



空间多柔体系统缩比等效动力学建模方法研究

祁伊凡, 单明贺*, 田强

北京理工大学宇航学院, 北京 100081

*联系人, E-mail: mshan@bit.edu.cn

收稿日期: 2024-07-30; 接受日期: 2024-11-29; 网络出版日期: 2024-12-25

国家自然科学基金(编号: 12102034)资助项目

摘要 空间结构正朝着大型化和柔性化的趋势发展. 针对此类结构, 往往需通过研制地面缩比样机来验证其功能的可行性与动力学特性. 为了能够通过缩比样机的动力学模型准确预测空间全尺寸结构的动力学特性, 本文基于相似理论和多柔体系统灵敏度分析提出了一种空间多柔体系统的缩比等效动力学建模方法. 首先, 基于量纲分析和相似第三定理简化了模型间的相似关系, 使得相似系统的设计仅需考虑模型的基本量纲标尺, 并提出了更简洁的相似模型设计方法. 其次, 基于李群李代数理论和几何精确理论构建了多柔体系统的动力学模型. 此外, 为解决相似缩比模型因部分尺寸缩放后难以加工制备的问题, 通过对多柔体系统动力学模型中部分设计参数进行灵敏度分析以指导缩比样机的结构调整. 所设计的缩比等效模型能通过放松相似性关系对缩比模型设计的强约束提升缩比模型制造的可行性, 同时能通过保持关键设计参数的相似性关系高精度地等效原模型的动力学特性. 最后, 通过数值仿真算例验证了本文所提出的多柔体系统缩比等效动力学模型的可行性和准确性.

关键词 缩比等效模型, 相似理论, 多柔体系统, 灵敏度分析

PACS: 06.30.-k, 45.50.Jf, 46.70.De

1 引言

随着航空航天技术的持续发展, 以运载火箭、空间可展开结构和空间在轨组装为代表^[1-3]的空间结构正朝着大型化和柔性化的趋势发展. 计算机技术的发展使得研究者们可通过数值仿真工具分析空间结构的动力学性能. 然而, 考虑到大型空间结构动力学特性的复杂程度, 为了准确评估其工作性能, 地面实验验证仍然是不可或缺的. 按照空间结构的真实尺寸制备样机并进行试验固然可以得到较为精确的结果, 但是制造

全尺寸的试验结构成本高昂, 且目前通用的实验设备通常并不支持大型航天设备的试验. 在现有实验条件的局限下, 设计缩比样机并通过缩比样机的试验结果推测原结构的动力学特性的研究手段已经成为工程实践中普遍使用的方案. 然而, 目前研制的地面缩比样机多用来验证空间结构功能的可行性, 且缩比样机的设计缺乏足够的理论指导, 导致其对动力学特性的预测精度不高. 缩比等效动力学建模^[4-6]旨在通过动力学分析手段改进缩比模型的设计, 使得缩尺实验的结果能较好地还原原模型动力学特性. 因此开展空间结构

引用格式: 祁伊凡, 单明贺, 田强. 空间多柔体系统缩比等效动力学建模方法研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2025, 55: 224518
Qi Y F, Shan M H, Tian Q.. Dynamically scaled equivalent modelling for flexible multibody systems in space (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2025, 55: 224518, doi: 10.1360/SSPMA-2024-0302

等效动力学建模的研究对空间大型结构的设计和地面缩比样机研制具有重要的理论指导意义.

相似理论解释了自然界和工程问题中不同系统所展现出的相似性^[7]. 因此, 当在现有条件下难以实现某一种工况时, 研究者们常依据相似理论设计相似缩比模型并进行缩尺试验来研究原模型的动力学特性. 基于相似理论的缩比等效动力学建模已有诸多成功案例. 美国的大型运载火箭土星I、土星V和大力神III火箭都曾在研发过程中利用缩比模型来考察全尺寸火箭的动力学特性^[8]. 缩比模型的试验结果显示, 全尺寸火箭的前几阶振动频率和振动模态都得到了较好的还原, 这为大型火箭的成功研制提供了宝贵的试验数据^[9]. 高兴龙^[10]为准确地推测物伞流固耦合系统在火星大气层中的行为, 基于相似理论推导了系统的相似准则, 进而完成了地面缩比试验装置的设计. 缩比试验结果和全模型结果的较好吻合验证了通过缩比模型进行物伞系统动力学特性研究的有效性. Cao 等人^[11]将相似理论应用到大型柔性桁架吊杆结构的动力学特性研究中. 在推导出桁架结构处于不同姿态下的结构动力学方程后, 通过量纲分析法求解了系统的相似准则, 进而完成了缩比模型的设计和试验. 桂洪斌等人^[12]基于相似理论对大型船舶吊装系统进行了缩比模型的设计和试验, 通过和商业软件的仿真结果进行对比验证了缩比模型和原模型的动力学等效性, 并揭示了吊装系统不同部件的物理特性对系统动力学响应的影响. 然而, 这些对于大型结构的等效模型设计方法普遍局限于结构动力学的范畴, 即通过相似缩比模型对结构振动的前几阶频率和模态进行还原. 即便在文献^[10, 11]的动力学建模中考虑了系统的大范围空间运动, 但仍然是将系统的响应等效成刚体运动和柔性变形的叠加, 从而将其转化成一个准静态问题, 进而通过结构动力学的知识进行分析. 对于具有大范围空间移动和转动的空间结构, 则应基于多体系统动力学理论建立其动力学方程并进行缩比等效模型设计.

目前, 基于多体系统动力学的相似缩比模型设计研究也已取得了一定的进展. Ghanekar 等人^[4]基于相似第三定理推导了刚柔耦合机械臂系统的无量纲化相似准则, 完成了相似缩比样机的设计, 在此基础上考虑了等效模型加工误差的影响, 并设计了控制律以减小误差影响. 孙施浩等人^[13]分别推导了卫星在绝对坐标系、轨道坐标系和体坐标系下的动力学方程, 为

进一步在地面模拟航天器的在轨协同运动, 基于量纲分析原理推导了无量纲化相似准则, 并完成了缩尺试验的设计. Ciarcia 等人^[14]推导了卫星在轨道平面内运动的动力学方程, 并基于相似第三定理推导了无量纲相似准则, 在根据相似准则设计出缩尺试验的基础上进一步对试验中万有引力的等效进行了分析. Zong 等人^[15]也通过推导无量纲的相似准则完成了空间机械臂的相似缩比等效模型的设计, 并在缩尺实验中制定了相应的控制策略来补偿缩比等效模型存在的误差. 然而, 现有基于多体系统动力学的相似缩比模型设计方法仍然存在着局限: 一方面, 这些方法需要推导系统所有的相似准则才能完成相似缩比模型的设计. 对于方程参数数量庞大、方程结构复杂的多柔体系统, 其相似准则的计算将是一个十分艰巨的任务. 另一方面, 目前的相似缩比模型设计所依据的动力学模型仅适用于发生小变形或是可以进行运动解耦的系统. 而随着空间结构不断朝着大型化、柔性化的趋势发展, 结构的大变形, 以及柔性变形和刚体大范围空间运动耦合作用的影响将不可忽略^[3].

在对大型柔性结构进行缩尺试验时, 物理模型的实际参数相比理论值会不可避免地存在误差. 因此有必要通过灵敏度分析^[16](Sensitivity Analysis, SA)来研究动力学响应对不同参数的敏感性. 研究者们常采用直接微分法进行灵敏度分析^[4]. 使用该方法需要直接对系统的动力学方程关于所研究的物理参数求导, 从而得到状态灵敏度变量的时间微分方程. 虽然直接微分法有着推导简便且便于实施的优势, 但是对复杂系统状态灵敏度的分析将显著降低计算效率^[17]. 相比直接微分法, 伴随变量法^[17]更适用于复杂系统的灵敏度分析. 该方法借助伴随变量规避了对状态灵敏度的计算, 并通过求解伴随变量完成对目标函数的灵敏度分析. Callejo 等人^[18, 19]将离散伴随变量法推广应用到了多柔体系统动力学模型中, 使得对几何精确梁单元进行灵敏度分析具备可行性. 目前, 灵敏度分析在缩比等效模型设计中已得到了一定的应用. Ghanekar 等人^[4]在设计出刚柔耦合机械臂的相似缩比模型的基础上, 通过直接微分法研究了系统动力学特性对相似准则的灵敏度, 并基于灵敏度分析的结果在缩尺试验中引入了误差补偿的控制策略. Adams 等人^[20]为解决薄壁结构的缩比等效模型设计问题, 基于灵敏度分析理论提出了相比传统方法更高效的设计方案. 进一步, 通

过对缩比模型固有频率和模态进行分析, 验证了缩比模型和原模型的等效性. 然而, 目前基于灵敏度分析对缩比等效模型的改进多应用于结构动力学问题与小变形的多柔体系统动力学问题. 而对于变形程度更大, 非线性更强的多柔体系统, 如何基于灵敏度分析改进等效模型的设计, 尚未见足够的研究.

综上所述, 如何设计大型多柔体系统的缩比等效模型从而通过缩尺试验准确验证全模型动力学响应尚缺乏足够的理论指导. 本文基于对大型空间柔性结构缩比模型设计的需求, 研究了空间多柔体系统动力学的等效建模和分析方法. 首先, 基于量纲分析和相似第三定理将相似性判据由分析相似准则转化为分析基本量纲标尺, 提升了相似性分析的效率. 其次, 利用李群李代数理论和几何精确理论建立了多柔体系统的动力学模型. 进一步, 本文采用伴随变量法对动力学模型进行了灵敏度分析, 根据灵敏度分析结果放松相似关系对缩比模型设计造成的强约束, 通过确保关键变量的相似性关系有效确保和原模型动力学的等效性. 最后通过一系列数值算例验证了所提出的等效建模方法的有效性和准确性.

2 多体系统的相似模型设计

2.1 量纲分析

任何一个工程问题都需要借助一系列物理量来进行描述、建模和分析. 而每一个具体的物理量需要通过相应的量纲、单位以及这一物理量在具体单位度量下的数值大小来进行表达. 具体地, 量纲表示物理量的种类属性, 单位确定了物理量的度量尺度, 而特定物理量在相应单位下计算得到的倍数则是在相应单位下的度量大小.

尽管研究者为解决不同的动力学问题定义了众多的物理量, 但是这些物理量的量纲通常可以根据定义由质量 M 、长度 L 和时间 T 这三个物理量的量纲经过幂次组合得到. 质量、长度和时间被称为基本物理量, 它们的量纲被称为基本量纲, 与之相对的, 其他物理量则被称为派生物理量. 力学系统中常见的物理量的量纲与基本量纲的关系如表 1 所示. 特别地, 存在一类特殊的物理量(如泊松比、阻尼比等), 其量纲为 $M^0L^0T^0$, 因

表 1 力学常见物理量及其对应量纲

Table 1 Common physical properties and their corresponding dimension in mechanics

物理量	量纲	物理量	量纲
质量	[M]	长度	[L]
时间	[T]	密度	[ML ⁻³]
模量	[ML ⁻¹ T ⁻²]	泊松比	[M ⁰ L ⁰ T ⁰]
速度	[LT ⁻¹]	力	[MLT ⁻²]
能量	[ML ² T ⁻²]	弹簧刚度	[MT ⁻²]
阻尼系数	[MT ⁻¹]	阻尼比	[M ⁰ L ⁰ T ⁰]

而这一类物理量被称为无量纲量.

量纲分析的核心在于根据物理量所必须具有的形式来分析判断事物间数量关系所遵循的一般规律. 例如, 记某一种材料的杨氏模量为 E , 根据表 1 可知 E 的量纲为 $[ML^{-1}T^{-2}]$. 当基本量纲采用不同的单位制时, 对应杨氏模量的单位也会随之变化. 于是尽管这种材料的刚度是一个客观对象, 但是它的度量大小会随着杨氏模量单位的选择发生改变. 例如, 当基本量纲标尺 $(M_1, L_1, T_1) = (1 \text{ kg}, 1 \text{ m}, 1 \text{ s})$ 时, 杨氏模量的单位为Pa; 而当 $(M_2, L_2, T_2) = (1 \text{ t}, 1 \text{ mm}, 1 \text{ s})$ 时, 杨氏模量的单位则为MPa. 这样, E 在这两个基本量纲标尺下的度量大小 $\bar{E}_{(M_1, L_1, T_1)}$ 和 $\bar{E}_{(M_2, L_2, T_2)}$ 满足 $\bar{E}_{(M_1, L_1, T_1)} = 10^6 \bar{E}_{(M_2, L_2, T_2)}$.

