



燃料最优小推力轨迹平滑化求解方法的平滑参数上限分析

郭祥, 武迪, 蒋方华*

清华大学航天航空学院, 北京 100084

*联系人, E-mail: jiangfh@tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2024-06-11; 接受日期: 2024-10-12; 网络出版日期: 2024-12-06

国家重点研发计划(编号: 2020YFC2201200)和国家自然科学基金(编号: U21B2050)资助项目

摘要 燃料最优小推力轨迹的最优控制律具有Bang-Bang特性, 导致轨迹优化问题的数值敏感性强且收敛困难. 平滑化方法通过引入平滑参数, 用连续的最优控制律近似Bang-Bang控制, 提高了轨迹优化问题的收敛概率. 通过数值延拓的方法将平滑参数从一个较大的正值逐渐减小到0, 即可迭代得到原问题的燃料最优解. 然而, 在某些情况下, 当平滑参数的起始值超过某个上限时, 对应问题无法获得收敛解, 导致后续的数值延拓过程无法进行. 针对这一问题, 本文应用间接法将燃料最优小推力轨迹优化问题建模为两点边值问题, 介绍了4种常用的Bang-Bang控制平滑化形式, 深入分析了平滑参数的取值上限. 通过研究平滑参数对控制律的影响, 建立了平滑参数上限和到达给定末端状态所需最小推力幅值之间的关系. 基于最小推力幅值, 给出了平滑参数是否存在上限的判断依据, 并推导出了4种平滑形式下平滑参数上限的计算式, 为平滑参数起始值的选取提供了参考依据.

关键词 小推力, 轨迹优化, 平滑化方法, Bang-Bang控制

PACS: 02.60.Pn, 02.30.Xx, 95.10.Ce, 91.10.Sp

1 引言

早期的空间探测任务大多采用传统的化学推进系统, 该系统能够产生较大的推力, 在短时间内提供航天器所需的速度增量. 然而, 化学推进的比冲较小, 燃料消耗较多, 大大增加了探测器起始质量和火箭的运载负荷, 逐渐无法满足高回报航天任务的发展需求. 自二十世纪末, 电推进技术迅速发展, 其比冲一般为 10^3 量级, 远大于传统化学推进的 10^2 量级, 能够显著减少

燃料消耗^[1,2], 已被广泛应用于“隼鸟”号(Hayabusa)^[3]、“黎明”号(Dawn)^[4]、“隼鸟”二号(Hayabusa2)^[5]、双小行星重定向测试(Double Asteroid Redirect Test, DART)^[6]等深空探测任务中, 提高了有效载荷所占比重. 近年来, 电推进逐步应用到地球卫星任务中, 从单一的位置保持^[7]、轨道转移^[8]逐步发展到如今的全电推进卫星平台^[9]. 与传统的化学推进相比, 电推进提供的推力非常微小, 通常为10–100 mN的量级, 需要持续较长的时间才能使航天器轨道发生明显的变

引用格式: 郭祥, 武迪, 蒋方华. 燃料最优小推力轨迹平滑化求解方法的平滑参数上限分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2025, 55: 224506
Guo X, Wu D, Jiang F H. Upper bound analysis of smoothing parameter in the smoothing method for minimum-fuel low-thrust trajectory optimization (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2025, 55: 224506, doi: [10.1360/SSPMA-2024-0222](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0222)

化^[10]. 因此, 连续推力的轨迹优化无法简单地通过脉冲模型近似处理, 需要对整个转移过程中推力的大小和方向进行优化, 才能获得最优轨迹, 这给探测任务的轨道设计带来了巨大挑战.

连续推力轨迹优化问题本质上是一个最优控制问题, 其目标在于设计合理的连续推力控制策略, 在满足给定的初始、末端边界条件以及某些路径约束的前提下, 使性能指标取得最小值(或最大值)^[11]. 求解这类问题的方法主要分为直接法^[12,13]和间接法^[1,14]. 间接法通过应用变分法和极大值原理, 将原问题转化为两点边值问题或多点边值问题, 并采用单步或多步打靶法进行求解^[15]. 与直接法相比, 间接法能够确保满足一阶最优性条件, 通常能够获得更优的解. 此外, 间接法可以提供有关最优控制结构的深入理解, 以便设计更合理的优化策略^[16,17]. 然而, 间接法存在着较强的初值敏感性, 且协态变量缺乏明确的物理意义和范围约束, 难以给出收敛域内的初值猜测^[18,19].

在燃料最优问题中, 不光滑的Bang-Bang控制使得间接法打靶方程的初值敏感性进一步增加. 为解决这一问题, Bertrand和Epenoy^[20]通过在性能指标中添加二次或者对数摄动项的方式, 对燃料最优问题中的Bang-Bang控制平滑化, 有效减小了间接法对初值的依赖程度, 在轨迹优化领域得到了广泛应用^[18,21,22]. Taheri和Junkins^[23]提出了一种双曲正切平滑化方法, 直接对开关函数和推力之间的函数关系进行平滑处理, 该方法对间接法边值问题的推导构造过程没有影响, 具有更广泛的应用前景^[19].

Bang-Bang控制平滑化方法通常将平滑参数的起始值设置为一个较大的正数, 求解对应的轨迹优化问题, 然后通过数值延拓的方法将平滑参数逐渐减小到0, 从而得到原问题的燃料最优解. 通常来说, 平滑参数越大, Bang-Bang控制的平滑化程度越高, 控制律变化越平缓, 对应的问题越容易求解. 然而, 实际计算中发现, 当燃料最优轨迹中开机弧段所占比例较小时, 如果平滑参数起始值超过某个上限, 对应的问题无法得到收敛解, 导致后续的数值延拓过程无法进行. 为解决这一难题, 本文应用间接法将小推力轨迹优化问题建模为两点边值问题, 深入分析了4种常用的Bang-Bang控制平滑化形式中平滑参数的取值范围. 通过研究平滑参数对控制律的影响, 建立了平滑参数上限和到达给定末端状态所需最小推力幅值之间的关系. 基

于最小推力幅值, 给出了平滑参数是否存在上限的判断依据, 并推导出了4种平滑形式下平滑参数上限的计算式, 为平滑参数起始值的选取提供了参考依据.

