



运动学奇异性导致的自旋效应

刘伯超*

西安交通大学物理学院, 西安 710049

*联系人, E-mail: liubc@xjtu.edu.cn

收稿日期: 2025-10-27; 接受日期: 2026-01-04; 网络出版日期: 2026-03-12

陕西省自然科学基金(编号: 2024JC-YBMS-010)资助项目

摘要 对散射振幅中运动学奇异性的研究长期以来一直是人们关注的课题, 其中三角奇点的研究近年来更成为强子谱学领域的一个热点问题. 一方面, 人们一直期望获得三角奇点存在的实验证据; 另一方面, 三角奇异性机制的贡献可能影响对某些强子态信号的解释, 因而对强子谱学研究具有特殊意义. 以往的研究主要聚焦于三角奇异性机制对不变质量谱的影响, 而本文则重点探讨在某些过程中, 该机制会导致末态粒子的自旋取向呈现出特定的模式, 并表现出强烈的能量依赖性. 这种自旋取向的能量依赖性反映了末态粒子处于不同自旋态的相对概率随能量的变化, 它不仅与三角奇点出现的能量条件相关, 还依赖于内线粒子动量平行的条件以及相关粒子的量子数. 因此, 这种依赖性不同于不变质量谱中谱线所体现的能量行为, 并携带了关于反应机制更为丰富的信息. 对三角奇异性机制自旋效应的研究, 对于更全面地理解其物理效应以及在实验上验证其贡献具有重要意义. 同时, 鉴于自旋观测量对运动学条件具有独特的敏感性, 可以预期其在探索更广泛类型的运动学奇异性方面也具有相当大的潜力, 值得进一步研究.

关键词 运动学奇异性, 自旋效应, 不变质量谱

PACS: 11.55.Bq, 13.25.Gv, 13.88.+e

1 引言

强相互作用作为自然界四种基本相互作用之一, 其研究对于揭示物质基本结构和自然界的基本规律具有重要意义. 通过深入探索强子谱(涵盖强子的结构与性质)以及涉及强相互作用的散射和衰变过程, 能够更全面地理解强相互作用的本质. 近年来, 得益于实验与理论研究的飞速发展, 人们对强子谱、强子结构以及强相互作用在非微扰区域的性质有了更为深刻的认

识. 在实验领域, 一系列新强子候选粒子的发现尤为引人注目^[1-4]. 其中, 部分强子态^[5-9]无法用传统的夸克模型来解释. 这些奇特强子态的出现, 不仅对传统重子(由三个夸克组成)与介子(由正反夸克对构成)模型构成了挑战, 同时也为探索强相互作用提供了新的视角和平台. 在不同的理论框架下, 这些奇特态被解释为紧致多夸克态、强子分子态、混杂态等多种可能结构^[10-15]. 此外, 一些新发现的强子态其质量接近于两强子的质量阈值, 这暗示着阈值效应(包括CUSP效应、

引用格式: 刘伯超. 运动学奇异性导致的自旋效应. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2026, 56: 240016

Liu B-C. Spin effects induced by kinematic singularity (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2026, 56: 240016, doi: 10.1360/SSPMA-2025-0487

三角奇异性机制等)可能在这些系统中扮演着重要角色,进而为实验结果提供了非共振态的潜在解释^[16].由于不同理论模型对这些奇特强子态的描述存在显著差异,如何通过实验手段有效区分这些模型,成为当前强子谱研究的重要问题.

20世纪50–60年代,物理学家们已经意识到,在散射或衰变过程中,当系统满足特定运动学条件时,散射振幅中会出现运动学奇异性,并可能引发可观测的物理效应^[17–19].探究这些运动学奇异性,尤其是阈值支点和三角奇点(TS),一直是粒子物理研究的重要课题.近年来,得益于实验技术的长足发展——包括反应能量范围的拓展、探测器性能的显著提升,以及对相关散射和衰变过程的深入分析,关于三角奇点(其产生机制称为三角奇异性机制)¹⁾及其物理效应的研究受到了前所未有的关注.虽然早期研究已表明三角奇点的出现会产生可观测的物理效应,但由于这些效应的特征与共振态所产生的效应颇为相似,这给实验中区分三角奇异性机制和传统共振态模型带来了挑战.进一步的研究表明,三角奇异性机制在某些过程中能引发反常的同位旋破坏效应^[20],其贡献还可能对理解一些强子态本质产生重要影响^[21–24].尽管关于三角奇点的研究已取得显著进展,理论研究也提出了许多可能存在三角奇点的新过程^[16],但对其贡献的确认仍需更多的理论与实验证据.三角奇点的产生依赖于特定的运动学条件,以往的研究主要集中在探讨三角奇点产生所需的能量条件以及它们在不变质量谱中所产生的效应,而对其他潜在的可观测效应关注不足.本团队^[25,26]近期的研究表明,三角奇异性机制对应的特殊运动学条件在部分过程中还会引发显著的自旋效应,使末态粒子处于特定的自旋状态或取向.与传统的不变质量谱分析相比,这种自旋效应不仅受能量条件约束,还与内线粒子的动量方向和量子数紧密相关,进而提供了更多关于反应机制的信息.值得注意的是,相对于共振态极点对应的能量依赖是自旋无关的,由三角奇异性机制导致的自旋效应对不变质量存在强烈的依赖关系,这一差异为区分三角奇异性机制与普通共振态模型提供了一种新的判据.因此,对三角奇异性机制的自旋效应的研究,不仅为探索三角奇异性机制提供了新的视角,也为实验中甄别不同模型提供了新的途

径.

CUSP效应是另一种由运动学奇异性引起的阈值现象,它源于散射振幅中的阈值支点.近年来,实验上发现部分XYZ态的质量接近重介子对的阈值,有研究者提出,这些态的信号可由CUSP效应来解释^[27–32].虽然这一观点受到了质疑^[33],但如何通过实验直接验证这一观点正确与否,仍是当前值得探讨的问题.此外,CUSP效应的强度可能会因阈值附近存在的极点而得到增强,因此CUSP效应与浅束缚强子分子态的研究也紧密相关.强子分子态模型预言某些强子分子态的不变质量谱的线型会出现非平庸的结构,对这些能量依赖关系的深入研究,将为揭示强子态的内部结构提供重要信息^[16].在关于三角奇异性机制的研究中^[25,26],本团队发现在中间态两体阈值处,末态粒子的自旋状态也表现出明显的能量依赖.这种自旋效应不仅受到阈值对应的能量条件的影响,还与内线粒子的量子数密切相关.进一步探究这种自旋效应及其能量依赖关系,有可能为验证强子分子态模型提供一种新途径,并有助于人们更全面地理解阈值现象.