2.2 相似性和相似第三定理

相似的概念最早是在几何学中提出的, 如果两个几何图形具有相似性, 则可通过对这两个图形的等比例缩放将它们转化成同一图形. 换言之, 相似的几何图形具有相同的形状, 而仅仅有形状大小的区别. 相似的概念也可拓展至物理系统中, 此时两个物理系统的相似不仅涵盖了几何特征的相似, 其各个物理量在时间和空间上的分布也需要满足等比例的特征. 在经过时间和空间的等比例放缩后, 这两个物理系统应该能够转化为同一个系统. 因此, 如果两个动力学系统具有相似性, 那么除了静态的相似之外, 还要求具有动态的相似^[7], 其中常用的相似特征有几何相似、运动相似和动力相似. 这三个相似特征所给出的具体性质如下.

(1) 几何相似

模型和原型的几何形态保持相似, 即模型 m 和原型 p 中任何相应的线性长度应当具有同一个比例, 即有

$$\frac{l_{p1}}{l_{m1}} = \frac{l_{p2}}{l_{m2}} = \cdots = \frac{l_{pn}}{l_{mn}} = \lambda_l, \quad (1)$$

其中 λ_l 称为这两个物理系统的几何比尺.

(2) 运动相似

模型和原型的运动状态保持相似, 即模型 m 和原型 p 中任何对应时刻和对应位置的速度和加速度方向一致, 且速度大小 v 和加速度大小 a 分别具有同一个比例, 即有

$$\begin{cases} \frac{v_{p1}}{v_{m1}} = \frac{v_{p2}}{v_{m2}} = \dots = \frac{v_{pn}}{v_{mn}} = \lambda_v, \\ \frac{a_{p1}}{a_{m1}} = \frac{a_{p2}}{a_{m2}} = \dots = \frac{a_{pn}}{a_{mn}} = \lambda_a, \end{cases} \quad (2)$$

其中 λ_v 和 λ_a 分别称为这两个物理系统的速度比尺和加速度比尺.

(3) 动力相似

模型和原型的作用力相似, 即模型 m 和原型 p 中任何对应时刻和对应位置的力方向一致, 且大小 f 具有同一个比例, 即有

$$\frac{f_{p1}}{f_{m1}} = \frac{f_{p2}}{f_{m2}} = \dots = \frac{f_{pn}}{f_{mn}} = \lambda_f, \quad (3)$$

其中 λ_f 称为这两个物理系统的动力比尺.

因此, 当某一已知系统和未知系统具有相似关系时, 便可基于相似性所满足的比例关系由已知系统的动力学响应推断出未知系统的动力学响应.

1914年, 美国物理学家Buckingham提出了相似性分析的一个重要定理, 后人将其命名相似第三定理^[7], 又称 π 定理, 其内容如下.

设所关注的物理问题可用 i 个参量 $p_1, p_2, \dots, p_i$ 表示成参量方程 $f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_i) = 0$. 如果在这组参量中有 j 个物理量的量纲是相互独立的($j \leq 7$), 则由这组参数可导出 $k = i - j$ 个无量纲量 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$, 其中 $\pi_l = p_1^{a_{l1}} p_2^{a_{l2}} \dots p_i^{a_{li}}$ ($l = 1, 2, \dots, k$), 利用这些无量纲量可将上述参量方程转化为 $\bar{f}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k) = 0$. 两个物理系统相似的充分必要条件为由两系统物理参数分别确定的相似准则对应相等.

π 定理在动力学系统的等效模型设计问题中有广泛的应用, 其中构造无量纲量的流程可概括如下.

(1) 列出问题所涉及的变量及其量纲, 记其数量为 i , 同时根据这些物理量确定所用的基本量纲, 记其数量为 j .

(2) 在上述 i 个参量中, 选择 j 个量纲独立的参量作为重复参量. 根据 π 定理, 必然能够利用这些重复参量

将剩余变量无量纲化, 从而构造出 $k = i - j$ 个无量纲量 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$.

(3) 为便于理解和交流, 需要对某些无量纲量进行调整(如交换其分子或分母), 从而将其变更为学术界更常用的无量纲量, 例如泊松比、阻尼比等.

2.3 基于基本量纲标尺的相似性关系

π 定理常应用于流体力学领域, 依据 π 定理可以按照标准的流程分析物理系统, 即通过相似准则的推导出设计出一个物理系统的相似缩比模型. 然而, 在多体系统的等效动力学模型设计中直接应用 π 定理往往会遇到较大的困难. 如表2所示, 多柔体系统的控制方程和流体力学的控制方程有着非常明显的区别.

首先, 多柔体系统动力学的广义坐标数量往往会远超过流体力学的参数数量, 并且在使用有限元分析工具时, 广义坐标的数量会随着单元的细化而增长, 导致采用 π 定理所得的相似准则数量十分庞大. 这不但会使得推导相似准则十分困难, 而且会使得运用相似准则设计缩比模型十分不便. 其次, 流场方程可以以分量形式表达, 方程形式简洁, 而多柔体系统的动力学方程往往通过矩阵和向量描述成一个紧凑的格式, 且矩阵和向量内各个分量的量纲不一致, 这就使得流体力学中推导相似准则常用的方程分析法^[21]变得无法实施. 不仅如此, 多柔体系统的动力学方程往往是含有运动学约束的微分代数方程组, 对约束方程和拉格朗日乘子进行量纲分析更会给相似准则的推导带来巨大困难.

因此, 为提高多柔体系统等效模型设计的效率, 可基于 π 定理和量纲分析方法对相似性关系进行简化, 得到仅关注基本量纲标尺的相似性判据, 概括为以下命题.

考虑两个力学系统A和B, 其中系统A的数学模型

表2 流体力学和多柔体系统动力学数学模型比较

Table 2 Comparison of the mathematical formulation between fluid dynamics and flexible multibody system dynamics

模型特征	流体力学	多柔体系统动力学
动力学方程	$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i \end{cases}$	$\begin{cases} M\ddot{q} + C^T \lambda = F \\ \Phi(q, t) = 0 \end{cases}$
紧凑程度	分量形式 紧凑程度低	矩阵向量形式 紧凑程度高
有无中间变量	无中间变量	有拉格朗日乘子

由物理参数 $(p_1, p_2, \dots, p_i)^A$ 来决定, 相应地系统 $\mathbb{B}$ 的数学模型由物理参数 $(p_1, p_2, \dots, p_i)^B$ 来决定. 则系统 $\mathbb{A}$ 和系统 $\mathbb{B}$ 相似的充分必要条件是: 存在两组基本量纲标尺 (M_1, L_1, T_1) 和 (M_2, L_2, T_2) , 使得任一系统 $\mathbb{A}$ 和系统 $\mathbb{B}$ 中对应的物理量 p_k^A 和 p_k^B ($k = 1, 2, \dots, i$), 都有 p_k^A 在标尺 (M_1, L_1, T_1) 下的度量大小和 p_k^B 在标尺 (M_2, L_2, T_2) 下的度量大小相等.

证明:

首先证明该判据的充分性. 根据 π 定理, 对于以质量、长度和时间为基本量纲的力学系统, 必然可导出 $(i-3)$ 个无量纲量作为相似准则 $\pi_j = (p_1)^{a_{j1}}(p_2)^{a_{j2}} \cdots (p_i)^{a_{ji}}$, 其中 $j = 1, 2, \dots, (i-3)$.

另外, 系统 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 中的每一个物理变量 p_k^A 和 p_k^B ($k = 1, 2, \dots, i$)都可以利用两系统各自的基本量纲标尺 (M_1, L_1, T_1) 和 (M_2, L_2, T_2) 进行无量纲化, 从而计算得到在各自标尺下的度量大小 $\overline{p_k^A}$ 和 $\overline{p_k^B}$:

$$\overline{p_k^A} = \frac{p_k^A}{M_1^{b_k} L_1^{c_k} T_1^{d_k}}, \overline{p_k^B} = \frac{p_k^B}{M_2^{b_k} L_2^{c_k} T_2^{d_k}}. \quad (4)$$

于是, 相似准则 π_j 在系统 $\mathbb{A}$ 的取值为

$$\pi_j = M_1^{a_{j1} b_k} L_1^{a_{j2} c_k} T_1^{a_{ji} d_k} \overline{p_1^A}^{a_{j1}} \overline{p_2^A}^{a_{j2}} \cdots \overline{p_i^A}^{a_{ji}}. \quad (5)$$

需要注意的是, 在上式中使用了爱因斯坦求和约定^[22], 即 $a_{jk} b_k = \sum_{k=1}^i (a_{jk} b_k)$. 因为 π_j 是无量纲量, 所以 $a_{jk} b_k = a_{jk} c_k = a_{jk} d_k = 0$. 于是, 相似准则 π_j ($j = 1, 2, \dots, i-3$)在系统 $\mathbb{A}$ 的取值可化简为

$$\pi_j(p_1^A, p_2^A, \dots, p_i^A) = \overline{p_1^A}^{a_{j1}} \overline{p_2^A}^{a_{j2}} \cdots \overline{p_i^A}^{a_{ji}}. \quad (6)$$

同理, 相似准则 π_j 在系统 $\mathbb{B}$ 的取值为

$$\pi_j(p_1^B, p_2^B, \dots, p_i^B) = \overline{p_1^B}^{a_{j1}} \overline{p_2^B}^{a_{j2}} \cdots \overline{p_i^B}^{a_{ji}}. \quad (7)$$

由 p_j^A 在标尺 (M_1, L_1, T_1) 下的度量和 p_j^B 在标尺 (M_2, L_2, T_2) 下的度量相等可知, $\overline{p_k^A} = \overline{p_k^B}$ ($k = 1, 2, \dots, i$). 因此, 比较式(6)和(7)可知, 对任意的 $j = 1, 2, \dots, i-3$ 都有

$$\pi_j(p_1^A, p_2^A, \dots, p_i^A) = \pi_j(p_1^B, p_2^B, \dots, p_i^B). \quad (8)$$

由于相似准则的对应相等是物理系统相似的充分条件, 系统 $\mathbb{A}$ 和系统 $\mathbb{B}$ 是相似的. 所提出相似性判据的充分性得以证明.