2 小推力燃料最优轨迹优化

航天器在某一时刻的运动状态可以通过6个独立的变量进行描述, 常用的描述方法有直角坐标、柱坐标、球坐标、经典轨道根数和改进春分点轨道根数等, 其中改进春分点轨道根数无奇异点, 在大多数情况下相比其他描述方法具有更高的求解效率, 在连续推力轨迹优化中得到了广泛应用^[24,25]. 假设航天器仅受连续推力和中心天体引力的作用, 忽略其他摄动力的影响, 其动力学方程可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= u \frac{T_{\max}}{m} \mathbf{M}(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \mathbf{D}(\mathbf{x}), \\ \dot{m} &= -u \frac{T_{\max}}{I_{\text{sp}} g_0},\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = [p, f, g, h, k, L]^T$ 是改进春分点轨道根数, $T_{\max}$ 是最大推力幅值, $u \in [0, 1]$ 是实际推力与最大推力幅值的比值, m 是航天器的质量, $\mathbf{a}$ 是推力方向单位矢量, I_{sp} 是推进器的比冲, $g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$ 是地球海平面的平均重力加速度. 矩阵 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ 是推力对航天器状态的影响矩阵, 向量 $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ 是推力为0时航天器运动状态随时间的变化率, 具体形式见参考文献^[26].

为使燃料消耗最少, 小推力轨迹优化问题的性能指标可以表示为

$$J = \lambda_0 \frac{T_{\max}}{I_{\text{sp}} g_0} \int_{t_0}^{t_f} u dt, \quad (2)$$

其中, λ_0 是正的待定乘子, 用于将初始协态限制在一个高维的单位超球面上^[18]. 假设航天器的初末运动状态给定, 初始质量给定, 末端质量自由, 即

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad m(t_0) = m_0, \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad (4)$$

其中, t_0 和 t_f 分别为给定的初始和末端时刻. 因此, 燃料最优问题可以描述为: 通过优化转移过程中控制力的大小和方向, 在满足约束条件(3)和(4)的同时, 最小化性能指标(2)^[27].

引入改进春分点轨道根数描述下的状态协态 $\lambda_x = [\lambda_p, \lambda_f, \lambda_g, \lambda_h, \lambda_k, \lambda_L]$ 和质量协态 λ_m , 构造哈密顿函数

如下:

$$\begin{aligned} H &= \lambda_x^T \dot{\mathbf{x}} + \lambda_m \dot{m} + u \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \lambda_0 \\ &= u \frac{T_{\max}}{m} \lambda_x^T \mathbf{M} \mathbf{a} + \lambda_x^T \mathbf{D} - u \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \lambda_m + u \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \lambda_0. \end{aligned} \quad (5)$$

为最小化哈密顿函数, 控制律应取为^[28]

$$\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{M}^T \lambda_x}{\|\mathbf{M}^T \lambda_x\|}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} u = 0, & \text{if } \rho < 0, \\ u = 1, & \text{if } \rho > 0, \\ u \in [0, 1], & \text{if } \rho = 0, \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\|\mathbf{x}\|$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 的2-范数, 开关函数 ρ 的形式为

$$\rho = 1 - \frac{I_{sp} g_0}{\lambda_0 m} \|\mathbf{M}^T \lambda_x\| - \frac{\lambda_m}{\lambda_0}. \quad (8)$$

协态变量需要满足的微分方程称为欧拉-拉格朗日方程, 其形式为

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{u T_{\max}}{m} \frac{\partial (\lambda_x^T \mathbf{M} \mathbf{a})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial (\lambda_x^T \mathbf{D})}{\partial \mathbf{x}}, \\ \dot{\lambda}_m &= -\frac{\partial H}{\partial m} = -\frac{u T_{\max}}{m^2} \|\mathbf{M}^T \lambda_x\|. \end{aligned} \quad (9)$$

航天器末端时刻的质量 $m(t_f)$ 自由, 对应的末端横截条件为

$$\lambda_m(t_f) = 0. \quad (10)$$

根据参考文献[18]中提出的初始协态归一化方法, 将数值乘子 λ_0 作为一个额外的打靶变量, 把 λ_0 , $\lambda_x(t_0)$ 和 $\lambda_m(t_0)$ 限制在一个8维的单位超球面上

$$\lambda_0^2 + \|\lambda_x(t_0)\|^2 + \lambda_m^2(t_0) - 1 = 0. \quad (11)$$

在初始状态和初始质量已知的情况下, 若初始协态给定, 则可以对动力学方程(1)和欧拉-拉格朗日方程(9)进行数值积分, 得到末端时刻的状态和协态. 因此, 最优控制问题转化为两点边值问题, 初始时刻的协态变量 $\lambda_x(t_0)$, $\lambda_m(t_0)$ 和归一化乘子 λ_0 可以通过求解由末端边界条件(4)、横截条件(10)和归一化条件(11)组成的打靶方程得到.

3 Bang-Bang控制平滑化方法

在燃料最优问题中, 假设开关函数只在有限个孤

立点处取0, 不存在奇异弧段, 最优控制律应为Bang-Bang控制的形式. Bang-Bang控制中推力始终在最小值和最大值之间切换, 使得动力学方程和欧拉-拉格朗日方程的右端项不连续、不光滑, Newton或Powell之类的迭代算法求解打靶方程具有很强的初值敏感性.