本文旨在探讨三角奇点与两体阈值CUSP效应的产生条件与特征,分析二者可能导致的自旋效应及其物理起源,并考察其作为区分不同反应机制的探针潜力,以期深入揭示运动学奇异性的物理效应并在实验中加以验证提供新视角,从而推动相关研究的进一步发展.

2 运动学奇异性产生的条件

运动学奇异性的产生需要满足特殊的运动学条件,这些条件不仅决定了运动学奇异性能否产生,而且决定了其可能带来的物理效应,因此有必要首先回顾一下相关内容.文献中对相关问题已经有了非常充分的讨论,这里主要参考文献^[16]给出单圈图的结果,对更一般的结果及详细的推导可以参考文献^[16].对一个包含 n 个内线的单圈费曼图中可能出现的运动学奇异性,可以考虑以下的圈图积分:

$$I(p_1, \dots, p_m) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{k_1^2 - m_1^2 + i\epsilon} \cdots$$

1) 此处我们对“三角奇点”(Triangle Singularity)与“三角奇异性机制”(Triangle Singularity Mechanism)中Singularity的中文译法进行了区分:前者主要用于讨论三角奇点的位置及其产生条件;后者则涵盖三角图过程中所有的运动学奇异性,包括三角奇点及两体阈值处的运动学奇异性.

$$\frac{1}{k_n^2 - m_n^2 + i\epsilon}, \quad (1)$$

其中 $p_1, \dots, p_m$ 是 m 个外线粒子的动量, $k_1, \dots, k_n$ 是 n 个内线粒子的动量, q 是圈图积分的动量. 这里需要说明的是, 对于一般的圈图过程, 被积函数的分子部分原则上也是动量的函数, 但是由于积分结果中的奇异性只能来自于被积函数中分母为 0 的贡献, 所以这样的简化并不影响对运动学奇异性产生条件的讨论. 另一方面, 振幅分子部分对动量的依赖当然会影响最终可观测的物理效应. 由参考文献[16]可知, 式(1)的圈图积分中出现奇异性的条件是满足以下朗道方程:

$$\begin{cases} \sum_i^n \pm \alpha_i k_i^\mu = 0, \\ \alpha_i = 0 \text{ 或 } k_i^2 - m_i^2 = 0, \end{cases}$$

其中 $\sum_i \alpha_i = 1$. 对于式(1)中 $n = 2$ 的情况, 也就是两粒子圈图, 可以得到两体阈值奇点在物理区域的解是

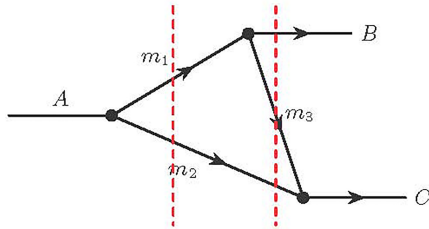
$$\alpha_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \alpha_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, p^2 = (m_1 + m_2)^2.$$

其中 $p^2 = (m_1 + m_2)^2$ 意味着在质心能量等于中间两粒子阈值处存在奇异性. 对于式(1)中 $n = 3$ 的情况, 三角奇点处于物理区域的解为:

$$y_{12} = y_{13}y_{23} - \sqrt{1 - y_{13}^2} \sqrt{1 - y_{23}^2}, \quad (2)$$

其中

$$y_{ij} = \frac{k_i \cdot k_j}{m_i m_j} = \frac{m_i^2 + m_j^2 - p_k^2}{2m_i m_j} \quad (i \neq j \neq k).$$



利用上式可以确定满足三角奇点产生条件的不变质量的位置或范围. 同时, 根据Coleman-Norton理论^[18]可知, 三角奇点的出现对应的物理图像非常特殊: 在如图1所示的衰变过程中的母粒子A的静止系中, A衰变为粒子1和2, 1粒子进一步衰变为B和3粒子, 如果3粒子沿1粒子的反方向运动, 并有足够大的速度追上2粒子并合并产生C粒子, 同时三个内线粒子都在壳, 则三角奇点就会产生, 这个过程对应的是一种经典过程的图像. 由于中间的1粒子能够衰变到在壳的B和3粒子, 这意味着1粒子具有有限的衰变宽度, 所以实际过程的三角奇点处于靠近物理区域的复平面上, 物理振幅在靠近奇点的区域由于奇点的存在而得到增强, 从而产生可观测的物理效应^[16]. 在以往文献中讨论的主要是三角奇点在不变质量谱中可导致的可观测效应, 本文将着重讨论三角奇点可产生的自旋效应.

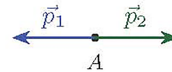
3 两体散射过程中中间共振态的自旋状态

为了更好地理解运动学奇异性可能引发的自旋效应, 可以先以质心系中 πN 弹性散射的 s -道过程为例, 考察 $\Delta(1232)$ 和 $N(1440)$ 两个共振态的产生, 并探讨散射过程中特殊运动学条件与共振态自旋状态之间的关联.

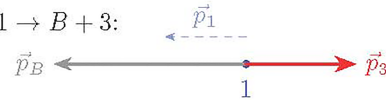
$\Delta(1232)$ 和 $N(1440)$ 的自旋-宇称量子数 J^P 分别为

质心系

$A \rightarrow 1 + 2:$



$1 \rightarrow B + 3:$



$2 + 3 \rightarrow C:$



图1 产生三角奇点的运动学机制

Figure 1 Kinematical mechanism of the production of a triangle singularity.

