}(\theta_i,\varphi_i)$ 位于信号子空间中, 基于我们对阵列流型的无秩 $2M-2$ 模糊的假设, (39) 式成立当且仅当

$$L_i=1,\quad \boldsymbol{c}_{k_i}=\boldsymbol{c},\quad i=1,2,\ldots,N;k_i=1,2,\ldots,L_i. \tag{40}$$

由此证明了互耦系数估计的统计一致性.

### 4.2 算法的模糊性分析

对于理想的均匀线阵, 在无误差的情况下, 它满足阵列流型无模糊的充要条件是阵元间距小于等于 $\lambda/2$. 但当互耦存在时, 由于引入了多个未知的互耦参数, 其与理想导向矢量的耦合使阵列流型发生了变化. 随着互耦自由度 $p,\bar{p}$ 的增大, 对于两个不同的信号源, 其互耦导向矢量可能线性相关, 导致二维角估计的模糊性. 为此, 必须对互耦自由度加以限制, 但由于阵列互耦的复杂性, 阵列流型无模糊的条件很难进行理论分析, 下面给出大量仿真实验得到的结论.

在保证均匀线阵不存在模糊情况下 (阵元间距小于等于 $\lambda/2$), 互耦自由度 $p,\bar{p}$ 满足下列条件:

$$\begin{cases} p\leqslant M+1,\\ \bar{p}\leqslant M+1,\\ p+\bar{p}\leqslant 2M+1,\\ p+\bar{p}<4M+1-N, \end{cases} \tag{41}$$

则二维角估计无模糊, 其中, $\lceil\cdot\rceil$ 表示向上取整. 另外, 互耦自由度 $p,\bar{p}$ 的估计必须正确, 因为 $p,\bar{p}$ 的大小关系到重构矩阵 $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ 和 $\boldsymbol{T}_3$ 的取值.

### 4.3 参数估计的 Cramer-Rao 界 (CRB)

参数估计的 Cramer-Rao 界 (CRB) 给出了无偏参数估计协方差矩阵的下界, 下面给出十字型阵列的方位角、俯仰角、互耦系数联合估计对应的 CRB 表达式. 设噪声方差归一化为 1, 且信源协方差矩阵 $\boldsymbol{R}_s$ 已知, $\tilde{p}=p+\bar{p}$, 则阵列协方差矩阵包含的未知参数共有 $2N+2\tilde{p}-2$ 个 ($N$ 个信源方位角、$N$ 个信源俯仰角、$\tilde{p}-1$ 个互耦系数的实部、$\tilde{p}-1$ 个互耦系数的虚部), 用矢量 $\boldsymbol{\eta}$ 表示如下:

$$\boldsymbol{\eta}=[\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_N,\mathrm{Re}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(2:\tilde{p})),\mathrm{Im}(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(2:\tilde{p}))]^{\mathrm{T}}. \tag{42}$$

则方位角、俯仰角参数及互耦系数联合估计对应的 CRB 可由下式表示:

$$\mathrm{E}\{(\hat{\boldsymbol{\eta}}-\boldsymbol{\eta}_0)(\hat{\boldsymbol{\eta}}-\boldsymbol{\eta}_0)^{\mathrm{T}}\}\geqslant\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{CRB}}=\boldsymbol{J}^{-1}, \tag{43}$$

其中, $\boldsymbol{J}$ 为 $(2N+2\tilde{p}-2)\times(2N+2\tilde{p}-2)$ 阶 Fisher 信息矩阵, 其可分块表示为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\theta\theta} & \boldsymbol{J}_{\theta\varphi} & \boldsymbol{J}_{\theta R} & \boldsymbol{J}_{\theta I}\\ \boldsymbol{J}_{\varphi\theta} & \boldsymbol{J}_{\varphi\varphi} & \boldsymbol{J}_{\varphi R} & \boldsymbol{J}_{\varphi I}\\ \boldsymbol{J}_{R\theta} & \boldsymbol{J}_{R\varphi} & \boldsymbol{J}_{RR} & \boldsymbol{J}_{RI}\\ \boldsymbol{J}_{I\theta} & \boldsymbol{J}_{I\varphi} & \boldsymbol{J}_{IR} & \boldsymbol{J}_{II}\end{bmatrix}, \tag{44}$$