为解决这一问题, Bertrand和Epenoy^[20]通过对优化指标(2)添加一个二次摄动项

$$J = \lambda_0 \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \int_{t_0}^{t_f} [u - \varepsilon u(1 - u)] dt, \quad (12)$$

将燃料最优问题($\varepsilon = 0$)和能量最优问题($\varepsilon = 1$)联系起来. 在新的指标下, 最优控制量的大小为

$$u^{QS} = \begin{cases} 0, & \text{if } \rho > \varepsilon, \\ 1, & \text{if } \rho < -\varepsilon, \\ \frac{1}{2} - \frac{\rho}{2\varepsilon}, & \text{if } |\rho| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (13)$$

称作二次项平滑(Quadratic Smoothing, QS). 当平滑参数取不同的值时, 推力 u 和开关函数 ρ 之间的关系如图1所示. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 推力 u 在 $\rho = 0$ 附近会发生突变, 而当 $\varepsilon > 0$ 时, 推力 u 在 $-\varepsilon < \rho < \varepsilon$ 的区间内, 从1逐渐减小到0. 因此, 当 $\varepsilon > 0$ 时, 对应的最优控制问题通常具有连续的最优控制律. 随着平滑参数的减小, 推力 u 和开关函数 ρ 的关系逐渐逼近Bang-Bang控制.

除了像式(12)一样构建二次型的优化指标外, 还可以构建对数型的优化指标^[20]

$$J = \lambda_0 \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \int_{t_0}^{t_f} \{u - \varepsilon \ln[u(1 - u)]\} dt. \quad (14)$$

在此指标下, 最优控制量的大小为

$$u^{LS} = \frac{2\varepsilon}{\rho + 2\varepsilon + \sqrt{\rho^2 + 4\varepsilon^2}}, \quad (15)$$

称作对数平滑(Logarithmic Smoothing, LS), 其中 u 关于 ρ 始终连续且可导.

以上两种方法通过构建新的指标, 改变了推力 u 和开关函数 ρ 之间的关系, 实现了Bang-Bang控制平滑化. Taheri等人^[23,29]更进一步, 通过直接改变 u 和 ρ 之间的函数关系, 提出了另外两种Bang-Bang控制平滑化形式

$$u^{HTS} = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(-\frac{\rho}{\varepsilon} \right) \right], \quad (16)$$

$$u^{L2S} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2}} \right), \quad (17)$$

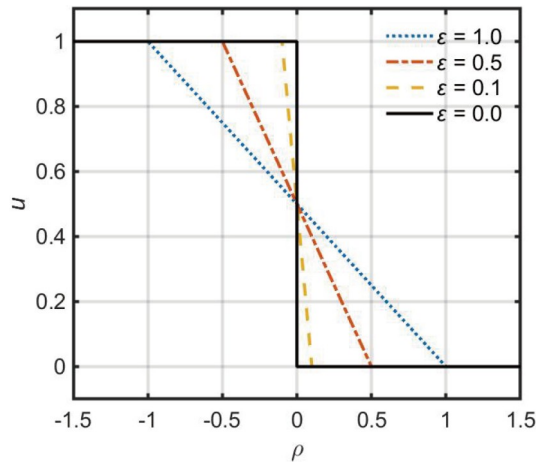


图 1 (网络版彩图)二次项平滑中平滑参数取不同值时推力与开关函数的关系

Figure 1 (Color online) The relationship between thrust ratio and switching function with different smoothing parameters in quadratic smoothing.

分别称作双曲正切平滑(Hyperbolic Tangent Smoothing, HTS)和L2平滑(L2 Smoothing, L2S).

虽然式(13)中的二次项平滑和式(15)中的对数平滑是通过相应的指标推导得出的,但它们也可以看作是直接改变了 u 和 ρ 之间的函数关系.因此,本文后续部分不再从指标形式上研究二次项平滑和对数平滑,而是从平滑化的角度统一对上述4种平滑化形式进行分析.当 $\varepsilon = 0.1$ 时,不同平滑化形式中开关函数与推力的关系如图2所示,可以看出,在相同的平滑参数下,对数平滑相较于其他3种平滑化形式,对Bang-Bang控制的平滑化程度更高.

在二次项平滑中,平滑参数 $\varepsilon = 1$ 对应能量最优问题,具有连续光滑的控制律,相较于燃料最优问题更易求解.因此,在二次项平滑中,通常将平滑参数的起始值设为 $\varepsilon_0 = 1$,先求解能量最优问题,然后逐步减小平滑参数,最终得到燃料最优问题($\varepsilon = 0$)的解.类似地,在其他3种平滑化形式中,也通常将平滑参数的起始值设为 $\varepsilon_0 = 1$,并逐步减小到0.然而, $\varepsilon = 1$ 对应的轨迹优

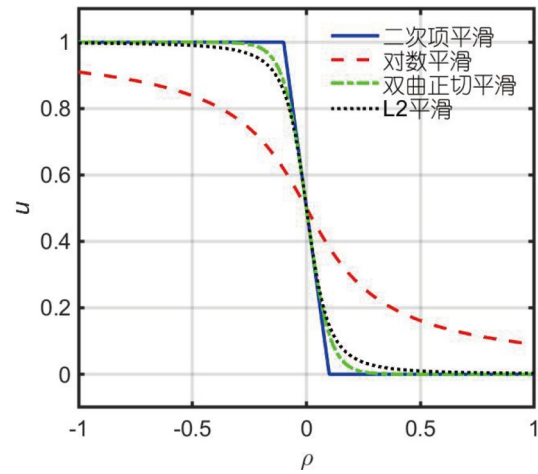


图 2 (网络版彩图) $\varepsilon = 0.1$ 时不同平滑化形式中推力与开关函数的关系

Figure 2 (Color online) The relationship between thrust ratio and switching function in different smoothing forms when $\varepsilon = 0.1$.