$\frac{3}{2}^+$ 和 $\frac{1}{2}^+$. 由于该反应过程中角动量和宇称守恒, 分析表明它们只能与轨道角动量 $L = 1$ (即 p 波) 的 πN 态耦合. 在 πN 质心系中, 若取 π 介子束流的动量方向为 z 轴, 并假设初态核子自旋未极化, 分别考察这两个共振态产生过程对应的末态粒子角分布, 则结果如图 2 所示. 如图所示, 尽管两个过程均涉及 p 波共振态、初态核子无极化, 且初态粒子动量具有相同的方向, $\Delta(1232)$ 衰变的角分布呈现碗状结构, 而 $N(1440)$ 的角分布却是各向同性的. 这自然引出一个问题: 为何自旋不同的中间共振态会导致如此显著的角分布差异? 如果这一差别确实源于中间态自旋的不同, 那么其背后的物理机制是什么? 是否存在某种规律?

对于这个问题, 可以作如下分析. 由于将初态粒子的运动方向设为 z 轴, 因此初态粒子满足 $p_x = p_y = 0$. 另一方面, 轨道角动量算符沿 z 方向的分量定义为 $L_z = X P_y - Y P_x$, 这意味着 L_z 作用在入射的 πN 态上满足 $L_z |\pi N\rangle_{\text{in}} = 0$. 因此, 无论初态 πN 的轨道角动量子数 L 为何, 其沿 z 轴的磁量子数 m 恒为 0.

若进一步将初态核子与中间共振态的自旋投影方向也取为 z 轴, 则由于初态轨道角动量在 z 方向的投影为零, 根据角动量守恒, 初态核子沿 z 方向的自旋磁量子数与中间共振态沿 z 方向的自旋磁量子数必须相等. 在前述例子中, 初态核子自旋为 $\frac{1}{2}$ 且未极化, 因此中间共振态沿 z 轴的自旋投影只能是 $\pm\frac{1}{2}$, 且处于 $+\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 态的概率相同, 这一结论与中间共振态本身的自旋大小无关.

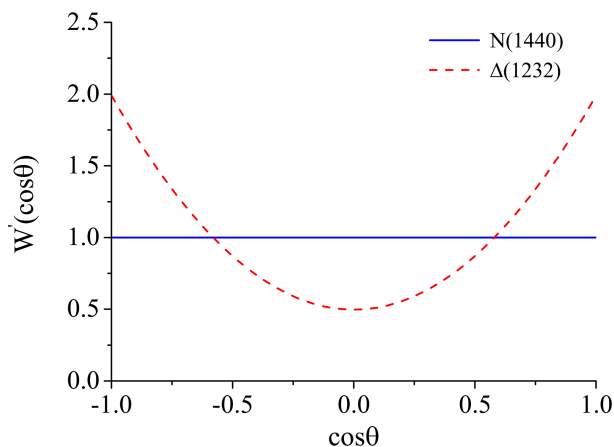


图 2 πN 弹性散射中中间态 $\Delta(1232)$ 和 $N(1440)$ 衰变的角分布
Figure 2 Angular distributions from the decays of the intermediate states $\Delta(1232)$ and $N(1440)$ in πN elastic scattering.

若中间共振态为 $N(1440)$, 其自旋为 $\frac{1}{2}$, 且两种自旋投影态的占据概率相等, 因此其自旋无极化(即无特定取向), 导致其衰变末态的角分布呈各向同性.

然而对于 $\Delta(1232)$ (自旋为 $\frac{3}{2}$), 角动量守恒要求其自旋投影不能取 $\pm\frac{3}{2}$ (因为初态最大自旋投影仅为 $\pm\frac{1}{2}$), 因此它只能处于 $m = \pm\frac{1}{2}$ 的自旋态. 这种自旋态的选择性意味着 $\Delta(1232)$ 的自旋具有特定的取向(或称排列), 而这种取向会反映在其衰变末态粒子的角分布上.

自旋取向与特定角分布之间的关联进一步表明: 在一些情况下, 通过分析衰变末态的角分布, 可以反推母粒子的自旋状态. 综上所述, 当初态粒子动量相互平行时, 若以该动量方向作为自旋极化轴, 则初态粒子与中间共振态的自旋态之间存在特殊关联. 具体而言, 对于过程 $A + B \rightarrow R$, 若满足 $S_A + S_B < S_R$, 则共振态 R 的自旋磁量子数将受到初态运动学条件的限制, 只能取某些特定的值. 反过来, 通过分析 R 衰变末态粒子的角分布, 可以提取中间共振态所处自旋态的信息, 进而反推初态粒子的入射方向的特征.

4 运动学奇异性导致的自旋效应

上节的讨论表明, 在一些情况下, 通过研究中间共振态的自旋状态, 可以判断共振态产生过程中初态是否处于特定的运动方向. 由于运动学奇异性的产生依赖于特定的运动学条件, 这提示我们: 原则上, 可通过分析中间共振态的自旋状态来判断其产生过程是否满足这些条件.

以图 1 所示物理过程中三角奇点的产生为例, 在 A 的静止系中, 内线粒子 1、2 和 3 的动量方向需共线; 同时, 动量守恒要求内线粒子的动量方向与末态粒子的动量方向也共线. 因此, 当三角奇点的贡献占主导时, 内线粒子的运动方向是确定的. 若此时选取末态粒子的动量方向作为其自旋极化轴(对应的自旋态即为螺旋度态), 且在粒子 2 与 3 的自旋之和小于粒子 C 自旋的情况下, 可预期末态粒子 C 的螺旋度只能取某些特定的值.

需要说明的是, 上节关于共振态自旋态的讨论是在共振态静止系中进行的, 而图 1 中动量方向共线的条件是在 A 的静止系中得出的, 二者相差一个沿末态粒子动量方向的洛伦兹平移变换. 由于该变换方向与末态动量一致, 在三角奇点产生条件满足时, 它既不会破

坏内线粒子动量方向共线的构型, 也不会改变螺旋度的取值, 因此本研究的结论不受此参考系变换的影响.

在实际观测中, 可通过朗道方程确定三角奇点产生条件所对应的末态粒子不变质量的位置. 若三角奇异性机制贡献显著, 则不变质量谱在该位置附近应出现类似共振峰的结构. 相应地, 由于三角奇异性机制对自旋态具有选择性, 我们预期在图1所示过程中, 当 $S_2 + S_3 < S_C$ 时, 粒子 C 的螺旋度在三角奇点对应的不变质量处仅能取特定值; 而当偏离该不变质量时, 内线粒子动量方向共线的条件不再满足, 这种自旋态的选择性将逐渐消失, 从而导致不同自旋态产额对不变质量表现出显著的依赖性.