接着证明该命题的必要性. 当系统 $\mathbb{A}$ 和系统 $\mathbb{B}$ 相似时, 对应的相似准则应当相等. 不失一般性, 可

设物理量 p_{i-2} , p_{i-1} 和 p_i 的量纲彼此独立, 于是可通过 p_{i-2} , p_{i-1} 和 p_i 对剩余物理量的无量纲化构造相似准则 π_j ($j = 1, 2, \dots, i-3$), 即有

$$\pi_j = \frac{p_j}{p_{i-2}^{\alpha_j} p_{i-1}^{\beta_j} p_i^{\gamma_j}}. \quad (9)$$

根据 π 定理, 相似准则对应相等是系统 $\mathbb{A}$ 和系统 $\mathbb{B}$ 相似的必要条件, 于是有

$$\frac{p_j^A}{(p_{i-2}^A)^{\alpha_j} (p_{i-1}^A)^{\beta_j} (p_i^A)^{\gamma_j}} = \pi_j = \frac{p_j^B}{(p_{i-2}^B)^{\alpha_j} (p_{i-1}^B)^{\beta_j} (p_i^B)^{\gamma_j}}. \quad (10)$$

取定系统 $\mathbb{A}$ 的基本量纲标尺 (M_1, L_1, T_1) , 由物理量 p_{i-2} , p_{i-1} 和 p_i 量纲的独立性可知, 可唯一确定系统 $\mathbb{B}$ 的基本量纲标尺 (M_2, L_2, T_2) 使得 p_{i-2}^A , p_{i-1}^A 和 p_i^A 在 (M_1, L_1, T_1) 下的度量大小等于 p_{i-2}^B , p_{i-1}^B 和 p_i^B 在 (M_2, L_2, T_2) 下的度量大小, 即有

$$\begin{cases} \overline{p_{i-2}^A} = \overline{p_{i-2}^B} \\ \overline{p_{i-1}^A} = \overline{p_{i-1}^B} \\ \overline{p_i^A} = \overline{p_i^B} \end{cases} \quad (11)$$

参照式(6)和(7)可将等式(10)中的相似准则用各物理量在对应标尺下的度量大小表达, 即有

$$\frac{\overline{p_j^A}}{\overline{p_{i-2}^A}^{\alpha_j} \overline{p_{i-1}^A}^{\beta_j} \overline{p_i^A}^{\gamma_j}} = \frac{\overline{p_j^B}}{\overline{p_{i-2}^B}^{\alpha_j} \overline{p_{i-1}^B}^{\beta_j} \overline{p_i^B}^{\gamma_j}}. \quad (12)$$

进一步可得, 对任意的 $j = 1, 2, \dots, i-3$ 都有

$$\overline{p_j^A} = \overline{p_j^B}. \quad (13)$$

结合式(11)和(13)可知, 对于任意的 $k = 1, 2, \dots, i$ 都有

$$\overline{p_k^A} = \overline{p_k^B}. \quad (14)$$

由此, 对于系统 $\mathbb{A}$ 和系统 $\mathbb{B}$ 中对应的物理量 p_k^A 和 p_k^B , 都有 p_k^A 在标尺 (M_1, L_1, T_1) 下的度量和 p_k^B 在标尺 (M_2, L_2, T_2) 下的度量相等. 所提出相似性判据的必要性得证.

采用所提出的相似性判据设计相似缩比模型时, 可遵循以下流程构造相似缩比模型的基本量纲标尺, 并完成各个物理量取值的计算.

(1) 确定原系统所用到的基本量纲标尺. 对于常见的动力学系统, 不妨取定原系统的基本量纲标尺为国际单位制 $(M_1, L_1, T_1) = (1 \text{ kg}, 1 \text{ m}, 1 \text{ s})$.

(2) 根据缩比等效系统和原系统所用的柔性材料、几何相似比等物理条件求解出相似缩比系统所用的基本量纲标尺 (M_2, L_2, T_2) .

(3) 对于缩比等效模型中剩余的变量, 可根据它们在 (M_2, L_2, T_2) 下度量大小与原模型对应变量在 (M_1, L_1, T_1) 下度量大小相等计算得到.

对于常见的多柔体系统, 原系统和相似缩比系统所用的材料通常是取定的, 因此可利用两系统的材料参数构造基本量纲方程. 设原系统某一柔性部件的杨氏模量和密度分别为 E^A 和 ρ^A , 而缩比模型中对应部件的杨氏模量和密度分别为 E^B 和 ρ^B . 根据所提出相似性判据, E^A 和 ρ^A 与 E^B 和 ρ^B 应分别满足

$$\frac{E^A}{1 \text{ Pa}} = \frac{E^B}{M_2 L_2^{-1} T_2^{-2}}, \quad \frac{\rho^A}{1 \text{ kg m}^{-3}} = \frac{\rho^B}{M_2 L_2^{-3}}. \quad (15)$$

不难发现, 如果系统的基本量纲只包含质量、长度和时间, 那么仅需要再找一个额外的补充方程即可完成 (M_2, L_2, T_2) 的求解. 对于在轨系统, 由于处在微重力的环境, 因此在力学模型中并不需要考虑重力的影响. 于是, 可通过取定缩比模型和原模型的几何尺寸比来构造补充方程, 便可得到

$$\frac{L^A}{1 \text{ m}} = \frac{L^B}{L_2}. \quad (16)$$

同理联立式(15)和(16)即可解得

$$M_2 = \frac{(\rho^B)(L^B)^3}{(\rho^A)(L^A)^3} \text{ kg}, \quad L_2 = \frac{L^B}{L^A} \text{ m}, \quad (17)$$

$$T_2 = \frac{L^B}{L^A} \sqrt{\frac{\rho^B E^A}{\rho^A E^B}} \text{ s}.$$

由命题可知, 所提出的相似模型设计方法和通过推导相似准则来进行相似性分析并构建缩比模型的传统方法一样适用于一般的物理系统. 然而区别于传统方法, 所提出的相似模型设计方法并没有对系统的相似准则进行逐个推导和分析, 而仅需要关注不同系统使用的基本量纲标尺, 并将原系统下各个参数已知的度量大小迁移到相似系统中即可. 由于所关注的基本量纲个数并不会随着系统本身的复杂化而增长, 因此

所提出的设计方法可以使得复杂多柔体系统相似缩比模型的设计过程得到显著的简化, 从而体现出更大的优势.

3 多柔体系统动力学建模

3.1 几何精确梁的运动学描述

几何精确梁单元^[23,24]的参考构型和当前构型如图 1 所示, 根据几何精确梁的刚性平截面假设^[23], 几何精确梁的任一中性面相对参考构型仅发生刚体空间运动, 而不发生形状的改变.

考虑距离梁单元起始端为 s 的中性面($s \in [0, l]$), 令 $\mathbf{u}(s)$ 为其上的中性点的空间位置向量, 同时 $\mathbf{R}(s) = [\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)]$ 为中性面上连体基相对于惯性基的姿态矩阵. $\mathbf{e}_1(s)$ 与中性面保持垂直, 而 $\mathbf{e}_2(s)$ 和 $\mathbf{e}_3(s)$ 始终位于中性面内. 可通过特殊欧氏群^[25]SE(3)的元素将 s 处中性面的空间位姿进行统一

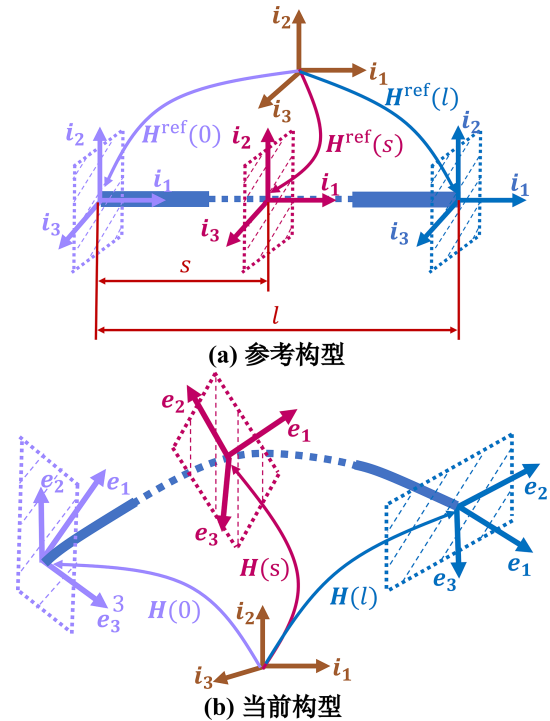


图 1 (网络版彩图)几何精确梁单元的参考构型(a)和当前构型(b)

Figure 1 (Color online) (a) Reference configuration and (b) deformed configuration of the geometrically exact beam element.

表述成齐次变换矩阵的形式

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(s) & \mathbf{u}(s) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3). \quad (18)$$

同时, 令 $\mathbf{H}^{\text{ref}}(s) \in \text{SE}(3)$ 为中性面 s 在参考构型下的空间位姿.

李群 $\text{SE}(3)$ 的李代数 $[\text{se}(3)]$ 定义为

$$\text{se}(3) := \left\{ \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} \mid \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (19)$$

其中, 算子 $\tilde{(\cdot)}$ 表示对应向量 $(\cdot)$ 的反对称矩阵, 算子 $\mathbf{S} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \text{se}(3)$ 可将六维向量映射成与其同构的李代数元素.

几何精确梁在当前构型和参考构型下的曲率向量 $[\text{se}(3)]$ $\mathbf{K}, \mathbf{K}^{\text{ref}} \in \mathbb{R}^6$ 可通过分析对应构型下空间位姿关于 s 的导数表达成李代数元素的形式, 即有

$$\begin{cases} \mathbf{S}(\mathbf{K}(s)) = (\mathbf{H}(s))^{-1} \frac{d}{ds} \mathbf{H}(s). \\ \mathbf{S}(\mathbf{K}^{\text{ref}}(s)) = (\mathbf{H}^{\text{ref}}(s))^{-1} \frac{d}{ds} \mathbf{H}^{\text{ref}}(s). \end{cases} \quad (20)$$

类似地, 几何精确梁空间构型的时间导数和变分可分别用六维向量 $\mathbf{V}, \delta \mathbf{U} \in \mathbb{R}^6$ 表示为

$$\begin{cases} \mathbf{S}(\mathbf{V}(s)) = \mathbf{H}^{-1}(s) \dot{\mathbf{H}}(s), \\ \mathbf{S}(\delta \mathbf{U}(s)) = \mathbf{H}^{-1}(s) \delta \mathbf{H}(s), \end{cases} \quad (21)$$

其中, $\dot{(\cdot)}$ 表示对变量 $(\cdot)$ 的时间导数; $\mathbf{V}(s)$ 和 $\delta \mathbf{U}(s)$ 分别为几何精确梁的速度和虚运动在连体基下的分量表达 $[\text{se}(3)]$.

3.2 几何精确梁的动力学模型

可采用常曲率插值 $[\text{se}(3)]$ 对几何精确梁进行有限元离散, 进而构建其动力学模型. 常曲率插值假设单元内部的曲率 $\mathbf{K}$ 应处处相等, 即有

$$\mathbf{H}'(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{S}(\mathbf{K}), \quad \mathbf{K} = \text{const} \quad \forall s \in [0, l]. \quad (22)$$

根据李群李代数理论, 上述微分方程的解可利用 $\text{SE}(3)$ 群的指数映射 $[\text{se}(3)]$ 表示为

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}(0) \exp(\mathbf{S}(s\mathbf{K})). \quad (23)$$

将 $s = l$ 代入式(23)可得 $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}(0)$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}(l)$ 和 $\mathbf{K}$ 之间的关系

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 \exp(\mathbf{S}(l\mathbf{K})). \quad (24)$$

对式(24)取变分, 可推导得 $\delta \mathbf{K}$ 与 $\delta \mathbf{U}_0$ 和 $\delta \mathbf{U}_1$ 之间的关系

$$\delta \mathbf{K} = \mathbf{B}(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{U}_0 \\ \delta \mathbf{U}_1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

类似地, 对式(23)求变分可得 $\delta \mathbf{U}(s)$ 与 $\delta \mathbf{U}_0$ 和 $\delta \mathbf{U}_1$ 之间的关系

$$\delta \mathbf{U}(s) = \mathbf{J}(s, \mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{U}_0 \\ \delta \mathbf{U}_1 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中算子 $\mathbf{B}(\cdot)$ 和 $\mathbf{J}(\cdot)$ 的具体表达式参见文献[27].

定义梁在 s 处的应变为 $\boldsymbol{\varepsilon}(s) = \mathbf{K}(s) - \mathbf{K}^{\text{ref}}(s)$, 则梁单元的应变能可以表示为

$$\mathbf{V}^{\text{ela}} = \frac{1}{2} \int_0^l \boldsymbol{\varepsilon}^T(s) \mathcal{D} \boldsymbol{\varepsilon}(s) ds, \quad (27)$$

其中, $\mathcal{D}$ 表示截面刚度矩阵 $[\text{se}(3)]$

$$\mathcal{D} = \text{diag}(EA, \kappa_1 GA, \kappa_2 GA, GJ, EI_1, EI_2), \quad (28)$$

其中 G 和 E 分别代表材料的剪切模量和杨氏模量; A 表示截面的面积; J 表示截面对连体基 1 轴的惯性矩, 而 I_1 和 I_2 分别代表截面对连体基 2 轴和 3 轴的极惯性矩; κ_1 和 κ_2 分别对应截面沿着连体基 2 轴和 3 轴的剪切修正系数.