化问题是否存在收敛解,仍是不确定的.如果该问题不收敛,则后续的数值延拓过程将无法进行.因此,有必要对平滑参数的取值范围进行更深入的研究.

以地球到金星的交会问题为例,假设航天器从地球出发时与地球具有相同的日心位置和速度,到达金星时与金星具有相同的日心位置和速度,航天器仅受太阳的中心引力和连续推力作用,忽略其他摄动力的影响^[30].该算例的参数设置和文献[18]相同,任务时间为1000 d,航天器初始质量为 $m_0 = 1500$ kg,推进系统比冲为 $I_{sp} = 3800$ s,最大推力幅值为 $T_{max} = 0.33$ N.在数值仿真中,长度归一化单位为天文单位($1 \text{ AU} = 1.49597870691 \times 10^{11} \text{ m}$),时间归一化单位为半径1 AU日心圆轨道周期的 $1/(2\pi)$,质量归一化单位为航天器的初始质量.航天器的初末位置和速度根据文献[18]设置,并转换为无量纲化的改进春分点轨道根数,如表1所示.根据文献[18],当航天器在飞行过程中转过的圈数为3时,消耗的燃料最少,因此,表1中将末端边界条件中的真经度 L 转换到 $[6\pi, 8\pi]$ 中.

表 1 地球到金星交会问题的边界条件

Table 1 The boundary conditions in the Earth-Venus rendezvous problem

天体	p (AU)	f	g	h	k	L
地球	1.000	-0.00316	0.0167	7.08×10^{-6}	2.59×10^{-6}	0.240
金星	0.723	-0.00450	0.00505	0.00684	0.0288	20.895

以二次项平滑为例, 将平滑参数设置为不同的值, 分别求解该轨迹优化问题, 对应的控制律如图3所示. 当平滑参数较大时, 推力在整个转移过程中的变化幅度很小. 随着平滑参数的减小, 控制律逐渐逼近Bang-Bang控制. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 燃料最优问题的控制律呈现出明显的开关机切换特征, 共包含6个关机段和6个开机段, 其转移轨迹如图4所示, 其中红色曲线为开机弧段, 蓝色曲线为关机弧段.

以0.1的步长对平滑参数进行离散, 计算平滑参数取不同值时的燃料消耗, 结果如图5所示, 随着平滑参数 ε 的减小, 燃料消耗逐渐减少. 图5仅展示了平滑参数在0.0–3.2间的计算结果, 当 $\varepsilon \geq 3.3$ 时, 该轨迹优化问题

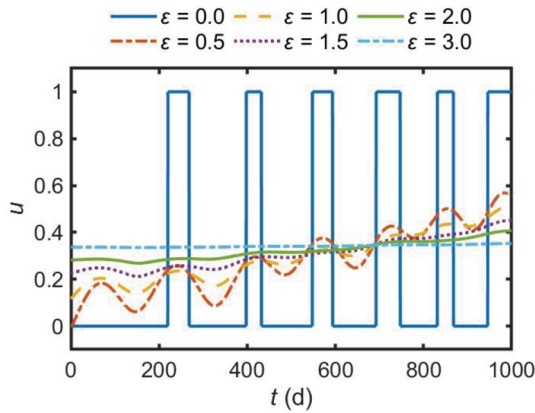


图3 (网络版彩图)平滑参数取不同值时推力随时间的变化曲线

Figure 3 (Color online) The thrust variation curves over time with different smoothing parameters.

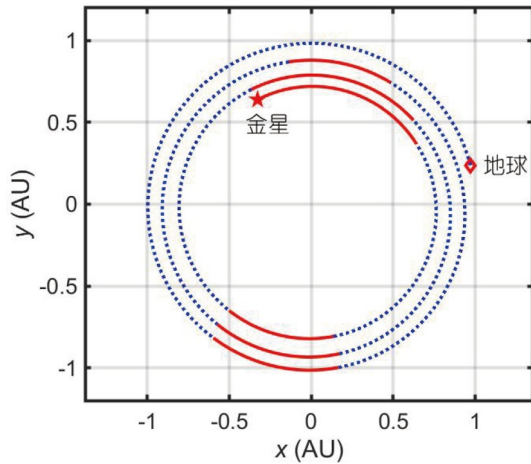


图4 (网络版彩图)地球到金星燃料最优交会转移轨迹

Figure 4 (Color online) The fuel-optimal trajectory of the Earth-Venus rendezvous problem.

无法得到收敛解. 为研究这一现象的原因, 对 $\varepsilon = 3.2$ 的结果进行了详细分析, 其开关函数、推力、协态随时间的变化曲线如图6所示. 转移过程中 ρ 始终在1附近, u 始终维持在0.344左右, 对应推力约为0.11352 N, 协态的值始终接近于0. 根据文献[31–33], 为了在指定时间到达给定的末端状态, 存在一个最小推力幅值 $T_{\min}$.

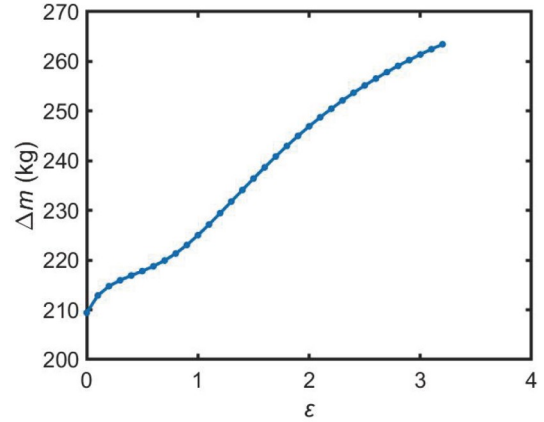


图5 (网络版彩图)燃料消耗随平滑参数的变化曲线

Figure 5 (Color online) The relationship between fuel consumption and smoothing parameters.