在实验分析中, 通常利用自旋密度矩阵描述粒子的自旋信息. 三角奇点附近粒子的自旋态的这种选择性意味着, 末态粒子 C 的自旋密度矩阵在对应不变质量区域将呈现明显的能量依赖性. 通过对这种依赖性的测量, 实验上可提供一种研究三角奇异性机制的新途径.

更重要的是, 这种自旋状态对不变质量的依赖提供了一种区分三角奇异性机制与共振态产生过程的方法. 对共振态模型来说, 一般认为在共振态极点附近振幅对不变质量的依赖主要来自于共振态传播子的分母部分, 由于这种能量依赖是自旋无关的, 而自旋密度矩阵对角元反映了粒子处于不同自旋态的相对概率, 因此可以预期在共振态模型中自旋密度矩阵对角元对不变质量的依赖是比较平缓的, 相对于三角奇异性机制对应的在三角奇点附近强烈的能量依赖, 这种差异提供了区分三角奇异性机制与共振态模型的新方法.

5 例子

本节结合两个具体例子来讨论运动学奇异性可能导致的自旋效应.

5.1 $J/\psi \rightarrow \phi\eta\pi$

在文献[34]中, 作者认为如果考虑一组 $K^*K\bar{K}$ 三角图(图3(a))的贡献, 则在 $J/\psi \rightarrow \eta\pi\phi$ 反应中, $\pi^0\phi$ 不变质量分布会在1.4 GeV附近产生一个峰, 这与BESIII合作组最近对该反应的测量结果[35]吻合得很好. 当然, 实验观察到的峰也可以通过考虑共振态的产生(图3(c))

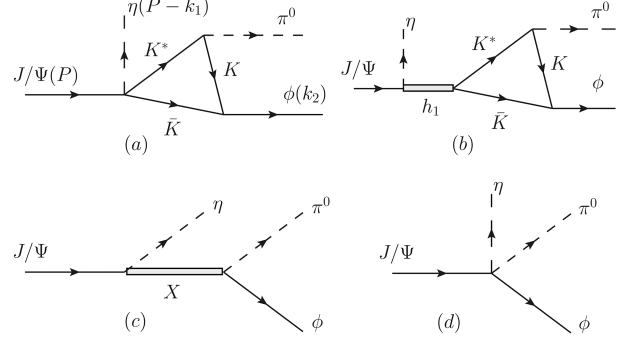


图3 $J/\psi \rightarrow \eta\pi\phi$ 反应的费曼图: (a) 通过 $K^*K\bar{K}$ 三角图; (b) 产生 h_1 并通过 $K^*K\bar{K}$ 三角图衰变; (c) 通过共振态 X 的树图过程; (d) 接触项. 取自文献[25]

Figure 3 Feynman diagrams for the $J/\psi \rightarrow \eta\pi\phi$ reaction: (a) via the $K^*K\bar{K}$ triangle loop; (b) via production of h_1 followed by decay through the $K^*K\bar{K}$ triangle loop; (c) tree-level process involving a resonance X ; (d) contact term. Taken from ref. [25].

来解释. 在文献[34]中, 作者建议通过检查1.4 GeV附近的结构在偏离 ϕ 质量区域的 K^+K^- 不变质量中是否依然存在来区分这两种模型. 随后, 文献[36]的作者认为, 该衰变也可以通过先产生 $h_1(1415)$, 然后 $h_1(1415)$ 通过相同的三角图衰变为 $\pi\phi$ (图3(b))发生. 文献[34, 36]中的模型都涉及三角奇异性机制, 我们称其为TS模型, 以区别于共振态模型(图3(c)), 后者产生共振态并衰变, 而没有显著的末态重散射效应. 这里将根据文献[25]中的工作来讨论通过测量末态 ϕ 的自旋密度矩阵元可以区分这两种模型. 末态 ϕ 的自旋密度矩阵元定义如下:

$$\rho_{00}^\phi(m_{\pi^0\phi}) = \frac{\int d\Omega_\eta d\Omega_{\pi^0} \sum_m \mathcal{M}_{m,\lambda=0} \mathcal{M}_{m,\lambda'=0}^*}{\int d\Omega_\eta d\Omega_{\pi^0} \sum_{m,\lambda''} |\mathcal{M}_{m,\lambda''}|^2}, \quad (3)$$

其中 $m(=\pm 1)$ 代表 J/ψ 总角动量的 z 分量, 而 λ, λ' 和 λ'' 是在 $\pi\phi$ 静止系中末态 ϕ 的螺旋度. ρ_{00}^ϕ 可以通过 $\phi \rightarrow K\bar{K}$ 过程中 K 或 $\bar{K}$ 的角分布提取[37–39]:

$$W(\cos\theta) \sim \frac{3}{2} \left[\rho_{00}^\phi \cos^2\theta + \frac{1}{2}(1 - \rho_{00}^\phi) \sin^2\theta \right], \quad (4)$$

其中 θ 是在螺旋度系中定义的.

对于共振态模型, 本文考虑了两种可能的中间共振态: 分别是 $C(1480)(I=1, J^{PC}=1^{--}$, 模型I)[40, 41]和 $h_1(1415)(I=0, J^{PC}=1^{+-}$, 模型II)[42]; 对于三角奇点(TS)机制, 本文考虑了图3(a)(模型III)[34]和图3(b)(模

型IV)[36]两种模型. 针对共振态模型, ρ_{00}^ϕ 的计算结果如图 4 所示, 其中模型IIA和IIB对应于模型II中 $h_1(1415)$ 顶点拉格朗日量中混合角 θ_π 的两种不同取值(参见文献[25]). 可以看出, 无论采用哪种共振态模型, ρ_{00}^ϕ 对 $\phi\pi$ 不变质量的依赖均非常微弱, 这与我们此前的预期一致——因为在计算式(3)所定义的比值时, 共振态传播子分母中对能量的依赖实际上被抵消了.