对式(27)取变分, 并结合式(22) 和 (25) 可得单元广义弹性力 $[\text{se}(3)]$ $\mathbf{F}^{\text{ela}}$ 为

$$\mathbf{F}^{\text{ela}} = -l \mathbf{B}^T \mathcal{D} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (29)$$

梁单元的动能也可通过对每一个截面微元的动能积分得到

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{V}^T(s) \mathcal{M} \mathbf{V}(s) ds, \quad (30)$$

其中 $\mathcal{M}$ 为截面质量矩阵 $[\text{se}(3)]$, 可通过材料密度 ρ 与其他截面参数表示为

$$\mathcal{M} = \text{diag}(\rho A, \rho A, \rho A, \rho J, \rho I_1, \rho I_2). \quad (31)$$

通过对式(30)中的梁单元动能求变分可得惯性力所作虚功^[26]为

$$\delta W^{\text{iner}} = \int_0^l \delta \mathbf{U}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{V}} - \mathcal{A}^T(\mathbf{V}) \mathbf{M} \mathbf{V}) ds, \quad (32)$$

其中, 算子 $\mathcal{A}(\cdot)$ 满足 $\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} & \tilde{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0}_3 & \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \end{bmatrix}$. 进而代入式(26)可得单元广义惯性力^[27] $\mathbf{F}^{\text{iner}}$ 为

$$\mathbf{F}^{\text{iner}} = \int_0^l \mathbf{J}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{V}} - \mathcal{A}^T(\mathbf{V}) \mathbf{M} \mathbf{V}) ds. \quad (33)$$

同理, 也可通过分析系统外力对梁单元所作虚功 δW^{ext} 得到单元的广义外力 $\mathbf{F}^{\text{ext}}$

$$\delta W^{\text{ext}} = [\delta \mathbf{U}_0^T \delta \mathbf{U}_1^T] \mathbf{F}^{\text{ext}}. \quad (34)$$

对于由多个梁单元构成的动力学系统, 设各单元节点的编号为 $i = 0, 1, \dots, N$, 令节点 i 所在截面空间位姿记为 $\mathbf{H}_i$, 并将它的虚位移向量记为 $\delta \mathbf{U}_i$. 设 $\delta \mathbf{U}_A = [\delta \mathbf{U}_0^T, \delta \mathbf{U}_1^T, \dots, \delta \mathbf{U}_N^T]^T$, 则此时系统的虚功平衡方程可根据达朗贝尔原理写为

$$\int_{t_i}^{t_f} \delta \mathbf{U}_A^T (\mathbf{F}_A^{\text{iner}} - \mathbf{F}_A^{\text{ela}} - \mathbf{F}_A^{\text{ext}}) dt = 0, \quad (35)$$

其中, $(\cdot)_A$ 表示将变量 $(\cdot)$ 按节点组装所得结果.

由于系统不同部件间常通过运动副连接, 因此有必要考虑这些运动副产生的运动学约束, 记约束方程为

$$\Phi(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_N) = \mathbf{0}. \quad (36)$$

对式(36)取变分, 由式(21)引入虚运动向量可得

$$\delta \Phi = \sum_{i=0}^N \mathbf{C}_i \delta \mathbf{U}_i = \mathbf{C}_A \delta \mathbf{U}_A. \quad (37)$$

通过拉格朗日乘子 λ 可将约束引入式(35), 进一步代入式(37)得到多柔体系统动力学方程

$$\begin{cases} \mathbf{F}_A^{\text{iner}} - \mathbf{F}_A^{\text{ela}} - \mathbf{F}_A^{\text{ext}} + \mathbf{C}_A^T \lambda = \mathbf{0}, \\ \Phi = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (38)$$

为数值求解式(38), 可采用Lie广义 α 方法^[26,28]对前后两个相邻时刻的空间位姿变化进行差分离散, 并通过指数映射来完成空间位姿的迭代. 离散求解格式的具体细节可参见文献^[26].

4 基于灵敏度分析的等效模型设计

4.1 相似缩比模型的制备困难

虽然利用相似性关系可基于量纲标尺的计算便捷地设计出与原模型动力学相似的缩比等效模型. 然而, 制备这样的相似缩比模型在实际工程中可能是难以实现的. 这不仅是因为加工误差会导致实物的物理参数无法和理论参数完全吻合, 还因为加工条件的限制可能导致与原系统动力学完全相似的缩比模型由于缩比尺度过小而不具备制造的可行性.

例如, 在轨航天器中普遍存在细长结构^[29,30], 它们的长度可能达到数十米的量级, 然而它们的截面尺寸可能仅为厘米量级. 这就导致这些结构的长度尺寸以一定比例 k 缩比之后, 其横截面积会以 k^2 的比例缩小, 以至于无法制造.

又譬如, 当需要动力学模型考虑重力等环境影响因素时, 重力加速度 g 也应满足在原模型和缩比模型下度量相等的条件, 即有

$$\frac{g}{1 \text{ m s}^{-2}} = \frac{g}{L_2 T_2^{-2}}. \quad (39)$$

联立式(15)和(39)可解得 (M_2, L_2, T_2) 为

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{(E^B)^3 (\rho^A)^2}{(E^A)^3 (\rho^B)^2} \text{ kg}, \quad L_2 = \frac{E^B \rho^A}{E^A \rho^B} \text{ m}, \\ T_2 &= \sqrt{\frac{E^B \rho^A}{E^A \rho^B}} \text{ s}. \end{aligned} \quad (40)$$

分析式(40)可知, 为使得 $L_2 < L_1 = 1 \text{ m}$, 需要选用杨氏模量更小, 密度更大的材料来设计缩比模型, 并且几何相似比完全由材料的杨氏模量和密度取定. 这便对缩比模型材料的选取提出了极其严苛的限制, 导致很多情况下无法找到合适的缩比模型材料. 即便能找到符合条件的材料制备缩比模型, 其杨氏模量和密度的测量误差也会导致缩比模型制造的不精确.

综上所述, 无论是设备的加工误差还是加工条件的限制, 都会导致所制备的缩比模型和原模型并不能够完全满足相似性关系, 从而导致原模型和缩比模型的动力学特性不完全相似. 因此, 只有通过多柔体系统进行灵敏度分析, 才能有效地评估结构几何参数对动力学响应的影响大小, 进而在缩比模型和原模型动力学响应等效性不受过度影响的情况下, 释放相似性

关系对几何形状和材料参数的强约束条件, 从而增加缩比等效模型制备的可行性.

4.2 基于伴随变量法的灵敏度分析

考察第3节所描述的多柔体系统, 定义向量 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_p]^T$ 为系统各个物理参数所构成的列阵. 在进行灵敏度分析时, 需要构造一个和系统动力学响应有关标量函数 ψ , 称为目标函数^[17], 并研究它关于参数阵列 $\mathbf{b}$ 的偏导数. 首先, 将 ψ 写为一般的形式

$$\psi = \sum_{j=0}^{N_T} w^j (\mathbf{H}_A^j, \mathbf{V}_A^j, \dot{\mathbf{V}}_A^j, \lambda_A^j, \mathbf{b}). \quad (41)$$

对式(41)求变分得到

$$\delta\psi = \sum_{j=0}^{N_T} \left(\frac{\partial w^j}{\partial \mathbf{U}_A^j} \delta \mathbf{U}_A^j + \frac{\partial w^j}{\partial \mathbf{V}_A^j} \delta \mathbf{V}_A^j + \frac{\partial w^j}{\partial \dot{\mathbf{V}}_A^j} \delta \dot{\mathbf{V}}_A^j + \frac{\partial w^j}{\partial \lambda^j} \delta \lambda^j + \frac{\partial w^j}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b} \right). \quad (42)$$

在进行灵敏度分析时需计算 ψ 关于 $\mathbf{b}$ 的梯度 $\nabla_{\mathbf{b}} \psi$, 为此需利用 $\delta \mathbf{b}$ 表达式(42)中的其他变分项. 定义状态灵敏度变量 $\mathbf{Q}_A^j, \mathbf{V}_{A,b}^j, \dot{\mathbf{V}}_{A,b}^j, \lambda_b^j$, 分别满足

$$\begin{cases} \delta \mathbf{U}_A^j = \mathbf{Q}_A^j \delta \mathbf{b}, \delta \mathbf{V}_A^j = \mathbf{V}_{A,b}^j \delta \mathbf{b}, \\ \delta \dot{\mathbf{V}}_A^j = \dot{\mathbf{V}}_{A,b}^j \delta \mathbf{b}, \delta \lambda^j = \lambda_b^j \delta \mathbf{b}. \end{cases} \quad (43)$$

对于系统参数数量和物理参数数量都很庞大的多柔体系统, 具体计算每一个时刻的状态灵敏度会降低计算效率, 并增加数据存储的成本. 为规避直接计算状态灵敏度带来的困难, 可采用伴随变量法^[17-19]对系统进行灵敏度分析. 在使用离散伴随变量法时, 需要将系统不同时刻的状态变量 $\mathbf{H}_A^j, \mathbf{V}_A^j, \dot{\mathbf{V}}_A^j, \lambda^j$ ($j = 0, 1, \dots, N_T$) 之间由初始条件和迭代求解格式确定的约束关系通过拉格朗日乘子 Λ 引入到目标函数中. 首先, 对不同时刻状态变量满足的约束关系进行具体讨论:

(1) 初始时刻(对应时间步 $j = 0$)

使用Lie广义 α 算法进行动力学仿真时, 需要在初始时刻考虑物理参数 $\mathbf{b}$ 的取值确定系统中所有节点的空间位姿 $\mathbf{H}_A^0$ 和所有节点的初始速度 $\mathbf{V}_A^0$. 在此基础上, 通过系统的动力学方程求解出 $\dot{\mathbf{V}}_A^0$ 和 λ^0 ,

并完成Lie广义 α 算法加速度^[18] $\mathbf{X}_A^0$ 的赋值. 综上所述, $\mathbf{H}_A^0, \mathbf{V}_A^0, \dot{\mathbf{V}}_A^0, \lambda^0, \mathbf{X}_A^0$ 应满足约束条件:

$$\mathcal{F}^0(\mathbf{H}_A^0, \mathbf{V}_A^0, \dot{\mathbf{V}}_A^0, \lambda^0, \mathbf{X}_A^0, \mathbf{b}) = \mathbf{0}. \quad (44)$$

(2) 非初始时刻(对应时间步 $0 < j \leq N_T$)

Lie广义 α 算法是一种单步求解算法, 初始时刻以外的任一时间步 j ($0 < j \leq N_T$) 对应的状态变量可基于 $j-1$ 时刻的状态变量求出. 因此, 系统在时间步 j 的状态变量和 $j-1$ 时刻的状态变量之间具有约束关系, 可以写为

$$\mathcal{F}^j(\mathbf{H}_A^{j-1,j}, \mathbf{V}_A^{j-1,j}, \dot{\mathbf{V}}_A^{j-1,j}, \lambda^{j-1,j}, \mathbf{X}_A^{j-1,j}, \Gamma_A^j, \mathbf{b}) = \mathbf{0}, \quad (45)$$

其中 $(\cdot)^{j-1,j}$ 是 $(\cdot)^{j-1}, (\cdot)^j$ 的简写; Γ_A^j 表示 $\mathbf{H}_A^{j-1}$ 到 $\mathbf{H}_A^j$ 的运动增量, $\mathbf{H}_i^{j-1} \exp(\mathbf{S}(\Gamma_i^j)) = \mathbf{H}_i^j$.