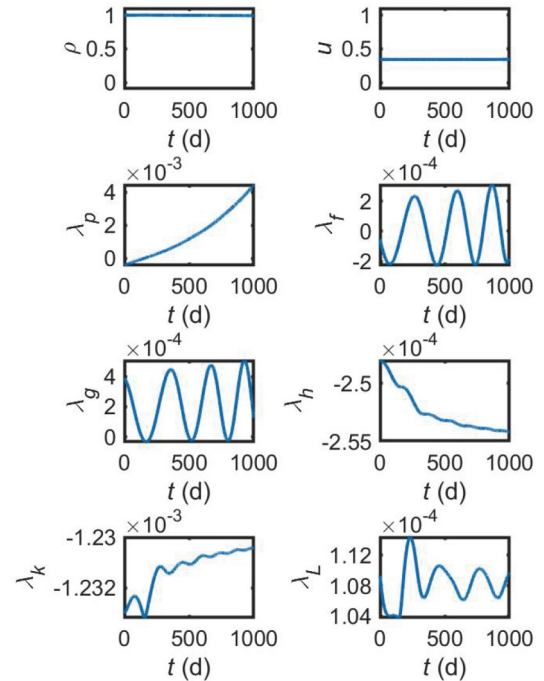


图6 (网络版彩图) $\varepsilon = 3.2$ 时开关函数、推力、协态随时间的变化曲线

Figure 6 (Color online) The switching function, thrust ratio, and costate variation curves over time when $\varepsilon = 3.2$.

在此推力幅值下, 发动机必须全程满开, 以满足末端状态约束. 根据图6中推力大小在转移过程中几乎不变的特性, 可推测该推力可能等于实现交会所需的最小推力幅值 $T_{\min}$, 后续章节将对此进行深入分析.

4 最小推力幅值问题

本节研究如何求解从固定初始状态经固定时间到达给定末端状态所需的最小推力幅值. 最优控制问题的性能指标通常是某个物理量在过程中的积分或在末端时刻的取值, 采用常规方法难以求解以某个参数为优化指标的最优控制问题. 因此, 本节提出一种特殊的处理方法, 将推力幅值 T 额外作为一个状态变量, 并规定其导数为0. 这一操作并不改变问题本质, 同时可以将末端时刻的推力幅值 $T(t_f)$ 当作优化指标, 从而把最小推力幅值问题建模为常规的最优控制问题^[34]. 此时, 最小推力幅值问题的动力学方程可以写为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= u \frac{T}{m} \mathbf{M}(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \mathbf{D}(\mathbf{x}), \\ \dot{m} &= -u \frac{T}{I_{sp} g_0}, \\ \dot{T} &= 0.\end{aligned}\quad (18)$$

边界条件仍然为式(3)和(4), 优化指标为

$$J = \lambda_0 T(t_f). \quad (19)$$

建立哈密顿函数

$$H = \lambda_x^T \dot{\mathbf{x}} + \lambda_m \dot{m}, \quad (20)$$

最优控制律的形式仍为式(6)和(7), 但开关函数变为

$$\rho = -\frac{I_{sp} g_0}{m} \|\mathbf{M}^T \lambda_x\| - \lambda_m. \quad (21)$$

状态协态和质量协态的微分方程仍为式(9), 推力协态 λ_T 的微分方程为

$$\dot{\lambda}_T = -\frac{\partial H}{\partial T} = -\frac{u}{I_{sp} g_0} \rho. \quad (22)$$

由于初始时刻的推力自由, 对应的横截条件为初始时刻的推力协态为0

$$\lambda_T(t_0) = 0. \quad (23)$$

末端时刻推力协态对应的横截条件为

$$-\lambda_T(t_f) + \lambda_0 = 0. \quad (24)$$

应用参考文献[18]中提出的初始协态归一化方法, 将数值乘子 λ_0 作为一个额外的打靶变量, 把 λ_0 和初始协态限制在一个高维的单位超球面上

$$\lambda_0^2 + \|\lambda_x(t_0)\|^2 + \lambda_m^2(t_0) - 1 = 0. \quad (25)$$

因此, 最小推力幅值问题的打靶变量为 $\lambda_x(t_0)$, $\lambda_m(t_0)$, $T(t_0)$, λ_0 , 待求解的打靶方程由式(4), (10), (24)和(25)组成.

该问题中末端质量协态 $\lambda_m(t_f)$ 为0, 且质量协态的导数始终小于0, 因此, 整个过程中的质量协态始终大于或等于0, 则式(21)中的开关函数一直小于0, 即在最小推力幅值问题中, 发动机始终满开.

考虑参考文献[35]中提出的简化的初始协态归一化方法, 将质量协态从求解过程中剔除, 同时使用简化的归一化条件

$$\|\lambda_x(t_0)\|^2 - 1 = 0, \quad (26)$$

代替式(24)来约束初始时刻协态变量的大小, 进一步缩小初值猜测的范围. 因此, 打靶变量仅剩 $\lambda_x(t_0)$ 和 $T(t_0)$, 打靶方程为式(4)和(26). 在得到打靶方程的解之后, $T(t_0)$ 即为转移所需的最小推力幅值 $T_{\min}$.