对于TS模型, 中间的 $K^*K\bar{K}$ 三角图可由两种不同的电荷组态构成. 由于不同电荷组态的质量差异, 带电与电中性 $K^*K\bar{K}$ 三角图对应的三角奇点位置(由朗道方程确定)分别为 $m_{\pi\phi} = 1.3857$ GeV 和 $m_{\pi\phi} = 1.3952$ GeV. 图5展示了 ρ_{00}^ϕ 在三角奇点附近的行为: 若忽略 K^* 的宽度, 则 $\rho_{00}^\phi \sim 1$; 当计入 K^* 宽度时, 三角奇点偏离物理区域, 其在圈图中的贡献占比下降, 导致 $\rho_{00}^\phi < 1$, 但仍保持较大数值. 此外, 在图 5 的嵌入图中, 可观察到在电中性 $K^{*0}\bar{K}^0$ 两体阈值处($m_{\pi\phi} = 1.3931$ GeV), ρ_{00}^ϕ 呈现出微弱的尖峰结构. 该结构源于在 $K^*\bar{K}$ 阈值处 $\bar{K}$ 动量为零, 此时 K 与 ϕ 动量平行, 此前讨论的自旋态选择性依然成立. 当中间粒子在壳时, 振幅贡献得到增强, 因此 ρ_{00}^ϕ 在两体阈值处亦出现轻微增强, 表明即使效应较弱, 自旋效应在两体阈值处仍然存在.

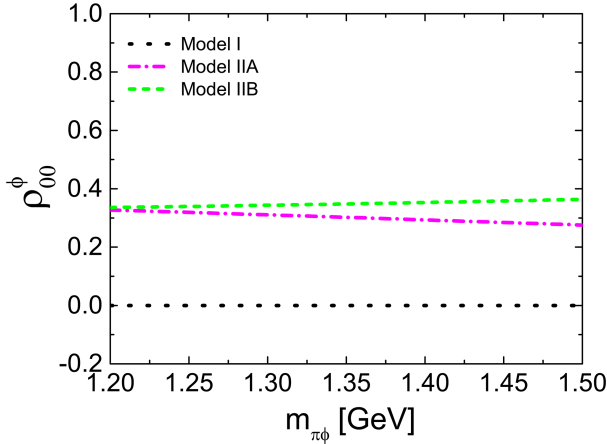


图 4 共振态模型得到的 ρ_{00}^ϕ . 点线(黑色)、点划线(品红色)和短虚线(绿色)分别表示 $C(1480)$ 产生(模型I)、取 $\theta_\pi = \pi/4$ 的 $h_1(1415)$ 产生(模型IIA)以及取 $\theta_\pi = 3\pi/4$ 的 $h_1(1415)$ 产生(模型IIB)过程的结果. 取自文献[25].

Figure 4 The obtained ρ_{00}^ϕ for the resonance models. The dotted (black), short-dash-dotted (magenta) and short-dashed (green) lines represent the results of the $C(1480)$ production (Model I), $h_1(1415)$ production with taking $\theta_\pi = \pi/4$ (Model IIA) and $\theta_\pi = 3\pi/4$ (Model IIB), respectively. Taken from ref. [25].

图 6展示了两个TS模型下 ρ_{00}^ϕ 在 $m_{\pi\phi}$ 较大范围内的分布. 从图中可见, 在三角奇点位置, ρ_{00}^ϕ 确实呈现明显的峰结构, 表明不同自旋态的相对产额在三角奇点附近对 $m_{\pi\phi}$ 具有强烈依赖. 此外, 相较于三角奇异性机制预言的不变质量谱, ρ_{00}^ϕ 随 $m_{\pi\phi}$ 的分布对圈图内线粒子 K^* 宽度的依赖较弱, 这源于 ρ_{00}^ϕ 反映的是不同自旋态的相对产生概率: 由于 K^* 宽度的变化对 ϕ 各自旋态的影响大致相同, 其相对概率对宽度变化并不敏感. 其次, 相比不变质量谱, 模型III与IV给出的 ρ_{00}^ϕ 非常接近, 主要原因是二者的主要差异在于是否包含 $h_1(1415)$ 中

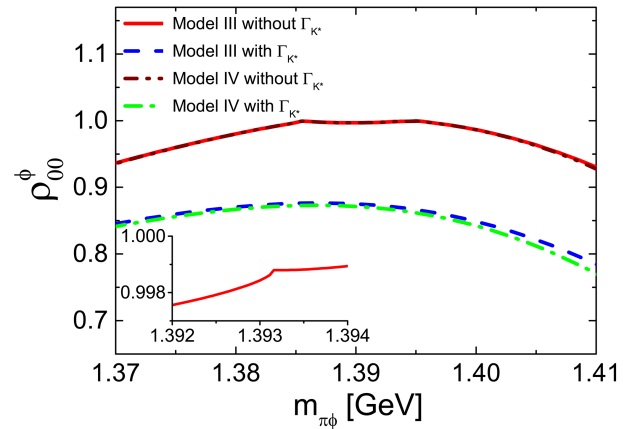


图 5 考虑与不考虑 K^* 宽度时, 模型III和模型IV在三角奇点附近所得到的 ρ_{00}^ϕ . 取自文献[25]

Figure 5 The obtained ρ_{00}^ϕ for Model III and Model IV near the TS with and without considering the width of K^* . Taken from ref. [25].

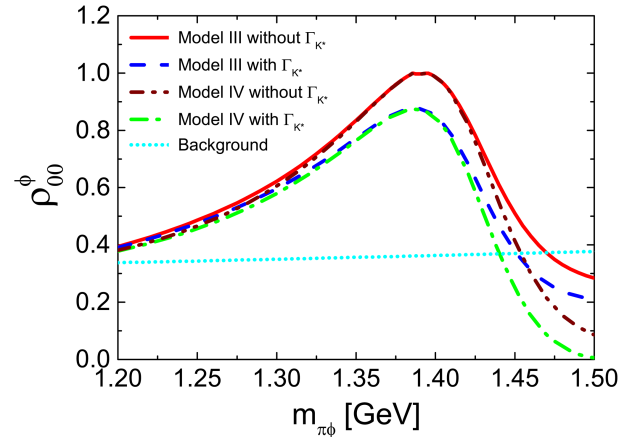


图 6 在更大的 $m_{\pi\phi}$ 范围内, 模型III和模型IV所得到的 ρ_{00}^ϕ . 取自文献[25]

Figure 6 The obtained ρ_{00}^ϕ for Model III and Model IV in a wider range of $m_{\pi\phi}$. Taken from ref. [25].