式中, $\boldsymbol{J}_{\theta\theta}$ 为信号方位角估计块, $\boldsymbol{J}_{\varphi\varphi}$ 为俯仰角估计块, $\boldsymbol{J}_{RR}$ 和 $\boldsymbol{J}_{II}$ 为阵元互耦系数的实部和虚部估计块, 其余为相应参数估计的互相关块. (44) 式的第 $i$ 行第 $j$ 列元素可表示为

$$\boldsymbol{J}_{ij}=-\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial\eta_i\partial\eta_j}\right\}, \tag{45}$$

$L$ 为概率密度函数的自然对数.

$$L(\boldsymbol{\eta})=-T\cdot\mathrm{In}[\det(\boldsymbol{R})]-\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}(t)\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X}(t)=-T(\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}^{-1}\hat{\boldsymbol{R}})+\mathrm{In}[\det(\boldsymbol{R}\pi)]), \tag{46}$$

式中, $T$ 为快拍数, $\hat{\boldsymbol{R}}$ 为估计协方差矩阵. 对 $L$ 求 $\eta_i$ 的偏导数有

$$\frac{\partial L}{\partial\eta_i}=T\cdot\left\{\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}\boldsymbol{R}^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}\right\}-\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}\right\}\right\}=T\cdot\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}(\boldsymbol{R}^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{I})\right\}. \tag{47}$$

再求 $L$ 的二阶偏导, 可得

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\eta_i\partial\eta_j}=T\cdot\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta_j}\left[\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}\right](\boldsymbol{R}^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}-\boldsymbol{I})+\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}\left[-\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_j}\boldsymbol{R}^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}\right]\right\}. \tag{48}$$

对 (48) 式两边求期望可得

$$\boldsymbol{J}_{ij}=-\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial\eta_i\partial\eta_j}\right\}=T\cdot\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}\boldsymbol{R}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_j}\right\}. \tag{49}$$

分别求 $\boldsymbol{R}$ 对 $\eta_i$ 和 $\eta_j$ 的偏导数有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_i}=\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{H}},\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\eta_j}=\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{H}},\end{cases} \tag{50}$$

式中 $\boldsymbol{Q}_i=\frac{\partial \boldsymbol{CA}}{\partial \eta_i},\boldsymbol{Q}_j=\frac{\partial \boldsymbol{CA}}{\partial \eta_j}$. 将 (50) 式代入 (49) 式得

$$\boldsymbol{J}_{ij}=2T\cdot \mathrm{Re}\{\mathrm{tr}\{\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{CAR}_s\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}^{-1}\}+\mathrm{tr}\{\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}^{-1}\}\}. \tag{51}$$

对未知互耦参数求导, 可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{CA}}{\partial R_i}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial R_i} & \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial R_i}\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial R_i} & \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial R_i}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}; \tag{52}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{CA}}{\partial I_i}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial I_i} & \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial I_i}\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial I_i} & \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial I_i}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}; \tag{53}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial R_i}=\begin{cases}\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_{(M-i)\times 1},i)+\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_{(M-i)\times 1},-i), & 1\leqslant i\leqslant p-1;\\ \mathrm{zeros}(M), & p\leqslant i\leqslant \tilde{p}-1.\end{cases} \tag{54}$$

式中, $\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_{(M-i)\times 1},i)$ 是 Matlab 中的矩阵运算符号, 表示对 $(M-i)\times 1$ 维全 1 矢量 $\boldsymbol{I}$ 进行对角化, 数值放入对角阵的第 $i$ 个对角线, $\mathrm{zeros}(M)$ 表示 $M\times M$ 的全零矩阵. $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial R_i}$ 的表达式比较复杂, 但只要互耦自由度一定, 其表达式可以根据互耦矩阵的具体结构求得. 当 $i=p,p=3$ 时,

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial R_i}\right)_{(M-1:M+3)\times(M-1:M+3)}=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}, \tag{55}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{CA}}{\partial I_i}=\mathrm{j}\frac{\partial \boldsymbol{CA}}{\partial R_i}. \tag{56}$$