可通过构造拉格朗日乘子 Λ (又称为伴随变量) 将式(44)和(45)中的约束方程加至式(41)中, 进而可将目标函数改写为

$$L = \psi + \Lambda^{0T} \mathcal{F}^0 + \sum_{j=1}^{N_T} \Lambda^{jT} \mathcal{F}^j. \quad (46)$$

对式(46)关于 $\mathbf{b}$ 求梯度, 并按照 $\mathbf{Q}_A^0, \mathbf{V}_{A,b}^0, \dot{\mathbf{V}}_{A,b}^0, \lambda_b^0, \mathbf{X}_{A,b}^0$ 和 $\mathbf{Q}_A^j, \mathbf{V}_{A,b}^j, \dot{\mathbf{V}}_{A,b}^j, \lambda_b^j, \mathbf{X}_{A,b}^j, \Gamma_{A,b}^j$ ($j = 1, 2, \dots, N_T$) 进行合并同类项可得

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{b}} L = & \mathbf{S}_1^{0T} \mathbf{Q}_A^0 + \mathbf{S}_2^{0T} \mathbf{V}_{A,b}^0 + \mathbf{S}_3^{0T} \dot{\mathbf{V}}_{A,b}^0 + \mathbf{S}_4^{0T} \lambda_b^0 \\ & + \mathbf{S}_5^{0T} \mathbf{X}_{A,b}^0 + \sum_{j=1}^{N_T} (\mathbf{S}_1^{jT} \mathbf{Q}_A^j + \mathbf{S}_2^{jT} \mathbf{V}_{A,b}^j \\ & + \mathbf{S}_3^{jT} \dot{\mathbf{V}}_{A,b}^j + \mathbf{S}_4^{jT} \lambda_b^j + \mathbf{S}_5^{jT} \mathbf{X}_{A,b}^j + \mathbf{S}_6^{jT} \Gamma_{A,b}^j) \\ & + \mathbf{ANS}. \end{aligned} \quad (47)$$

伴随变量法的核心在于式(47)中 $\nabla_{\mathbf{b}} L = \nabla_{\mathbf{b}} \psi$ 的求解可以规避对逐个时间步状态灵敏度 $\mathbf{Q}_A^j, \mathbf{V}_{A,b}^j, \dot{\mathbf{V}}_{A,b}^j$ 等变量的计算. 为了实现这一点, 需要令式中的向量 $\mathbf{S}_1^0, \mathbf{S}_2^0, \dots, \mathbf{S}_5^0$ 均为零向量, 同时对任意的 $j = 1, 2, \dots, N_T$ 也有 $\mathbf{S}_1^j, \mathbf{S}_2^j, \dots, \mathbf{S}_6^j$ 均为零向量. 于是便构造了不同时刻下伴随变量的方程, 从而将对每一个时间步状态灵敏度的计算转化成了对逐个时间步中伴随变量 Λ^j 的求解. 伴随变量方程的具体形式参见文献^[18, 19].

最终 $\nabla_b \psi$ 的取值可通过各时间步中系统的状态和所求的伴随变量得到

$$\nabla_b \psi = \text{ANS} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}} + \Lambda^{0T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \mathcal{F}^0 + \sum_{j=1}^{N_T} \Lambda^{jT} \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \mathcal{F}^j. \quad (48)$$

4.3 缩比等效模型设计方法

基于灵敏度分析设计多柔体系统缩比等效模型的具体步骤可以概括如下.

(1) 原模型灵敏度分析

确定需要进行灵敏度分析的物理量列阵 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_p]^T$. 接着, 构造目标函数 ψ , 采用伴随变量法对所选取变量进行灵敏度分析, 完成 $\nabla_b \psi$ 的计算.

(2) 确定关键变量

$\nabla_b \psi = [\partial \psi / \partial b_1, \dots, \partial \psi / \partial b_p]$ 中的各个分量 $\partial \psi / \partial b_k$ ($k = 1, 2, \dots, p$)是 ψ 对变量 b_k 绝对变化的导数, 因此 $\nabla_b \psi$ 不同分量的量纲往往不一致, 导致无法直接比较大小. 因此, 为统一量纲, 可通过链式法则求得 ψ 对各物理量相对变化的导数, 即有

$$\nabla_b \psi = \left[b_1 \frac{\partial \psi}{\partial b_1}, b_2 \frac{\partial \psi}{\partial b_2}, \dots, b_p \frac{\partial \psi}{\partial b_p} \right]. \quad (49)$$

比较 $\nabla_b \psi$ 各个分量绝对值的量级大小, 找出对目标函数 ψ 影响较高的变量, 并综合考虑实际需求 and 重要性确定在相似性关系中研究的关键变量 $b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}$. 由于真实物理系统的复杂性, 所选取变量之间的灵敏度可能并不存在明显量级差异. 此时需要进一步分析所选取物理量在动力学模型中的结构关系, 重新选取灵敏度分析的对象并重复上述步骤以完成关键变量的确定.

(3) 求解基本量纲方程

通过确定好的关键变量 $b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}$ 构造基本量纲方程, 并求解出等效模型 $\mathbb{B}$ 的基本量纲标尺 (M_2, L_2, T_2) , 使得等效模型 $\mathbb{B}$ 中的物理量 $b_{k_1}^{\mathbb{B}}, b_{k_2}^{\mathbb{B}}, b_{k_3}^{\mathbb{B}}$ 在 (M_2, L_2, T_2) 下的度量大小等于原模型 $\mathbb{A}$ 中的物理量 $b_{k_1}^{\mathbb{A}}, b_{k_2}^{\mathbb{A}}, b_{k_3}^{\mathbb{A}}$ 在国际单位制(1 kg, 1 m, 1 s)下的度量.

(4) 确定剩余物理量

对于其他并不对动力学系统造成最大影响的物理量, 可按照实际需求进行设计.

区别于2.3节完全依据相似性判据的相似缩比模型设计方法, 此处的缩比等效模型设计仅需确保物理

量 $b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}$ 在两个系统基本量纲标尺下的度量大小是相等的, 而缩比模型其他参数的取值并不一定受相似关系的约束, 由此增加了制备缩比模型的灵活性. 与此同时, 借助灵敏度分析可准确判别出对系统动力学响应影响较大的关键变量, 通过控制这些变量在各自标尺下度量的相等, 可最大程度地降低放松相似性约束所造成的误差, 从而确保缩比系统动力学响应和原模型的等效性.

5 数值仿真算例

5.1 三自由度弹簧阻尼系统

本例通过一个三自由度系统验证所提出相似模型设计方法的准确性, 并对该方法相较于传统方法的简便性进行说明. 如图2所示, 三个质量块通过弹簧和阻尼器连接, 其中质量块2是在质量块1上作纯滚动的均质圆盘. 从初始时刻起, 将在质量块3上施加力 f ($f \neq 0$) 使得系统发生振动.

取定原模型的物理参数, 其中三个质量块 $(m_1, m_2, m_3)^{\mathbb{A}} = (1 \text{ kg}, 2 \text{ kg}, 2 \text{ kg})$, 阻尼系数 $(c_1, c_2, c_3)^{\mathbb{A}} = (0.1 \text{ kg s}^{-1}, 0.1 \text{ kg s}^{-1}, 0.1 \text{ kg s}^{-1})$, 弹簧刚度 $(k_1, k_2, k_3)^{\mathbb{A}} = (1 \text{ kg s}^{-2}, 2 \text{ kg s}^{-2}, 2 \text{ kg s}^{-2})$, m_3 上载荷 $f^{\mathbb{A}} = 1 \text{ N}$. 可通过2.3节所介绍的基于基本量纲标尺的相似性关系完成等效模型设计. 首先, 取定相似模型 $\mathbb{B}$ 的基本量纲标尺为 $(M_2, L_2, T_2) = (5 \text{ kg}, 2 \text{ m}, 4 \text{ s})$. 以弹簧刚度为例, 在标尺 (M_2, L_2, T_2) 下, 弹簧刚度的度量单位为 $M_2 T_2^{-2} = 5/16 \text{ kg s}^{-2}$. 为确保 $(k_1, k_2, k_3)^{\mathbb{B}}$ 在标尺 (M_2, L_2, T_2) 下的度量大小也等于 $(1, 2, 2)$, 应取 $(k_1, k_2, k_3)^{\mathbb{B}} = (5/16 \text{ kg s}^{-2}, 5/8 \text{ kg s}^{-2}, 5/8 \text{ kg s}^{-2})$. 同理可得 $c_1^{\mathbb{B}} = c_2^{\mathbb{B}} = c_3^{\mathbb{B}} = 1/8 \text{ kg s}^{-1}$, $(m_1, m_2, m_3)^{\mathbb{B}} = (5 \text{ kg}, 10 \text{ kg}, 10 \text{ kg})$ 以及 $f^{\mathbb{B}} = 5/8 \text{ N}$. 依据上述参数设计出的模型 $\mathbb{B}$ 应与原模型 $\mathbb{A}$ 动力学相似.

根据式(1)所给的几何相似性质, $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 的位移 $\mathbf{u}^{\mathbb{A}}(t)$ 和 $\mathbf{u}^{\mathbb{B}}(t)$ 应在对应时刻对应成比例, 该比例可

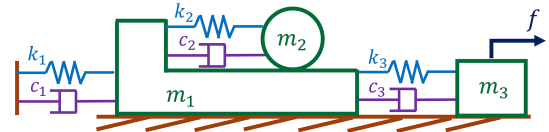


图2 (网络版彩图)三自由度弹簧阻尼系统

Figure 2 (Color online) 3DOF spring-damping system.

由两系统分别使用的长度标尺确定, 于是有

$$L_1^{-1} \mathbf{u}^A(T_1 \bar{t}) = \bar{\mathbf{u}}^A(\bar{t}) = \bar{\mathbf{u}}^B(\bar{t}) = L_2^{-1} \mathbf{u}^B(T_2 \bar{t}), \quad (50)$$

其中, $\bar{t}$ 表示时间在相应系统时间标尺下的度量大小, 称作无量纲时间, 而 $\bar{\mathbf{u}}$ 则表示位移在相应系统长度标尺下的度量大小, 称作无量纲位移. 物块3的无量纲位移响应如图 3 所示. 可以发现, 原系统A和等效系统B中各对应质量块的无量纲化响应具有很好的一致性, 符合动力学相似的要求. 因此可通过系统B在对应标尺(M_2, L_2, T_2)下的无量纲化响应反推系统A在对应标尺(M_1, L_1, T_1)下的无量纲化响应, 进而还原A的动力学响应.

倘若采用传统方法设计出系统B, 则需要基于系统初始条件、物理参数、时间、位移等共20个变量完整地计算出该系统的17个相似准则. 过多的相似准则会给予其推导以及相似模型的设计带来较大的计算成本, 而本文所提出的基于基本量纲标尺的相似模型设计方法可以大大简化设计流程.

5.2 重力作用下的柔性双摆

受重力作用的空间柔性双摆是多体系统动力学的经典算例 [17, 26, 31]. 本例通过讨论其缩比等效模型的设计来说明基于灵敏度分析结果能降低多柔体系统缩比模型的制造难度, 同时能够较好地保持其和原模型在动力学响应上的等效性. 如图 4 所示, 空间柔性双摆由两根杆件通过球铰链连接, 双摆根部通过圆柱铰链与

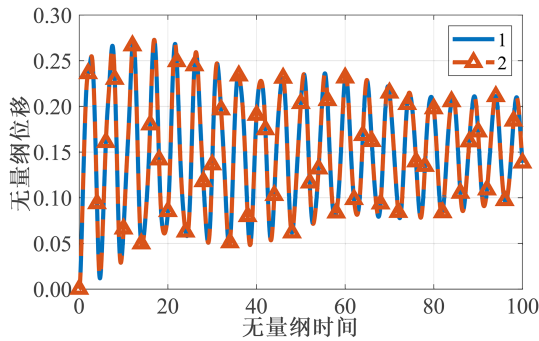


图 3 (网络版彩图)原系统和相似系统质量块 m_3 无量纲化位移响应比较(“1”指代原系统, “2”指代相似系统)

Figure 3 (Color online) Comparison of m_3 's dimensionless displacement between the origin model and the similar model (“1” refers to the origin model and “2” refers to the similar model).

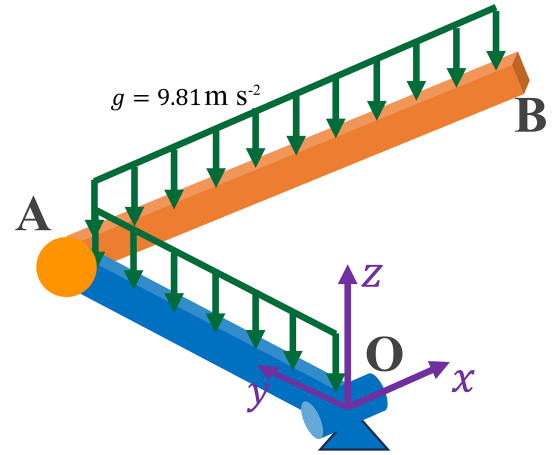


图 4 (网络版彩图)重力作用下的柔性双摆

Figure 4 (Color online) Flexible double pendulum under gravity.