间态贡献——其传播子会显著影响不变质量谱的形状, 但对 ρ_{00}^ϕ 而言, 因其考察的是不同自旋态产额的比值, 根据式 (3), $h_1(1415)$ 传播子的影响在计算中被抵消. ρ_{00}^ϕ 在三角奇点附近的这些区别于不变质量谱的特征, 反映出自旋观测量可提供关于三角奇异性机制的独特信息.

5.2 $J/\psi \rightarrow \gamma \bar{p} \Delta(1232)$

三角奇点的位置依赖于初末态粒子的质量, 如果图 1 中末态 C 粒子是共振态且具有较大的宽度, 在实验中可以在其共振质量附近选择不同的质量区间进行测量, 三角奇点位置会相应发生改变, 即移动的三角奇点 [43, 44], 其对应的不变质量谱中峰的位置也会相应的改变. 由于自旋态的选择性也依赖于三角奇点的位置, 所以我们预期自旋密度矩阵也会出现对奇点位置变化的依赖性. 本节将根据文献 [26] 讨论三角奇异性机制在 $J/\psi \rightarrow \gamma \bar{p} \Delta(1232)$ 过程中可能导致的自旋效应. 在该过程中可以产生三角奇点的费曼图如图 7 所示. 在此过程中, J/ψ 首先衰变为 $p \bar{p} \omega$, 随后 ω 衰变为一个光子和一个 π 介子. 若 π 介子在 $\gamma \Delta$ 质心系中沿质子动量方向运动, 且其速度大于质子, 使 π 介子可以追上质子, 最终二者融合形成末态的 $\Delta(1232)$ (后文中简称为 Δ) 重子, 将产生三角奇点. 根据朗道方程可以确定三角奇点的位置, 例如在图 7 所示过程中, 若所有粒子的质量均采用粒子数据组 (PDG) [42] 给出的中心质量值, 则 TS 应出现在 $M_{\gamma\Delta} = 1.731 \text{ GeV}$ 处. 以下对三角奇点自旋效应的讨论将围绕 Δ 的自旋密度矩阵元展开, 这些矩阵元是在准三体衰变过程中进行计算的, 也就是将 Δ 的质量 M_Δ 取为若干特定取值, 并忽略其衰变. 这里将考虑 Δ 在 $\gamma \Delta$ 质心系中的螺旋度态, 并考察 Δ 的自旋密度矩阵元 $\rho_{\lambda\lambda'}$ 对 $\gamma \Delta$ 不变质量的依赖, $\rho_{\lambda\lambda'}$ 的定义为:

$$\rho_{\lambda\lambda'}(m_{\gamma\Delta}) = \frac{\int d\Omega_{\bar{p}} d\Omega_{\gamma}^* \sum_{\text{spin}}' \mathcal{M}_{\lambda} \mathcal{M}_{\lambda'}^*}{\int d\Omega_{\bar{p}} d\Omega_{\gamma}^* \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2}, \quad (5)$$

其中 $\mathcal{M}$ 为衰变振幅, $\sum$ 表示对所有粒子的自旋求和, $\sum'$ 表示对除 Δ 以外所有粒子自旋的求和, λ 与 λ' 为 Δ 的螺旋度.

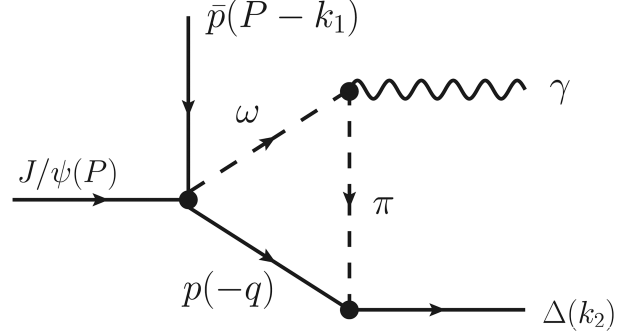


图 7 涉及三角奇点的 $J/\psi \rightarrow \gamma \bar{p} \Delta$ 过程的费曼图. 取自文献 [26]

Figure 7 The Feynman diagram for the radiative decay process $J/\psi \rightarrow \gamma \bar{p} \Delta$ involving a TS. Taken from ref. [26].

利用 $\rho_{\lambda\lambda'}$ 可以定义可观测量 P_Δ ,

$$P_\Delta = \frac{\rho_{11} - \rho_{33}}{\rho_{11} + \rho_{33}}, \quad (6)$$

其中 ρ_{11} 和 ρ_{33} 分别为 Δ 重子的自旋密度矩阵对角元, 相应于 Δ 螺旋度为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$ 的概率. 因此, P_Δ 描述了 Δ 具有螺旋度 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{3}{2}$ 的概率之间的不对称性. 根据定义, P_Δ 的取值范围为 -1 到 1. 若三角奇异性机制主导该反应, 我们预期在三角奇点附近 P_Δ 应趋近于 1. ρ_{33} 可通过 Δ 衰变产物 (即 π 介子或核子) 在 Δ 静止系中的角分布提取, 具体关系为 [45]

$$W(\cos \theta) = \frac{1}{4} [(1 + 4\rho_{33}) + (3 - 12\rho_{33}) \cos^2 \theta], \quad (7)$$

而 ρ_{11} 可由关系式 $\rho_{11} + \rho_{33} = \frac{1}{2}$ 导出.

图 8 展示了在 Δ 质量分别取 1.182, 1.232 和 1.282 GeV 时, P_Δ 随 $M_{\gamma\Delta}$ 的变化关系. 从图中可以看出, P_Δ 的峰值出现在与不同 Δ 质量相对应的三角奇点位置处, 这与理论预期相符. 需要指出的是, 这种对 $M_{\gamma\Delta}$ 的依赖关系明显不同于简单共振态模型的预期: 在共振态模型中, $M_{\gamma\Delta}$ 的依赖主要来源于共振态传播子的分母, 而在计算式 (5) 中的比值时, 这种依赖抵消了. 因此, 自旋观测量 P_Δ 可用于检验不变质量谱中的结构究竟是源于三角奇点还是共振态.