5 平滑参数上限与最小推力幅值间的关系

在燃料最优问题中, 式(8)中的开关函数 ρ 始终不超过1, 则在二次项平滑中, u 始终满足

$$u \geq u_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varepsilon}. \quad (27)$$

如果 $u_{\min} T_{\max} = T_{\min}$, 为了在指定时间到达给定的末端状态, 推力必须始终保持为 $T_{\min}$, 则开关函数 ρ 始终为1, 7个协态变量的值在转移过程中始终为0. 此时, 式(6)中的推力方向奇异, 对应的打靶方程无法得到收敛解. 因此, 平滑参数的选取应满足

$$u_{\min} T_{\max} \leq T_{\min} \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{1}{1 - 2(T_{\min}/T_{\max})}, \quad (28)$$

记

$$\delta = T_{\min} / T_{\max}, \quad (29)$$

则式(28)可以简写为

$$\varepsilon \leq \frac{1}{1 - 2\delta}, \quad (30)$$

该关系式表明, 二次项平滑中平滑参数存在一个上限

$$\varepsilon_{\max}^{\text{QS}} = \frac{1}{1-2\delta}. \quad (31)$$

当 $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ 时, 无法得到收敛解. 采用第4节的方法求解第3节中地球到金星交会问题所需的最小推力幅值, 计算结果为 $T_{\min} = 0.113704 \text{ N}$, $\delta = 0.344556$, 因此, 该问题中平滑参数的上限为 $\varepsilon_{\max} = 3.216597$, 与第3节数值计算的结果相符.

和二次项平滑类似, 其他3种平滑化形式的平滑参数均存在上限, 其表达式分别为

$$\varepsilon_{\max}^{\text{LS}} = \frac{\delta - \delta^2}{1 - 2\delta}, \quad (32)$$

$$\varepsilon_{\max}^{\text{HTS}} = \frac{2}{\ln[(1-\delta)/\delta]}, \quad (33)$$

$$\varepsilon_{\max}^{\text{L2S}} = \sqrt{\left(\frac{1}{1-2\delta}\right)^2 - 1}. \quad (34)$$

4种平滑化形式中平滑参数上限 $\varepsilon_{\max}$ 和 δ 之间的关系如图7所示. 当 $0 < \delta < 0.5$ 时, $\varepsilon_{\max}$ 都随着 δ 的增大而增大, 且当 δ 接近0.5时, $\varepsilon_{\max}$ 趋向于无穷大. 当 $\delta \geq 0.5$ 时, 根据式(27), 始终有 $u_{\min} T_{\max} < 0.5 T_{\max} \leq \delta T_{\max}$, 因此平滑参数不存在上限, 无论平滑参数取多大都可以得到收敛解.

从图7中的局部放大图可以看出, 当 δ 接近0时, 二次项平滑的 $\varepsilon_{\max}$ 趋向于1, 而其他3种平滑化形式的 $\varepsilon_{\max}$ 趋向于0. 因此, 在二次项平滑中, 始终有 $\varepsilon_{\max} \geq 1$, 无论 δ 的值为多少, 将平滑参数起始值设置为1总能得到收敛解. 然而, 在其他3种平滑化形式中, 当 δ 较小时, $\varepsilon_{\max}$ 可能小于1. 如果仍然把平滑参数初始值设为 $\varepsilon_0 =$

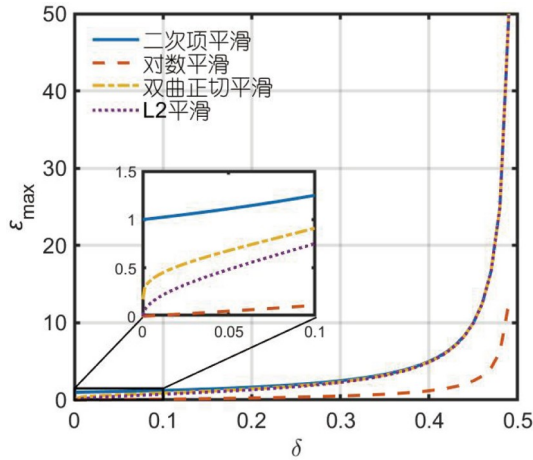


图7 (网络版彩图) 不同平滑化形式下 $\varepsilon_{\max}$ 和 δ 的关系

Figure 7 (Color online) The relationship between $\varepsilon_{\max}$ and δ in different smoothing forms.

1, 则无法得到收敛解. 因此, 在对数、双曲正切和L2三种平滑化形式中, 对于每个特定问题, 都需要计算到达指定末端状态所需的最小推力幅值, 以确定平滑参数的上限 $\varepsilon_{\max}$, 并选取合适的平滑参数起始值.

将4种平滑化形式的平滑参数分别设置为 $\varepsilon = 0.99\varepsilon_{\max}$, 求解对应的打靶方程, 转移过程中推力随时间的变化曲线如图8所示. 可以看出, 当平滑参数接近上限时, 4种平滑化形式的推力都始终保持在 $T_{\min} = 0.113704 \text{ N}$ 附近, 进一步验证了式(31)–(34)的正确性.

将原问题的推力幅值更改为 $T_{\max} = 0.2 \text{ N}$, 其他条件保持不变, 此时 $\delta = T_{\min}/T_{\max} = 0.568518 > 0.5$, 平滑参数不存在上限, 平滑参数取任意大的正数, 都可以得到

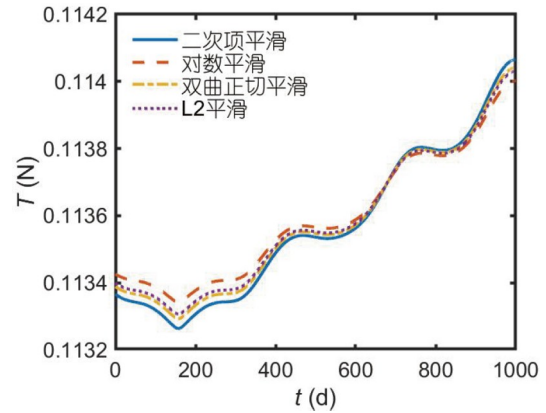


图8 (网络版彩图) 4种平滑化形式下 $\varepsilon = 0.99\varepsilon_{\max}$ 时推力随时间的变化曲线

Figure 8 (Color online) The thrust variation curves over time with $\varepsilon = 0.99\varepsilon_{\max}$ in four smoothing forms.