机架固连并设为惯性系坐标原点, 圆柱铰链轴向和惯性系X轴方向保持一致. 对于原模型, 梁OA的长度为 $L_1 = 0.9 \text{ m}$, 梁AB的长度为 $L_2 = 1.8 \text{ m}$. 两根梁截面均为边长 $a = 0.05 \text{ m}$ 的正方形, 材料均为钢材, 杨氏模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 密度 $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$. 可采用长度为 $l = 0.45 \text{ m}$ 的梁单元对系统进行有限元离散, 并进行动力学仿真和灵敏度分析. 双摆B点沿x轴位移响应 X_B 对截面极惯性矩和杨氏模量、密度和截面积、单元长度以及重力加速度相对变化的灵敏度分析结果分别如图 5(a)–(d)所示. 通过分析图 5 所示的灵敏度结果可知, 杆件的杨氏模量和截面极惯性矩对系统动力学响应的影响程度最低. 因此, 在设计缩比等效系统时, 可以放松相似性关系对杨氏模量和极惯性矩的约束. 于是, 系统的关键变量取为两系统材料密度、长度和重力加速度. 取定缩比等效模型的材料仍选用钢材的情况下, 由关键变量在两系统下度量相等列出基本量纲标尺(M_2, L_2, T_2)的方程并进行求解

$$\begin{cases} \frac{\rho}{1 \text{ kg m}^{-3}} = \frac{\rho}{M_2 L_2^{-3}}, \\ \frac{g}{1 \text{ m s}^{-2}} = \frac{g}{L_2 T_2^{-2}}, \\ \frac{L_2}{1 \text{ m}} = \frac{1}{4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_2 = \frac{1}{64} \text{ kg}, \\ L_2 = \frac{1}{4} \text{ m}, \\ T_2 = \frac{1}{2} \text{ s}. \end{cases} \quad (51)$$

由于截面积对动力学响应也有较大的影响, 因而也需要确保其在两个系统下的度量大小相等. 相反, 截面极惯性矩和杨氏模量则有理由按照实际需求取值, 不受

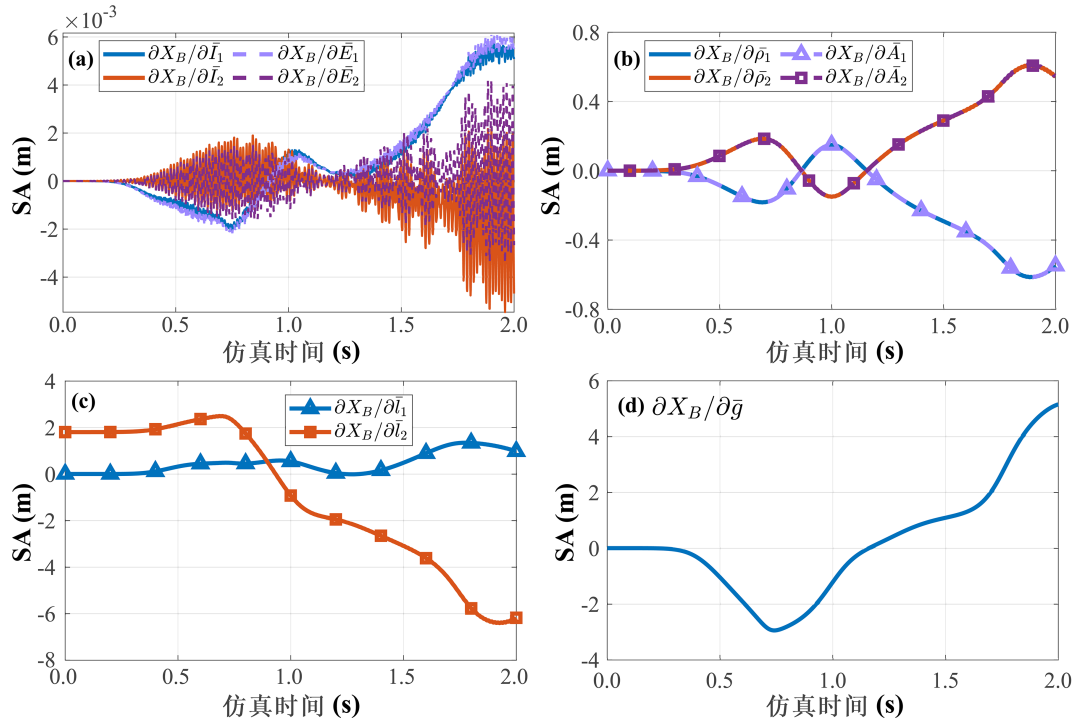


图 5 (网络版彩图) 双摆 B 点沿 X 轴方向位移对两根杆件 E 与 I (a), ρ 与 A (b), l (c) 和 g (d) 的灵敏度分析

Figure 5 (Color online) Sensitivity analysis of the tip displacement of B along X axis to (a) E and I , (b) ρ and A , (c) l and (d) g of the two beams.

相似关系的约束。

为进一步验证杆件截面面积对动力学响应的影响程度强于截面极惯性矩, 可构造对照模型并考察其动力学响应。相比缩比等效模型, 对照模型放松了相似性判据对截面面积的约束, 转而确保截面极惯性矩在不同标尺下度量的一致性。原模型、缩比等效模型和对照模型具体参数在各自基本量纲标尺下的度量大小如表 3 所示。需要注意的是, 由于缩比等效模型中放松了对杨氏模量和极惯性矩的约束, 因此在缩比模型设计中可以采用和原模型一样的材料, 同时可将截面积设计成和原模型不一样的形状来保证制造加工的可行性。表 3 中三种模型的横截面形状尺寸如图 6 所示, 其中原模型采用实心的正方形截面, 而缩比等效模型和

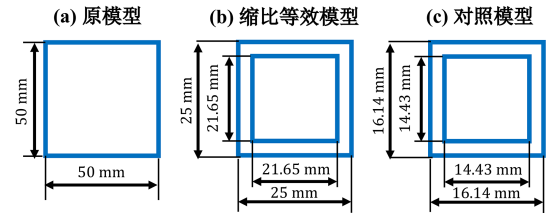


图 6 (网络版彩图) (a) 原模型、(b) 缩比等效模型和(c) 对照模型的截面尺寸

Figure 6 (Color online) Sizes of the cross sections of (a) the original model, (b) the equivalent scale-down model and (c) the control model.

对照模型的截面均设计为方形薄壁结构。

同时对原模型、缩比等效模型和对照模型进行动力学仿真, 并将原模型的动力学响应分别和缩比等效模型和对照模型进行比较, 如图 7 (a)和(b)所示。比较三个模型的无量纲化响应可发现, 所设计的缩比等效模型的动力学响应能在较长的时间范围内和原系统保持动力学相似。而对照组由于放松了对灵敏度更高的截面积的要求, 因此其动力学响应并不能和原模型保持较好的吻合。

表 3 双摆原模型、缩比等效模型和对照模型物理参数度量大小

Table 3 Measurement of the physical parameters of the origin model, the equivalent scale-down model and the control model

模型	单元长度	截面积	极惯性矩
原模型	0.45	0.05^2	$0.05^4/12$
缩比等效模型	0.45	0.05^2	$0.05^4 \times 7/12$
对照模型	0.45	$0.05^2/3$	$0.05^4/12$

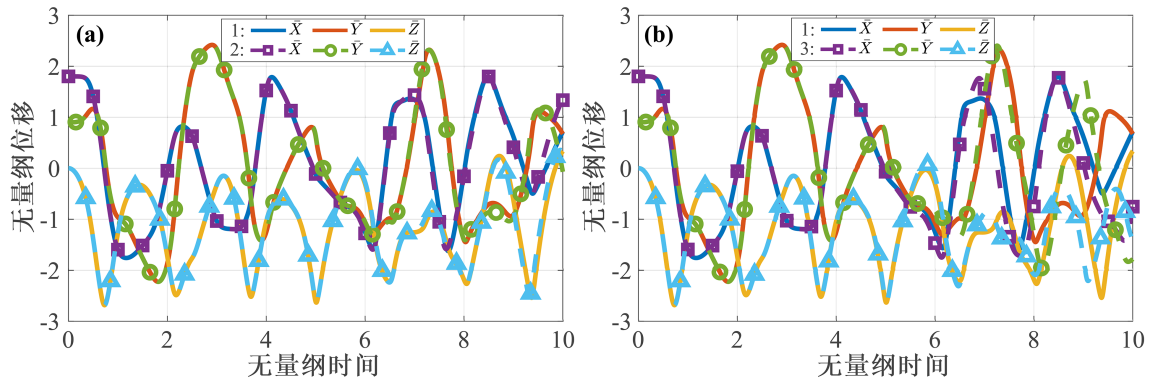


图 7 (网络版彩图)原模型沿X轴方向无量纲位移响应与(a) 缩比等效模型和(b) 对照模型比较示意图(“1”指代原模型, “2”指代缩比等效模型, “3”指代对照模型)

Figure 7 (Color online) Comparison of the dimensionless tip displacement along X axis of the origin model with (a) the equivalent scale-down model and (b) the control model (“1” refers to the origin model, “2” refers to the equivalent scale-down model, and “3” refers to the control model).

5.3 空间折展机构

本例通过一个复杂的多柔体系统案例来展示所提出的等效动力学建模方法应用于实际问题中的可行性. 如图 8 所示, 空间折展结构由若干三棱柱可展模块构成, 每个三棱柱模块为由多根连杆铰接构成的多柔体系统. 该机构在微重力环境下展开过程中, 三棱柱模块的顶端受到丝杠的驱动以 $v_d = 0.01 \text{ m s}^{-1}$ 匀速运动. 当三棱柱模块的棱边完全展开时, 棱边中心的旋转铰链将锁定, 同时拉动下一模块继续展开, 直到所有模块完成展开. 对于原模型, 取定三棱柱模块完全展开后长度为 $L_B = 0.5 \text{ m}$, 构成三棱柱棱边的

上下折臂长度为 $L_A = 0.25 \text{ m}$. 同时, 假设所有桁架均为实心圆截面, 半径为 $r = 0.005 \text{ m}$, 并采用铝合金制造(密度 $\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$, 杨氏模量 $E = 70 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$).

地面实验中往往设计缩比样机对伸展臂进行功能性验证, 本例中原模型和缩比模型都选用铝合金制造, 取定相似缩比模型和原模型的几何相似比为 1 : 2. 根据式(17)可知相似缩比模型的基本量纲标尺为(0.125 kg, 0.5 m, 0.5 s). 可进一步利用求得的基本量纲标尺完成缩比模型尺寸的设计, 部分参数结果如表 4 所示.

根据表 4 可看出, 缩比模型中三棱柱棱边圆截面

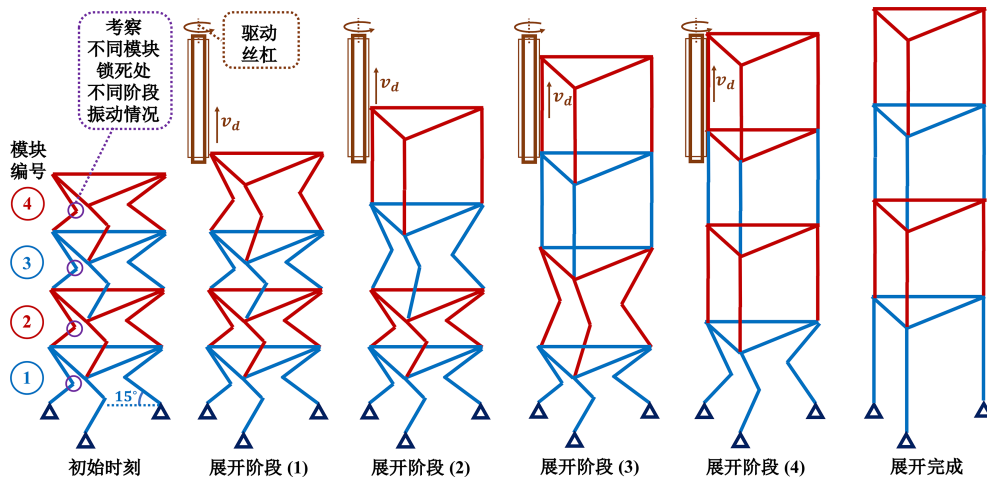


图 8 (网络版彩图)三棱柱可展开支撑臂

Figure 8 (Color online) Triangular prism modular deployable mast.