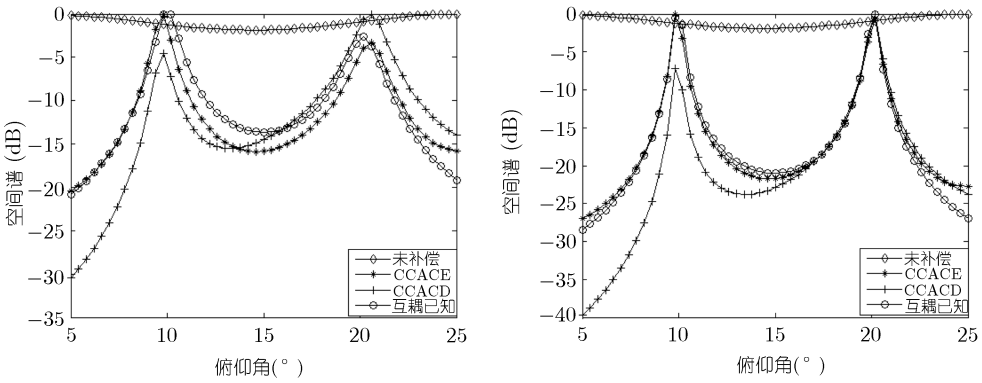
(55) 式给出了 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial R_i}$ 的 $(M-1:M+3)$ 行和 $(M-1:M+3)$ 列组成的矩阵, 其他位置上元素为 0, 所以未给出.

## 5 计算机仿真实验

下面用仿真实验来验证本文提出的十字型阵列的互耦自校正算法 (简称为 CCAC 算法) 的有效性, 基于最小特征值的算法记为 CCACE, 基于行列式的算法记为 CCACD. $x$ 和 $z$ 轴上各有一 9 个阵元组成的均匀线阵, 则共有 17 个阵元, 阵元间距都为半波长. 若未特别说明, 线阵内互耦自由度为 3, 互耦系数矢量 $\boldsymbol{d}=[1,0.7821+0.2583\mathrm{i},-0.5476+0.2469\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$, 线阵间的互耦自由度为 2, 互耦系数矢量 $\boldsymbol{b}=[0.6524-0.2478\mathrm{i},-0.4268+0.2741\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$, 这里的互耦矩阵是随机选取的, 噪声为零均值的高斯白噪声. 若未特别说明, 仿真仅考虑阵列与信源共面时的一维俯仰角估计, 此时方位角 $\theta=0^\circ$. 两个信号源为独立源, 俯仰角分别为 $10^\circ$ 和 $20^\circ$.

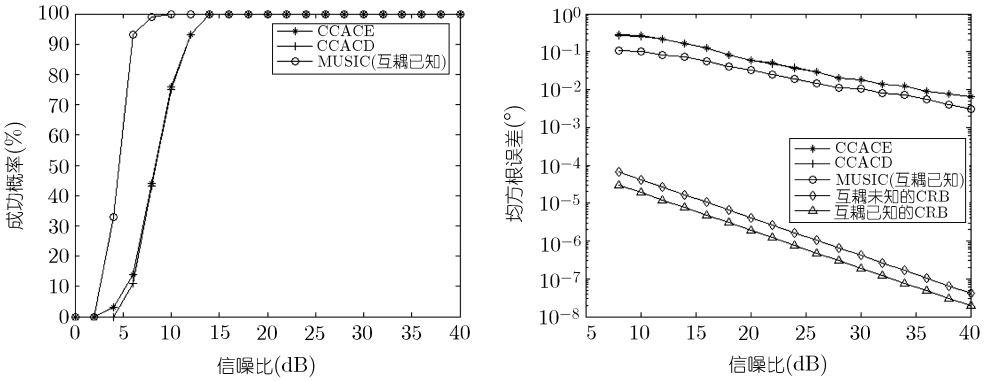
**实验 1** 十字型阵列的互耦自校正 (CCAC) 算法的空间谱曲线图.

快拍数为 200, 图 2 给出了有互耦未补偿的 MUSIC 算法、互耦已知的 MUSIC 算法、提出的 CCACE 和 CCACD 算法的空间谱曲线图. 图 2(a) 和 (b) 中信噪比分别为 10 和 20 dB.