此外值得注意的是, 在 $M_\Delta = 1.182 \text{ GeV}$ 的情形中 (图 8 中的红色虚线), P_Δ 在 $M_{\gamma\Delta} \approx 1.72 \text{ GeV}$ 处出现了一个小的隆起, 对应于 $p\omega$ 阈值. 正如上文所解释的那样, 在 $p\omega$ 阈值处, 由于运动学条件的影响, 螺旋度为 $\pm \frac{1}{2}$ 的 Δ 产生过程会被增强. 对于 Δ 取其他质量的情

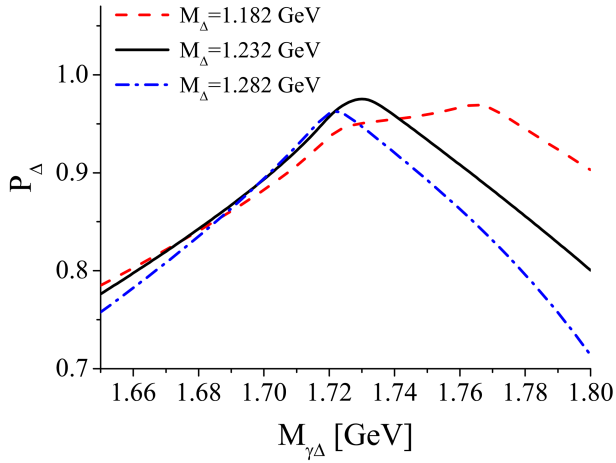


图 8 在 $J/\psi \rightarrow \gamma\bar{p}\Delta$ 过程中 P_Δ 随 $M_{\gamma\Delta}$ 的分布. 取自文献[26]

Figure 8 The SDME asymmetry P_Δ with regards to $M_{\gamma\Delta}$ in the $J/\psi \rightarrow \gamma\bar{p}\Delta$ decay. Taken from ref. [26].

形, 由于 $p\omega$ 阈值与三角奇点对应的位置过于接近, 因此未观察到此类结构. 当考虑 Δ 的衰变时, 我们预期 P_Δ 的峰结构仍将存在, 但其宽度会有所展宽. 然而, 通过在实验中选取 Δ 共振质量附近不同的 $M_{\pi N}$ 区间内的事例, P_Δ 峰的位置随 M_Δ 变化的现象应能被观测到.

6 总结和展望

对散射振幅中运动学奇异性的研究一直备受关注, 其中三角奇点的相关研究近年来已成为强子谱学领域的一个热点. 本文重点讨论了若干过程中, 三角奇异性机制导致末态粒子自旋取向呈现特定模式并表现出显著能量依赖性的现象. 本文的分析表明, 在这些过程中, 三角奇点的存在不仅可以在三角奇点对应的不变质量处增强粒子的产额, 而且增强的是具有特定自旋态的粒子的产额. 这种自旋取向的能量依赖性反映了末态粒子处于不同自旋态的相对概率随能量的变化规律, 它不仅与三角奇点产生的能量条件相关, 还依赖于内线粒子动量平行的条件及相关粒子的量子数. 因此, 该依赖性不同于不变质量谱线所体现的能量行为, 并携带了关于反应机制更为丰富的信息. 对三角奇异性机制自旋效应的研究, 对于全面理解其物理内涵以及在实验上验证其贡献具有重要意义. 同时, 鉴于自旋观测量对运动学条件具有独特的敏感性, 可以预期其在探索更广泛类型的运动学奇异性方面也具有相当潜力, 值得在后续工作中进行深入研究.

参考文献

- Olsen S L, Skwarnicki T, Zieminska D. Nonstandard heavy mesons and baryons: Experimental evidence. *Rev Mod Phys*, 2018, 90: 015003
- Brambilla N, Eidelman S, Hanhart C, et al. The XYZ states: Experimental and theoretical status and perspectives. *Phys Rep*, 2020, 873: 1–154
- Thiel A, Afzal F, Wunderlich Y. Light baryon spectroscopy. *Prog Particle Nucl Phys*, 2022, 125: 103949
- Crede V, Yelton J. 70 years of hyperon spectroscopy: A review of strange Ξ , Ω baryons, and the spectrum of charmed and bottom baryons. *Rep Prog Phys*, 2024, 87: 106301
- Choi S K, Olsen S L, Abe K, et al. Observation of a narrow charmoniumlike state in exclusive $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ decays. *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 262001
- Ablikim M, Achasov M N, Ai X C, et al. Observation of a charged charmoniumlike structure in $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ at $\sqrt{s}=4.26$ GeV. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 252001
- Liu Z Q, Shen C P, Yuan C Z, et al. Study of $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ and observation of a charged charmoniumlike state at Belle. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 252002
- Aaij R, Adeva B, Adinolfi M, et al. Observation of $J/\psi p$ resonances consistent with pentaquark states in $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ decays. *Phys Rev Lett*, 2015, 115: 072001
- Aaij R, Abellán Beteta C, Adeva B, et al. Observation of a narrow pentaquark state, $P_c(4312)^+$, and of the two-peak structure of the $P_c(4450)^+$. *Phys Rev Lett*, 2019, 122: 222001
- Chen H X, Chen W, Liu X, et al. The hidden-charm pentaquark and tetraquark states. *Phys Rep*, 2016, 639: 1–121
- Chen H X, Chen W, Liu X, et al. A review of the open charm and open bottom systems. *Rep Prog Phys*, 2017, 80: 076201
- Guo F K, Hanhart C, Meißner U G, et al. Hadronic molecules. *Rev Mod Phys*, 2018, 90: 015004
- Liu Y R, Chen H X, Chen W, et al. Pentaquark and tetraquark states. *Prog Particle Nucl Phys*, 2019, 107: 237–320
- Chen H X, Chen W, Liu X, et al. An updated review of the new hadron states. *Rep Prog Phys*, 2023, 86: 026201