表 4 空间折展机构原模型和相似缩比模型物理参数

Table 4 Physical properties of the original model and similar scale-down model of the spatial deployable mast

模型物理参数	原模型	相似缩比模型	度量大小
侧面桁架长度	0.50 m	0.25 m	0.50
底面桁架长度	0.250 m	0.125 m	0.250
圆截面半径	0.0050 m	0.0025 m	0.0050
丝杠驱动速度	0.01 m s ⁻¹	0.01 m s ⁻¹	0.01

半径仅为 2.5 mm, 制造加工已有难度, 若几何相似比进一步缩小, 则相关尺寸将更小, 制造加工甚至不可实现. 因此, 有必要通过灵敏度分析尝试放松相似性关系, 从而降低缩比样机的加工难度. 灵敏度分析所需的目标函数 ψ 可通过展开完成后 (如图 8 所示) 模块 4 锁死处的振动响应构造得到

$$\psi = \sum_{\text{Stage } 5} (w^j)^2 \Delta t, \quad (52)$$

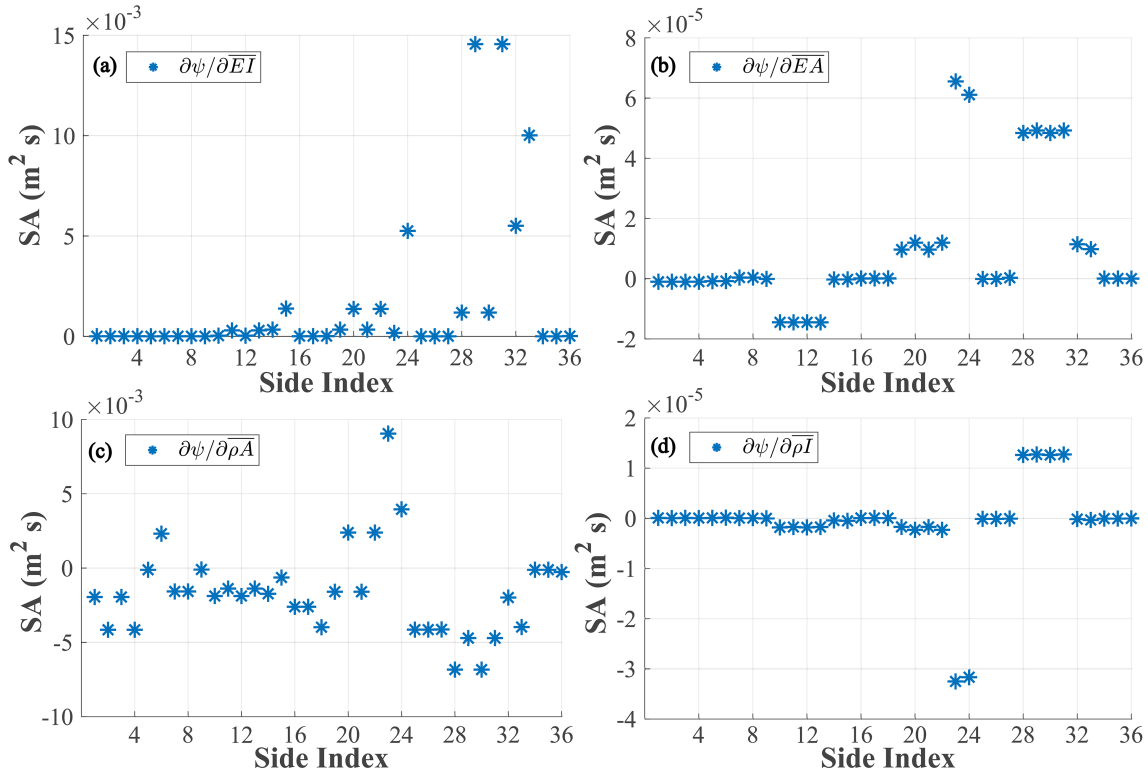
其中, w^j 表示在展开完成后模块 4 在 j 时刻锁死处所发生的横向振动, 同时 $\Delta t = 0.001$ s 为仿真时间步长. 可通过伴随变量法得到 ψ 关于不同部件密度 ρ , 杨氏模量 E ,

截面面积 A 和截面极惯性矩 I 的灵敏度绝对值的最大值分别为 3.58×10^{-4} , 4.60×10^{-4} , 2.38×10^{-4} , 5.00×10^{-3} m² s.

对于所研究的复杂多柔体系统, ψ 对 ρ , E , A 和 I 相对变化的灵敏度在量级上并无明显差距, 因此无法直接放松 ρ , E , A 或 I 的相似性关系. 此时便需要综合考虑这些变量在动力学模型中的结构关系, 并重新选取灵敏度分析的对象. 受式 (28) 和 (31) 启发, ρ , E , A 和 I 在动力学方程中是以线密度 ρA , 截面转动惯量 ρI , 拉伸刚度 EA 和弯曲刚度 EI 的形式出现的, 因而可对 EI , EA , ρA 和 ρI 进行灵敏度分析, 其结果分别如图 9(a)–(d) 所示.

通过分析图 9 所示的灵敏度结果可知, 杆件的 ρI 和 EA 对系统动力学特性的影响远小于杆件的 ρA 和 EI 的影响. 因此在设计 1/4 缩比等效系统时仅考虑 ρA 和 EI 在各自标尺下的度量相等. 所设计缩比等效模型尺寸与原模型和表 4 所给相似缩比模型比较如图 10 所示.

原模型和缩比等效模型均采用铝合金制造时, 两

图 9 (网络版彩图) ψ 对系统中不同杆件 EI (a), EA (b), ρA (c) 和 ρI (d) 的灵敏度分析Figure 9 (Color online) Sensitivity analysis of ψ to (a) EI , (b) EA , (c) ρA and (d) ρI of different trusses in the system.

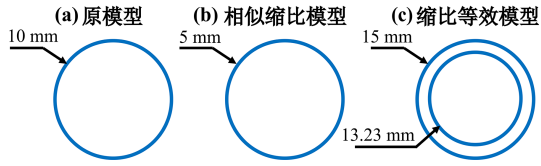


图 10 (网络版彩图) (a) 原模型、(b) 相似缩比模型和(c) 缩比等效模型截面尺寸

Figure 10 (Color online) Sizes of the cross sections of (a) the origin model, (b) the similar scale-down model and (c) the equivalent scale-down model.

系统的线密度和抗弯刚度分别满足 $(\rho A)^B = 0.5(\rho A)^A$, $(EI)^B = 2(EI)^A$. 综上所述, 系统关键变量取为线密度、抗弯刚度和长度, 基本量纲方程相应为

$$\begin{cases} \frac{M_2 L_2^{-1}}{1 \text{ kg m}^{-1}} = \frac{(\rho A)^B}{(\rho A)^A} = \frac{1}{2}, \\ \frac{M_2 L_2^3 T_2^{-2}}{1 \text{ kg m}^3 \text{ s}^{-2}} = \frac{(EI)^B}{(EI)^A} = 2, \\ \frac{L_2}{1 \text{ m}} = \frac{1}{4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_2 = \frac{1}{8} \text{ kg}, \\ L_2 = \frac{1}{4} \text{ m}, \\ T_2 = \frac{1}{32} \text{ s}. \end{cases} \quad (53)$$

根据式(53), 缩比模型响应的速度度量标尺为 8 m s^{-1} , 因此缩比等效模型的丝杠驱动速度取为 $v_d^B = 8v_d^A = 0.08 \text{ m s}^{-1}$.

可分别对相似缩比模型和缩比等效模型进行动力学仿真, 并将对应模块4 锁死处不同阶段的振动情况与原模型进行比较, 如图 11(a)和(b) 所示. 通过无量纲振动的比较可发现, 相似缩比模型的无量纲化振动曲

线和原模型完全吻合, 符合动力学相似的要求; 而缩比等效模型由于并不与原模型完全相似, 因此在振动曲线的相位上出现了差异. 然而, 可通过快速傅里叶变换得到原模型和缩比等效模型分别在展开阶段3和4中模块4锁死处的振动频谱, 如图 12(a)和(b)所示. 比较原模型和缩比等效模型的频谱可知, 缩比等效模型无量纲振动对应的无量纲频率和无量纲振幅与原模型是十分接近的, 不同阶段振动的基频误差均在4%以内.

由于三棱柱模块在上下底面处的旋转铰链始终没有锁死, 因此在棱边发生锁死后三棱柱母线上的两杆桁架可整体简化为简支梁. 于是, 锁死处纵向振动的频率 f_{LOCK} 可用简支梁的一阶固有频率^[32]进行估计. 可分别根据原模型和缩比等效模型系统的物理参数和基本量纲标尺计算出一阶固有频率的无量纲度量大小, 并最终发现在灵敏度分析的指导下, EI 和 ρA 在两系统下的度量大小根据式(53)确保相等, 从而使得 f_{LOCK} 在两个系统下的度量大小相等, 并和图 11中振动基频能够较好地吻合, 即有

$$\bar{f}_{\text{LOCK}} = \frac{\pi T_1}{2} \sqrt{\frac{(EI)^A}{(\rho A)^A (L_A^A)^4}} = \frac{\pi T_2}{2} \sqrt{\frac{(EI)^B}{(\rho A)^B (L_A^B)^4}} \approx 80. \quad (54)$$

因此, 对于复杂的多柔体系统, 采用灵敏度分析能识别出对系统影响最大的物理变量, 通过确保这些变量的相似性关系可高精度地保持缩比等效模型和原模

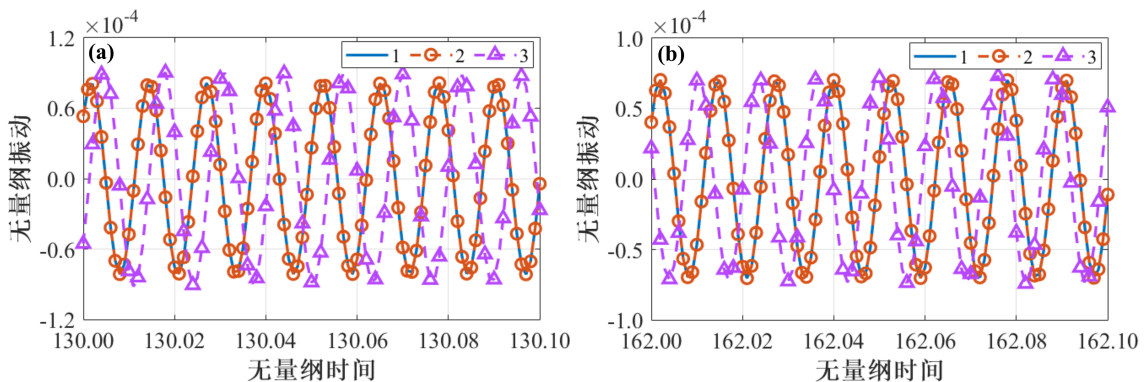


图 11 (网络版彩图)原模型在(a) 展开阶段3和(b) 展开阶段4无量纲振动与相似缩比模型和缩比等效模型比较示意图(“1”指代原模型, “2”指代相似缩比模型, “3”指代缩比等效模型)

Figure 11 (Color online) Comparison of the dimensionless vibration of the origin model with the similar scale-down model and the equivalent scale-down model at (a) stage 3 and (b) stage 4 during the deployment (“1” refers to the origin model, “2” refers to the similar scale-down model, and “3” refers to the equivalent scale-down model).