(a) SNR=10 dB (b) SNR=20 dB

**图 2 CCAC 算法的空间谱曲线图**




(a)成功概率与信噪比的关系 (b) 均方根误差与信噪比的关系

**图 3 俯仰角估计性能随信噪比变化的曲线**

图 2 表明, 若对互耦不进行校正, MUSIC 算法完全失效, 无法将两个信号分开. 提出的十字型阵列的互耦自校正算法 (CCACE 和 CCACD) 可以较准确地估计信号源的俯仰角, 且得到的空间谱曲线与互耦已知的空间谱曲线相差不大, 说明在此仿真条件下, 它们的估计性能与互耦已知的 MUSIC 算法比较接近.

**实验 2** 俯仰角估计性能随信噪比变化的曲线.

考察提出的 CCACE、CCACD 算法与互耦已知的 MUSIC 算法随信噪比变化的统计性能, 快拍数为 200, 每个信噪比做 100 次 Monte-Carlo 仿真实验. 图 3(a) 和 (b) 分别给出了算法俯仰角估计的成功概率和均方根误差随信噪比变化的曲线, 估计的两个信号源的俯仰角与真实值的误差均在 0.5° 内视为成功. 信噪比从 0 到 40 dB 变化, 间隔为 2 dB, 同时给出了互耦未知和互耦已知的 CRB.

从图 3 的结果可看出, 提出的 CCACE, CCACD 算法的仿真曲线图基本上重合, 两者的估计性能基本上一致. 当信噪比较低时, 提出的 CCACE, CCACD 算法的估计性能比互耦已知的估计性能差, 但差别不大, 特别是当信噪比较大时. CCACE, CCACD 算法的均方根误差略大于互耦已知的 MUSIC 算法, 但差别较小, 需指出的是, 与互耦已知的 MUSIC 算法不同, 提出的算法是在互耦信息未知情况下获得的高分辨力. CCAC 算法、互耦已知的 MUSIC 算法比互耦已知和互耦未知时的 CRB 高约 3 个数量级, 且互耦未知时的 CRB 要略高于互耦已知时的 CRB.

**实验 3** 互耦系数的估计性能.

参数设置同实验 2, CCACE 算法和 CCACD 算法的估计性能很接近, 下面的表格只列出了 CCACE 算法在不同信噪比条件下对互耦系数估计的均值和均方根误差 (RMSE), 表 1 和 2 分别是线阵内和线阵间互耦系数的估计结果.

表 1 和 2 表明, 当信噪比大于 10 dB 时, 无论是线阵内还是线阵间的互耦系数, 提出的方法的互耦系数估计精度都较高, 随着信噪比的增大, 互耦系数的估计值越来越接近于真实值.

**实验 4** 互耦校正后的二维空间谱曲线.

本实验是考察所提方法的二维 MUSIC 谱估计性能, 有两个非相关源, 其方位角和俯仰角分别为 $(15°, 10°)$, $(25°, 20°)$, 信噪比为 25 dB, 快拍数为 100, 图 4 是互耦校正前的二维 MUSIC 算法, 图 5 是采用 CCACE 算法对互耦进行校正后的 MUSIC 算法, 图 5(a), (b) 分别为空间谱曲线图及其对应的等高线图.

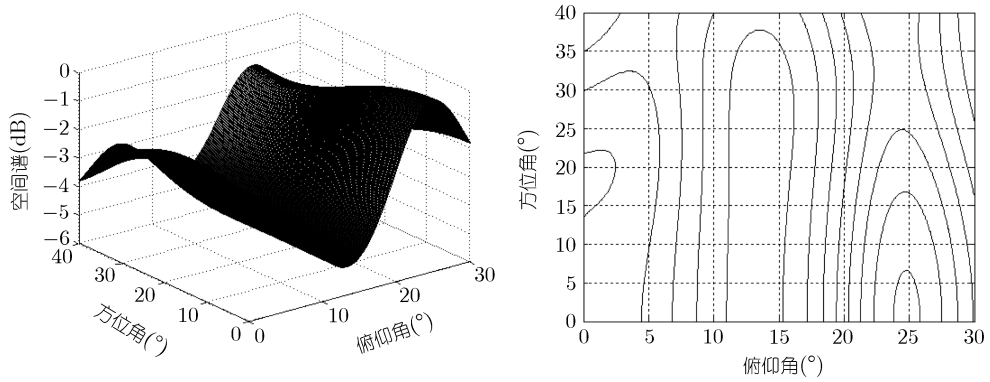
通过对比图 4 和 5 可知, 由于互耦的影响, 未补偿的二维 MUSIC 算法谱曲线没有形成峰值, 无法估计两个信号源的位置. 采用本文提出的方法对十字型的互耦进行校正后, 二维 MUSIC 谱曲线图形成了两个尖锐的峰值, 根据等高线图, 其估计的信号源的方位角和俯仰角比较准确, 即提出的 CCAC 算法对十字型阵列的互耦具有很好的自校正能力.