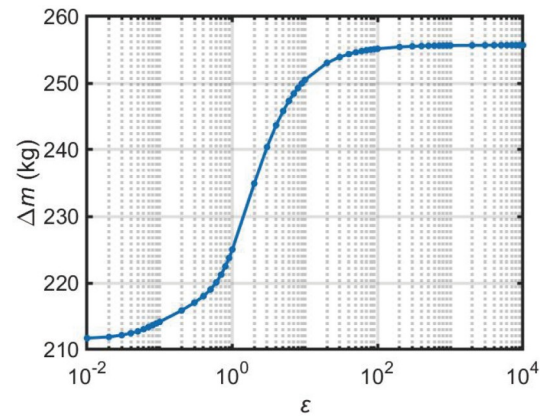


图9 (网络版彩图) $T_{\max} = 0.2 \text{ N}$ 时燃料消耗随平滑参数的变化曲线

Figure 9 (Color online) The relationship between fuel consumption and smoothing parameters when $T_{\max} = 0.2 \text{ N}$.

打靶方程的收敛解. 以二次项平滑为例, 图9中给出了平滑参数 ϵ 取不同值时的燃料消耗, 随着平滑参数的增大, 燃料消耗逐渐增加. 当平滑参数超过1000时, 仍能得到对应问题的收敛解, 且燃料消耗逐渐趋于稳定, 保持在255.7 kg左右.

6 结论

本文研究了小推力轨迹优化中的Bang-Bang控制平滑化方法, 通过探讨平滑参数对控制律的影响, 深入

分析了二次项、对数、双曲正切和L2四种平滑化形式中平滑参数的取值范围. 通过求解到达目标状态所需的最小推力幅值, 给出了平滑参数是否存在上限的判断依据, 并推导出了4种平滑形式下平滑参数上限的计算式, 为平滑参数起始值的设置提供了参考依据. 在二次项平滑中, 各种情况下将平滑参数起始值设为1均能得到收敛解. 然而, 在其他3种平滑化形式中, 对于每个具体问题, 需要计算到达指定末端状态所需的最小推力幅值, 以确定平滑参数的上限, 从而选取合适的平滑参数起始值.

参考文献

- Li J F, Jiang F H. Survey of low-thrust trajectory optimization methods for deep space exploration (in Chinese). *Mech Eng*, 2011, 33: 1–6 [李俊峰, 蒋方华. 连续小推力航天器的深空探测轨道优化方法综述. *力学与实践*, 2011, 33: 1–6]
- Li J F, Baoyin H X, Jiang F H. *Dynamics and Control of Interplanetary Flight* (in Chinese). Beijing: Tsinghua University Press, 2014 [李俊峰, 宝音贺西, 蒋方华. 深空探测动力学与控制. 北京: 清华大学出版社, 2014]
- Fujiwara A, Kawaguchi J, Yeomans D K, et al. The rubble-pile asteroid itokawa as observed by Hayabusa. *Science*, 2006, 312: 1330–1334
- Rayman M D, Frascetti T C, Raymond C A, et al. Dawn: A mission in development for exploration of main belt asteroids Vesta and Ceres. *Acta Astronaut*, 2006, 58: 605–616
- Tsuda Y, Yoshikawa M, Abe M, et al. System design of the Hayabusa 2—Asteroid sample return mission to 1999 JU3. *Acta Astronaut*, 2013, 91: 356–362
- Cheng A F, Rivkin A S, Michel P, et al. AIDA DART asteroid deflection test: Planetary defense and science objectives. *Planet Space Sci*, 2018, 157: 104–115
- Oleson S R, Myers R M, Kluever C A, et al. Advanced propulsion for geostationary orbit insertion and north-south station keeping. *J Spacecr Rockets*, 1997, 34: 22–28
- Kluever C A. Low-thrust guidance for geocentric transfers using single-rotation-axis steering. *J Guid Control Dyn*, 2022, 45: 1927–1933
- Hu Z, Wang M, Yuan J G. A review of the development of all-electric propulsion platform in the world (in Chinese). *Spacecr Environ Eng*, 2015, 32: 566–570 [胡照, 王敏, 袁俊刚. 国外全电推进卫星平台的发展及启示. *航天器环境工程*, 2015, 32: 566–570]
- Chi Z M, Li J F, Jiang F H, et al. Survey of variable-specific-impulse continuous low-thrust trajectory optimization methods (in Chinese). *Flight Control Detect*, 2020, 3: 58–67 [迟哲敏, 李俊峰, 蒋方华, 等. 变比冲连续小推力轨迹优化方法综述. *飞控与探测*, 2020, 3: 58–67]
- Huang G Q, Lu Y P, Nan Y. A survey of numerical algorithms for trajectory optimization of flight vehicles (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2012, 42: 1016–1036 [黄国强, 陆宇平, 南英. 飞行器轨迹优化数值算法综述. *中国科学: 技术科学*, 2012, 42: 1016–1036]
- Wang X S, Peng Y M, Lu X, et al. Design and optimization of low thrust transfer trajectory for engineering constraints (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2019, 49: 084509 [王旭生, 彭玉明, 陆希, 等. 面向工程约束的小推力转移轨道设计与优化. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2019, 49: 084509]
- Shirazi A. Minimum-fuel low-thrust trajectory optimization via a direct adaptive evolutionary approach. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2024, 60: 1319–1333
- Betts J T. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *J Guid Control Dyn*, 1998, 21: 193–207
- Huang J C, Li X Y, Qiao D, et al. Mission design for multi-target and multi-mode rendezvous missions to small bodies (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2019, 49: 084512 [黄江川, 李翔宇, 乔栋, 等. 小天体多目标多模式探测任务设计. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2019, 49: 084512]
- Morante D, Sanjurjo Rivo M, Soler M. A survey on low-thrust trajectory optimization approaches. *Aerospace*, 2021, 8: 88
- You S, Dai R, Rea J R. Theoretical analysis of fuel-optimal powered descent problem with state constraints. *J Guid Control Dyn*, 2022, 45: 2350–