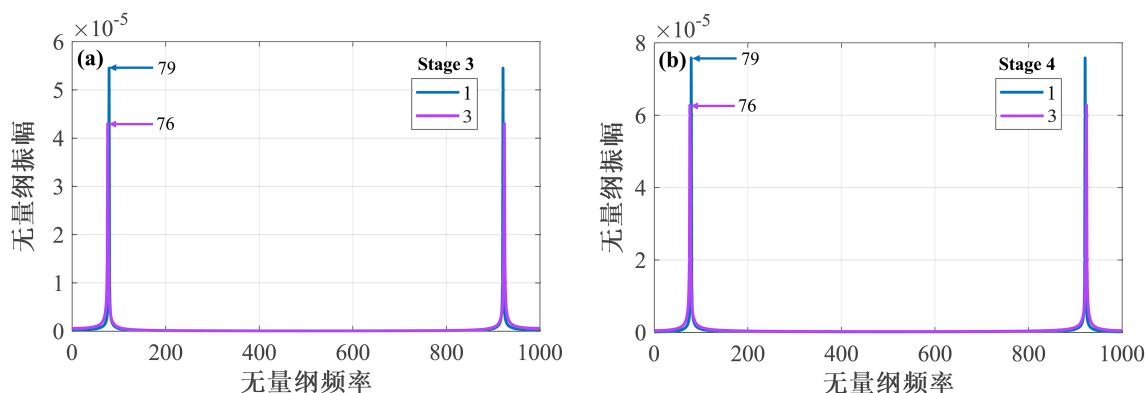


图 12 (网络版彩图)原模型在(a) 展开阶段3和(b) 展开阶段4无量纲振动频谱与缩比等效模型比较示意图(“1”指代原模型, “3”指代缩比等效模型)

Figure 12 (Color online) Comparison of frequency spectrum of the dimensionless vibration of the origin model with the equivalent model at (a) stage 3 and (b) stage 4 during the deployment (“1” refers to the origin model and “3” refers to the equivalent scale-down model).

型在动力学特性上的等效性. 同时, 由于其他变量的相似性关系得以放松, 缩比等效模型加工的难度也得到了降低.

6 结论

本文针对大型空间结构缩比等效模型的设计需求, 研究了空间多柔体系统的动力学等效建模方法. 首先, 对传统的相似性判据进行简化, 构建了基于基本量纲标尺的多柔体系统相似缩比模型设计方法. 接着, 基于李群李代数理论和几何精确理论建立了多柔体系统

的动力学方程和数值求解算法. 进一步, 为解决相似缩比模型因部分尺寸缩比后导致制备困难的问题, 研究了多柔体系统的灵敏度分析方法, 并总结了根据灵敏度分析结果调整缩比模型结构参数的方案, 以指导缩比等效模型的设计. 仿真结果表明, 可基于所提出的相似性关系, 通过求解基本量纲标尺设计出相似缩比模型, 从而规避了对复杂系统相似准则的繁冗的分析. 并且, 可利用灵敏度分析结果释放相似性关系对缩比模型参数的强约束, 从而在提升缩比模型设计的灵活性和可行性的同时, 使得所设计的缩比模型能够高精度地保持和原模型在动力学响应上的等效性.

参考文献

- Meng G, Liu C, Yang D C, et al. First flight of SpaceX heavy-lift starship: Enlightenment for aerospace industry in China (in Chinese). *Acta Aeronaut Astronaut Sin*, 2023, 44: 6–16 [孟光, 刘昶, 杨冬春, 等. 美国SpaceX 超重-星舰首飞分析及对中国航天产业的启示. *航空学报*, 2023, 44: 6–16]
- Zhu W C, Song X D, Shan M H, et al. Flexible multibody dynamics modelling and calculation of a deployable space antenna in orbit (in Chinese). *J Dyn Control*, 2024, 22: 1–12 [朱文璁, 宋晓东, 单明贺, 等. 一种在轨可展开天线的多柔体动力学建模与计算. *动力学与控制学报*, 2024, 22: 1–12]
- Xue Z, Liu J, Wu C, et al. Review of in-space assembly technologies. *Chin J Aeronaut*, 2021, 34: 21–47
- Ghanekar M, Wang D W L, Heppler G R. Dynamic equivalence conditions for controlled robotic manipulators. *AIAA J*, 2003, 41: 280–287
- Miao H, Zang C P, Wang X W, et al. Dynamic similarity design for experimental model of aero engine high-pressure rotor (in Chinese). *J Propul Tech*, 2021, 42: 2340–2348 [缪辉, 臧朝平, 王晓伟, 等. 航空发动机高压转子试验模型的动力学相似设计. *推进技术*, 2021, 42: 2340–2348]
- Zong L J, Luo J J, Wang M M, et al. Dynamic equivalence conditions and control scaling laws for ground and space manipulators (in Chinese). *Control Theory Appl*, 2018, 35: 1521–1529 [宗立军, 罗建军, 王明明, 等. 地面和空间机械臂的动力学等效条件与控制相似律. *控制理论与应用*, 2018, 35: 1521–1529]
- Sedov L I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, 2018

- 8 Wang Y, Zhu L W, Wang M Y, et al. Summary of some key technologies on dynamics of large launch vehicle (in Chinese). *Missiles Space Vehicles*, 2000, 1: 29–37 [王毅, 朱礼文, 王明宇, 等. 大型运载火箭动力学关键技术及其进展综述. *导弹与航天运载技术*, 2000, 1: 29–37]
- 9 Jaszlics I. Dynamic testing of a 20% scale model of the Titan III. In: *Symposium on Structural Dynamics and Aeroelasticity*. Boston: AIAA, 1965. 505–522
- 10 Gao X L. Research on Multibody Dynamics and Fluid-Structure Interaction of Parachute-Body System (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Changsha: National University of Defense Technology, 2016 [高兴龙. 物伞流固耦合及多体系统动力学研究. 博士学位论文. 长沙: 国防科学技术大学, 2016]
- 11 Cao X, Wang Z, Wang W, et al. Application of similarity theory for dynamic characteristics prediction of crane flexible truss boom. *Math Problems Eng*, 2020, 2020: 1–11
- 12 Gui H B, Yang J P, Zhang Y, et al. Dynamic study and verification of a ship large section hoisting system based on scale experiments (in Chinese). *J Vib Shock*, 2023, 42: 11–18 [桂洪斌, 杨佳朋, 张岩, 等. 基于缩尺试验的船舶大分段吊装动力学研究与验证. *振动与冲击*, 2023, 42: 11–18]
- 13 Sun S H, Zhao L, Jia Y M. Similitude design method for motion reconstruction of space cooperative vehicles (in Chinese). *Acta Astronaut*, 2014, 35: 802–810 [孙施浩, 赵林, 贾英民. 空间合作目标运动再现的相似设计方法研究. *宇航学报*, 2014, 35: 802–810]
- 14 Ciarciá M, Cristi R, Romano M M. Emulating scaled Clohessy-Wiltshire dynamics on an air-bearing spacecraft simulation testbed. *J Guid Control Dyn*, 2017, 40: 2496–2510
- 15 Zong L, Emami M R. Control verifications of space manipulators using ground platforms. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2020, 57: 341–354
- 16 Zhang L G, Zhao Z Z, Ren B, et al. Properties of mixed kernel functions and their application in mixed sensitivity analysis (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2014, 44: 828–837 [张磊刚, 吕震宙, 任博, 等. 混合核函数的性质及其在混合灵敏度分析上的应用. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2014, 44: 828–837]
- 17 Wang S, Tian Q, Hu H, et al. Sensitivity analysis of deployable flexible space structures with a large number of design parameters. *Nonlinear Dyn*, 2021, 105: 2055–2079
- 18 Callejo A, Sonnevile V, Bauchau O A. Discrete adjoint method for the sensitivity analysis of flexible multibody systems. *J Comput Nonlinear Dyn*, 2019, 14: 021001
- 19 Callejo A, Bauchau O A, Diskin B, et al. Sensitivity analysis of beam cross-section stiffness using adjoint method. In: *Proceedings of ASME 2017 International Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference*. Cleveland, 2017. V006T10A058
- 20 Adams C, Bösi J, Slomski E M, et al. Scaling laws obtained from a sensitivity analysis and applied to thin vibrating structures. *Mech Syst Signal Processing*, 2018, 110: 590–610
- 21 Cao X Y, Dong X, Gu Z H. Study on the similarity relationship of nonlinear displacement of large slender telescopic boom (in Chinese). *Mach Des Manuf*, 2021, 2021: 60–66 [曹旭阳, 董想, 顾振华. 大长细比伸缩臂的非线性位移相似关系研究. *机械设计与制造*, 2021, 2021: 60–66]
- 22 Yang J T. *Elasticity* (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2018 [杨佳通. *弹性力学*. 北京: 高等教育出版社, 2018]
- 23 Simo J C. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1985, 49: 55–70
- 24 Simo J C, Vu-Quoc L. On the dynamics in space of rods undergoing large motions—A geometrically exact approach. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1988, 66: 125–161
- 25 Sonnevile V. A Geometric Local Frame Approach for Flexible Multibody Systems. Dissertation for Doctoral Degree. Liege: University of Liege, 2015
- 26 Liu C, Hu H Y. Dynamic modelling and computation for flexible multibody systems based on the local frame of Lie group (in Chinese). *Acta Mech Sin*, 2021, 53: 213–233 [刘钺, 胡海岩. 基于李群局部标架的多柔体系统动力学建模与计算. *力学学报*, 2021, 53: 213–233]
- 27 Sonnevile V, Cardona A, Brüls O. Geometrically exact beam finite element formulated on the special Euclidean group. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2014, 268: 451–474
- 28 Brüls O, Cardona A, Arnold M. Lie group generalized- α time integration of constrained flexible multibody systems. *Mechanism Machine Theor*, 2012, 48: 121–137
- 29 Qi Y, Shan M. Simulation on flexible multibody system with topology changes for in-space assembly. *J Astronaut Sci*, 2024, 71: 11
- 30 Yang G, Zhang L, Yu S, et al. Influences of space perturbations on robotic assembly process of ultra-large structures. *Nonlinear Dyn*, 2023, 111: 10025–10048
- 31 Tian Q. Flexible Multibody Dynamics Research and Application Based on the Absolute Nodal Coordinate Method (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2009 [田强. 基于绝对节点坐标方法的柔性多体系统动力学研究与应用. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学, 2009]

- 32 Hu H Y. Mechanical Vibrations (in Chinese). Beijing: Beihang University Press, 2005 [胡海岩. 机械振动基础. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2005]

Dynamically scaled equivalent modelling for flexible multibody systems in space

QI YiFan, SHAN MingHe* & TIAN Qiang

School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

**Corresponding author (email: mshan@bit.edu.cn)*

With the increase in size and flexibility of space structures, it is necessary to design a scale-down prototype to carry out ground experiments, where the feasibility of the designed structure and its dynamic characteristics can be verified. To predict the dynamic behavior of the full-scale structure more accurately through the scale-down model, this paper presents a method to design dynamically scaled equivalent models for flexible multibody systems based on similarity theory and sensitivity analysis of flexible multibody systems. Firstly, the similarity relationships are simplified based on dimensional analysis and the PI theorem, making the measurement of fundamental dimensions the only concern in the design of similar systems. Then, a standard procedure is provided to design dynamically equivalent scale-down models for flexible multibody systems more efficiently than the traditional method. Secondly, the Lie groups and Lie algebras and the geometrically exact formulation are utilized to establish the dynamic model of flexible beams. Thirdly, to overcome the challenges of manufacturing scale-down models, sensitivity analysis on the derived dynamic model is carried out in order to adjust the design of the scale-down models. The feasibility of building scale-down models is improved by releasing the strong restriction on the design of scale-down models due to the similarity relationships. Meanwhile, the preservation of the similarity relationship of the critical parameters makes the designed scale-down models able to resemble the dynamic characteristics of the original model with high accuracy. Finally, numerical simulations are carried out to verify the feasibility and accuracy of the designed dynamically scaled equivalent models for flexible multibody systems.

dynamically scale-down equivalent modeling, similarity theory, flexible multibody systems, sensitivity analysis

PACS: 06.30.-k, 45.50.Jf, 46.70.De

doi: [10.1360/SSPMA-2024-0302](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0302)