**表 1 不同信噪比情况下线阵内互耦系数的估计结果**

| 信噪比 (dB) | | 10 | 16 | 20 | 26 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 真实值 d2 = 0.7821+0.2583i | 实部均值 | 0.7747 | 0.7812 | 0.7805 | 0.7818 | 0.7819 | 0.7821 |
| | 实部 RMSE | 2.6221e−2 | 1.1033e−2 | 6.8643e−3 | 3.1340e−3 | 2.2462e−3 | 8.1119e−4 |
| | 虚部均值 | 0.2495 | 0.2566 | 0.2577 | 0.2584 | 0.2582 | 0.2583 |
| | 虚部 RMSE | 2.1926e−2 | 9.7540e−3 | 5.5281e−3 | 2.8383e−3 | 1.9200e−3 | 5.0746e−4 |
| 真实值 d3 =−0.5476+0.2469i | 实部均值 | −0.5382 | −0.5456 | −0.5472 | −0.5473 | −0.5475 | −0.5476 |
| | 实部 RMSE | 2.1952e−2 | 8.9363e−3 | 4.9304−3 | 2.5415e−3 | 1.4479e−3 | 5.1179e−4 |
| | 虚部均值 | 0.2471 | 0.2476 | 0.2465 | 0.2470 | 0.2470 | 0.2470 |
| | 虚部 RMSE | 1.0435e−2 | 5.5760e−3 | 3.2927e−3 | 1.7946e−3 | 1.2856e−3 | 3.3228−4 |

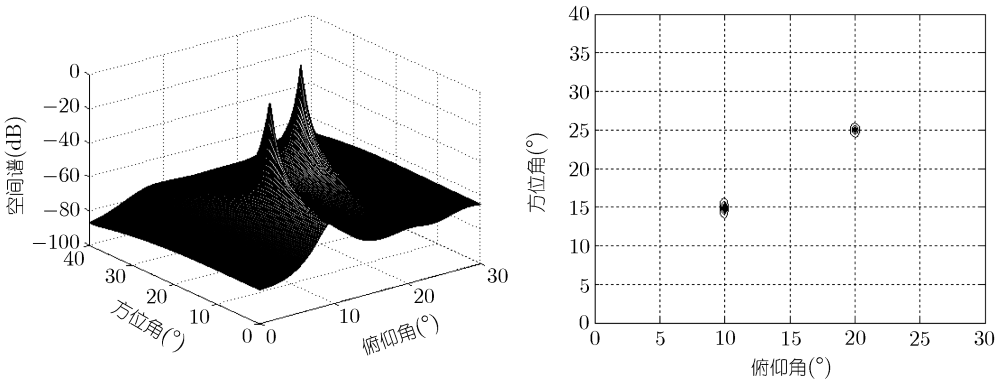
**表 2 不同信噪比情况下线阵间互耦系数的估计结果**

| 信噪比 (dB) | | 10 | 16 | 20 | 26 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 真实值 b1 =0.6524−0.2478i | 实部均值 | 0.6353 | 0.6503 | 0.6522 | 0.6519 | 0.6524 | 0.6524 |
| | 实部 RMSE | 4.0717e−2 | 1.5749e−2 | 9.1517e−3 | 4.5248e−3 | 3.0310e−3 | 1.0472e−3 |
| | 虚部均值 | −0.2482 | −0.2477 | −0.2476 | −0.2476 | −0.2478 | −0.2478 |
| | 虚部 RMSE | 2.0683e−2 | 1.2737e−2 | 7.0534e−3 | 3.8904e−3 | 2.1996e−3 | 7.2294e−4 |
| 真实值 b2 =−0.4268+0.2741i | 实部均值 | −0.4154 | −0.4227 | −0.4245 | −0.4263 | −0.4262 | −0.4268 |
| | 实部 RMSE | 3.0679e−2 | 1.1864e−2 | 7.2528e−3 | 3.4884e−3 | 2.1415e−3 | 7.5621e−4 |
| | 虚部均值 | 0.2732 | 0.2747 | 0.2725 | 0.2736 | 0.2743 | 0.2741 |
| | 虚部 RMSE | 2.1373e−2 | 9.1912e−3 | 6.8950e−3 | 2.8669e−3 | 1.4504e−3 | 5.8672e−4 |