- 15 Wang Z G. Review of the QCD sum rules for exotic states. *Front Phys*, 2026, 21: 016300
- 16 Guo F K, Liu X H, Sakai S. Threshold cusps and triangle singularities in hadronic reactions. *Prog Particle Nucl Phys*, 2020, 112: 103757
- 17 Landau L D. On analytic properties of vertex parts in quantum field theory. *Nucl Phys*, 1959, 13: 181–192
- 18 Coleman S, Norton R E. Singularities in the physical region. *Nuovo Cim*, 1965, 38: 438–442
- 19 Schmid C. Final-state interactions and the simulation of resonances. *Phys Rev*, 1967, 154: 1363–1375
- 20 Wu J J, Liu X H, Zhao Q, et al. Puzzle of anomalously large isospin violations in $\eta(1405/1475) \rightarrow 3\pi$. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 081803
- 21 Du M C, Zhao Q. Internal particle width effects on the triangle singularity mechanism in the study of the $\eta(1405)$ and $\eta(1475)$ puzzle. *Phys Rev D*, 2019, 100: 036005
- 22 Cheng Y, Zhao Q. Hadronic loop effects on the radiative decays of the first radial excitations of η and η' . *Phys Rev D*, 2022, 105: 076023
- 23 Mikhasenko M, Ketzer B, Sarantsev A. Nature of the $a_1(1420)$. *Phys Rev D*, 2015, 91: 094015
- 24 Aceti F, Dai L R, Oset E. $a_1(1420)$ peak as the $\pi f_0(980)$ decay mode of the $a_1(1260)$. *Phys Rev D*, 2016, 94: 096015
- 25 Wang K, Chen S F, Liu B C. Studying triangle singularity through spin observables. *Phys Rev D*, 2022, 106: 094032
- 26 Wang K, Li R, Liu B C. Triangle singularity in the $J/\psi \rightarrow \gamma \bar{p} \Delta$ decay. *Phys Rev D*, 2023, 108: 094027
- 27 Bugg D V. An explanation of Belle states $Z_b(10610)$ and $Z_b(10650)$. *Europhys Lett*, 2011, 96: 11002
- 28 Swanson E S. Z_b and Z_c exotic states as coupled channel cusps. *Phys Rev D*, 2015, 91: 034009
- 29 Chen D Y, Liu X. $Z_b(10610)$ and $Z_b(10650)$ structures produced by the initial single pion emission in the $\Upsilon(5S)$ decays. *Phys Rev D*, 2011, 84: 094003
- 30 Chen D Y, Liu X, Matsuki T. Reproducing the $Z_c(3900)$ structure through the initial-single-pion-emission mechanism. *Phys Rev D*, 2013, 88: 036008
- 31 Bugg D V. Reinterpreting several narrow ‘resonances’ as threshold cusps. *Phys Lett B*, 2004, 598: 8–14
- 32 Swanson E S. Cusps and exotic charmonia. *Int J Mod Phys E*, 2016, 25: 1642010
- 33 Guo F K, Hanhart C, Wang Q, et al. Could the near-threshold XYZ states be simply kinematic effects? *Phys Rev D*, 2015, 91: 051504
- 34 Jing H J, Sakai S, Guo F K, et al. Triangle singularities in $J/\psi \rightarrow \eta \pi^0 \phi$ and $\pi^0 \pi^0 \phi$. *Phys Rev D*, 2019, 100: 114010
- 35 Ablikim M, Achasov M N, Ahmed S, et al. Observation of $a_0^0(980)$ – $f_0(980)$ mixing. *Phys Rev Lett*, 2018, 121: 022001
- 36 Du M C, Cheng Y, Zhao Q. Vertex corrections due to the triangle singularity mechanism in the light axial vector meson couplings to $K^* \bar{K} + c.c.$. *Phys Rev D*, 2022, 106: 054019
- 37 Jacob M, Wick G C. On the general theory of collisions for particles with spin. *Ann Phys*, 1959, 7: 404–428
- 38 Schilling K, Seyboth P, Wolf G. On the analysis of vector-meson production by polarized photons. *Nucl Phys B*, 1970, 15: 397–412
- 39 Kim S H, Oh Y, Titov A I. Decay angular distributions of K and D vector mesons in pion-nucleon scattering. *Phys Rev C*, 2017, 95: 055206
- 40 Bitukov S I, Dzhelyadin R I, Dorofeev V A, et al. Study of a possible exotic 1.5 GeV meson decaying into $\phi \pi^0$. *Phys Lett B*, 1987, 188: 383–387
- 41 Landsberg L G. C(1480) meson and electromagnetic processes. *Sov J Nucl Phys*, 1992, 55: 1051–1059
- 42 Navas S. Review of particle physics. *Phys Rev D*, 2024, 110: 030001
- 43 Huang Q, Wu J J. Proposal to detect a moving triangle singularity in $\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- K^+ K^-$ process. *Phys Rev D*, 2021, 104: 116003
- 44 Bayar M, Aceti F, Guo F K, et al. Discussion on triangle singularities in the $\Lambda_b \rightarrow J/\psi K^- p$ reaction. *Phys Rev D*, 2016, 94: 074039
- 45 Thomas D W, Engler A, Fisk H E, et al. Strange particle production from $\pi^- p$ interactions at 1.69 GeV/c. *Nucl Phys B*, 1973, 56: 15–45

Spin effects induced by kinematic singularity

LIU Bo-Chao*

School of Physics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

**Corresponding author (email: liubc@xjtu.edu.cn)*

The study of kinematic singularities in scattering amplitudes has long been a topic of interest, with research on triangle singularities becoming a hot issue in hadron spectroscopy in recent years. On one hand, this is because there has been a long-standing expectation to find experimental evidence for the existence of triangle singularities. On the other hand, the contribution of the triangle singularity mechanism may affect the interpretation of certain hadronic state signals, thus holding particular significance for hadron spectroscopy research. Unlike previous studies that primarily focused on the impact of the triangle singularity mechanism on invariant mass spectra, this paper emphasizes how, in certain processes, the triangle singularity mechanism leads to specific patterns and strong energy dependence in the spin orientation of final-state particles. In fact, this energy dependence of spin orientation reflects the variation in the relative probabilities of final-state particles appearing in different spin states as a function of energy. It is not only related to the energy conditions for triangle singularity production but also to the collinear momentum condition of internal particles and their quantum numbers. Therefore, it differs from the energy dependence corresponding to the invariant mass spectra and carries richer information about the reaction mechanism. The study of the spin effects of the triangle singularity mechanism plays an important role in gaining a more comprehensive understanding of its physical effects and in experimentally verifying its contributions. At the same time, due to the unique dependence of spin observables on kinematic conditions, it can be expected that spin observables hold certain potential for studying more general kinematic singularities, warranting further investigation.

kinematic singularity, spin effect, invariant mass spectrum

PACS: 11.55.Bq, 13.25.Gv, 13.88.+e

doi: [10.1360/SSPMA-2025-0487](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2025-0487)