2359

- 18 Jiang F, Baoyin H, Li J. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach. *J Guid Control Dyn*, 2012, 35: 245–258
- 19 Jawaharlal Ayyanathan P, Taheri E. Mapped adjoint control transformation method for low-thrust trajectory design. *Acta Astronaut*, 2022, 193: 418–431
- 20 Bertrand R, Epenoy R. New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems—Numerical results and statistical interpretation. *Optim Control Appl Methods*, 2002, 23: 171–197
- 21 Haberkorn T, Martinon P, Gergaud J. Low thrust minimum-fuel orbital transfer: A homotopic approach. *J Guid Control Dyn*, 2004, 27: 1046–1060
- 22 Sun P, Yang H W, Li S. Convergence properties analysis of the indirect optimization techniques for solar sail trajectory optimization (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2019, 49: 084505 [孙盼, 杨洪伟, 李爽. 太阳帆轨迹间接优化技术收敛性分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 084505]
- 23 Taheri E, Junkins J L. Generic smoothing for optimal Bang-off-Bang spacecraft maneuvers. *J Guid Control Dyn*, 2018, 41: 2470–2475
- 24 Walker M J H, Ireland B, Owens J. A set modified equinoctial orbit elements. *Celest Mech*, 1985, 36: 409–419
- 25 Junkins J L, Taheri E. Exploration of alternative state vector choices for low-thrust trajectory optimization. *J Guid Control Dyn*, 2019, 42: 47–64
- 26 Betts J T. Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method. *J Comput Appl Math*, 2000, 120: 27–40
- 27 Guo X, Wu D, Jiang F. Costate scaling method for Mayer-form multirendezvous trajectory optimization problem. *J Spacecr Rockets*, 2024, 61: 878–888
- 28 Lewis F L, Vrabie D, Syrmos V L. Optimal Control. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2012
- 29 Taheri E, Li N. L2 norm-based control regularization for solving optimal control problems. *IEEE Access*, 2023, 11: 125959–125971
- 30 Cai X S, Chen Y, Li J F. Low-thrust trajectory optimization in a full ephemeris model. *Acta Mech Sin*, 2014, 30: 615–627
- 31 Zhu Z, Gan Q, Yang X, et al. Solving fuel-optimal low-thrust orbital transfers with Bang-Bang control using a novel continuation technique. *Acta Astronaut*, 2017, 137: 98–113
- 32 Taheri E, Junkins J L. How many impulses redux. *J Astronaut Sci*, 2020, 67: 257–334
- 33 Li T, Wang Z, Zhang Y. A homotopy approach connecting time-optimal with fuel-optimal trajectories. *Astrophys Space Sci*, 2021, 366: 11
- 34 Jawaharlal Ayyanathan P, Taheri E. Reduced desensitization formulation for optimal control problems. *J Astronaut Sci*, 2024, 71: 21
- 35 Guo X, Wu D, Jiang F. Minimum-time rendezvous *via* simplified initial costate normalization and auxiliary orbital transfer. *J Guid Control Dyn*, 2023, 46: 1627–1636

Upper bound analysis of smoothing parameter in the smoothing method for minimum-fuel low-thrust trajectory optimization

GUO Xiang, WU Di & JIANG FangHua^{*}

School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China

**Corresponding author (email: jiangfh@tsinghua.edu.cn)*

The optimal control law for minimum-fuel low-thrust trajectories exhibits Bang-Bang characteristics, leading to high numerical sensitivity and convergence difficulties in trajectory optimization problems. The smoothing method introduces a smoothing parameter to approximate the Bang-Bang control with a continuous optimal control law, enhancing the convergence probability of the trajectory optimization problem. By gradually reducing the smoothing parameter from a larger positive value to zero through numerical continuation, the minimum-fuel solution to the original problem can be obtained. However, in some cases, if the starting value of the smoothing parameter exceeds a certain upper bound, the corresponding problem cannot achieve convergence, hindering the subsequent numerical continuation process. To address this issue, this work employs the indirect method to model the minimum-fuel low-thrust trajectory optimization problem as a two-point boundary value problem. We introduce four common smoothing forms for Bang-Bang control and conduct an in-depth analysis of the upper bound of the smoothing parameter. By studying the impact of the smoothing parameter on the control law, the relationship between the upper bound of the smoothing parameter and the minimum thrust magnitude required to reach the given terminal state is established. Based on the minimum thrust magnitude, criteria for determining the existence of an upper bound is provided, and formulas for calculating the upper bounds in four smoothing forms are derived, providing a reference for selecting the starting value of the smoothing parameter.

low thrust, trajectory optimization, smoothing method, Bang-Bang control

PACS: 02.60.Pn, 02.30.Xx, 95.10.Ce, 91.10.Sp

doi: [10.1360/SSPMA-2024-0222](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0222)