(a) 空间谱曲线图 (b) 等高线图

**图 4 互耦校正前的二维 MUSIC 算法性能**




(a) 空间谱曲线图 (b) 等高线图

**图 5 互耦校正后的二维 MUSIC 算法性能**

## 6 结论

本文结合十字型阵列的特殊结构, 通过对十字型阵列的互耦详细分析可知, 十字型阵列的互耦校正除了要考虑线阵内的互耦外, 还必须考虑两个线阵间的互耦. 利用线阵内互耦矩阵的带状、对称 Toeplitz 特性及线阵间互耦矩阵的对称特性, 对互耦矩阵进行分割后构造重构矩阵, 将相互耦合的二维角信息及互耦系数的联合估计问题转化为 “解耦” 估计, 提出一种十字型阵列的互耦自校正算法 (简称为 CCAC 算法). 该方法不需要校正源和高维搜索, 计算量较小. 理论分析和仿真结果均表明了提出的 CCAC 算法对十字型阵列互耦校正的有效性.

## 参考文献

1 Hua Y B, Sarkar T K, Weiner D D. An L-shaped array for estimating 2-D directions of wave arrival. IEEE Trans Antenn Propag, 1991, 39: 143–146

2 Abed-Meraim K, Hua Y. 3-D near field source localization using second order statistics. In: Proceedings of the 31st Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers , 1998. 1307–1311

3 梁军利, 冀邦杰, 赵峰. 一种基于平行因子分析的近场源定位新方法. 电子学报, 2007, 35: 1909–1915

4 Yeh C, Leou M, Ucci D R. Bearing estimation with mutual coupling present. IEEE Trans Antenn Propag, 1989, 37: 1332–1335
5 Stavropoulos K, Manikas A. Array calibration in the presence of unknown sensor characteristics and mutual coupling. In: Proceedings of European Signal Processing Conference, 2000. 1417–1420
6 Gupta I J, Baxter J R, Ellingson S W. An experimental study of antenna array calibration. IEEE Trans Antenn Propag, 2003, 51: 664–667
7 Jaffer A G. Constrained mutual coupling estimation for array calibration. In: Proceedings of the 35th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2001. 1273–1277
8 Jaffer A G. Sparse mutual coupling matrix and sensor gain/phase estimation for array auto-calibration. In: Proceedings of IEEE Radar Conference, 2002. 294–297
9 Goossens R, Rogier H. A hybrid UCA-RARE/Root-MUSIC approach for 2-D direction of arrival estimation in uniform circular arrays in the presence of mutual coupling. IEEE Trans Antenn Propag, 2007, 55: 841–849
10 王布宏, 王永良, 陈辉, 等. 均匀线阵互耦条件下的鲁棒 DOA 估计及互耦自校正. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2004, 34: 229–240
11 Qi C Y, Wang Y L, Zhang Y S. DOA estimation and self-calibration algorithm for uniform circular array. IEE Electron Lett, 2005, 41: 1092–1094
12 Sellone F, Serra A. A novel online mutual coupling compensation algorithm for uniform and linear arrays. IEEE Trans Signal Process, 2007, 55: 560–573
13 Qi C Y, Chen Z J, Zhang Y S. DOA estimation and self-calibration algorithm for multiple subarrays in the presence of mutual coupling. IEE Proc Radar Sonar Nav, 2006, 153: 333–337
14 Min L, Yang L X. Blind calibration and DOA estimation with uniform circular arrays in the presence of mutual coupling. IEEE Antenn Wirel Propag Lett, 2006, 5: 315–318
15 Svantesson T. Mutual coupling compensation using subspace fitting. In: Proceedings of IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, 2000. 494–498