



航天器单脉冲机动可达域几何表征与快速计算

钟涵奇, 杨彬, 谢任远, 邵长宝, 周洪刚, 李爽*

南京航空航天大学航天学院, 南京 210016

*联系人, E-mail: lishuang@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2024-09-10; 接受日期: 2024-12-13; 网络出版日期: 2025-07-22

江苏省自然科学基金(编号: BK20241371)、中国博士后科学基金(编号: 2022M721600)、江苏省“卓博计划”(编号: 2022ZB227)、空间智能控制技术全国重点实验室开放基金(编号: HTKJ2024KL502001)、中国航天科技集团公司第八研究院产学研合作基金资助项目(编号: SAST2023-044)和国防基础科研计划(编号: JCKY2023605C006)资助项目

摘要 可达域是未来在轨服务和空间碎片清除等多目标交会任务进行目标筛选的有效手段. 针对固定时间可达域包络时间敏感、计算负担重等问题, 提出一种基于几何特征参数的可达域表征与快速计算方法. 首先, 通过蒙特卡罗仿真进行航天器单脉冲可达域包络特征参数关于机动参数和传播时间的敏感性分析; 其次, 结合敏感性分析结果, 提出一种新的航天器脉冲机动可达域包络几何特征参数表征方法; 最后, 引入深度神经网络, 建立机动参数与包络几何特征参数的网络映射, 解决现有数值方法计算效率和精度之间的固有矛盾, 实现了航天器单脉冲固定时间可达域的快速高精度计算. 仿真结果表明, 所提方法与蒙特卡罗的计算结果吻合良好, 且计算效率大幅提升.

关键词 可达域, 脉冲机动, 几何特征, 深度神经网络

PACS: 91.10.Sp, 96.15.De, 07.05.Mh, 02.60.Ed

1 引言

随着航天技术的飞速发展和发射活动频次的急剧增加, 空间碎片的数量呈指数级增加, 航天器的在轨安全面临着日益严峻的威胁. 面对数量众多且分布广泛的空间碎片, 如何根据任务星的有限机动能力筛选出可达目标集和访问序列是空间碎片多目标交会任务首要解决的问题. 可达域是多目标交会任务中进行目标筛选的重要手段, 高效精准的可达域计算能够有效地提升多目标交会目标筛选和访问序列优化的结果.

可达域是指航天器在给定机动能力和任务时间的约束下, 航天器进行机动后能够到达的空间位置集合^[1]. 根据时间约束, 可达域计算进一步细分为时间自由与固定时间可达域两类. 时间自由可达域主要应用于碰撞风险评估等定性分析^[2], 而固定时间可达域则多用于多目标轨迹优化的目标筛选等定量解算^[3].

利用包络面性质求解机动可达域的方法, 能够缩小解空间, 提升求解效率, 在时间自由可达域计算领域备受青睐^[4-6]. Vinh等人^[7]最早提出采用包络面表征可达域, 实现双曲线速度下拦截器的求解. Xue等人^[8]

引用格式: 钟涵奇, 杨彬, 谢任远, 等. 航天器单脉冲机动可达域几何表征与快速计算. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2025, 55: 294503

Zhong H Q, Yang B, Xie R Y, et al. Geometric characterization and rapid computation method for reachable domain of spacecraft with single impulse (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2025, 55: 294503, doi: 10.1360/SSPMA-2024-0388

提出平面与曲面组合成空间包络的方式, 给出多种情况下航天器单脉冲可达域包络求解方法. Wen等人^[9]将可达域求解问题转换为可达方向上极大极小可达距求解. 在此基础上, Du和Yang^[10]优化极值求解流程, 有效提升可达方向极值的求解效率. 航天器固定时间可达域的包络与时间密切相关, 呈现动态时变和强非线性特征, 使得包络面表征和求解难度极大.

当前固定时间可达域求解主要分为极值优化法^[11-16]与不确定性传播法^[17,18]. Holzinger和Scheres^[19]拓展可达集至非线性系统, 利用相对运动模型传播初始航天器速度不确定性, 通过优化方法求解固定时间相对标称位置可达距极值得到固定时间可达域. 优化方法求解固定时间可达域时仍需通过大量数值积分解算包络面, 导致计算效率低. 不确定性传播方法将航天器单脉冲机动建模为初始速度不确定性, 通过不确定性传播确定末端可达域. Wen等人^[20-22]利用相对动力学模型传播轨道不确定性, 并将可达域定义为位置不确定性扫过区域. Wang和Jiang^[23]基于TH方程, 提出由椭圆近似包络面的方法, 但随传播时间延长, 可达域外包络不规则性使得协方差椭圆难以准确描述可达域包络实际形状.

综上所述, 针对现有固定时间可达域的优化求解方法计算效率难以满足多目标优化计算效率要求, 不确定性传播计算方法难以准确表征固定时间可达域外包络不规则形状的问题, 本文提出一种航天器单脉冲机动可达域包络几何表征与快速计算方法. 首先, 本文研究包络面几何特征关于机动参数和传播时间的敏感性, 给出了包络面形状和旋转角等特征参数的主要影响因素. 其次, 结合敏感性分析结论, 将包络面形状特征与旋转角特征解耦处理以降低可达域包络面几何表征复杂度, 进而构建固定时间可达域包络面几何表征模型. 最后, 引入深度神经网络构建敏感参数与几何特征间的非线性映射, 实现脉冲机动固定时间可达域的快速计算, 并通过GEO轨道可达域的仿真结果验证本文所提方法有效性和性能优势.

2 固定时间可达域几何特征敏感性分析

2.1 可达域计算方法

航天器单脉冲初始时刻位置速度记 $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$. 航天器采用脉冲方式进行机动, 机动前后的状态变化如式(1)

所示:

$$\begin{cases} \mathbf{r}^+ = \mathbf{r}^-, \\ \mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \Delta\mathbf{v}, \end{cases} \quad (1)$$

式中, 上标“-”与“+”分别表示机动前、后状态, $\Delta\mathbf{v}$ 为脉冲机动施加的速度增量矢量.

初始速度增量建模为速度机动球, 由机动方向、机动速度增量幅值表示^[24]:

$$\Delta\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta v \cos\beta \cos\alpha \\ \Delta v \cos\beta \sin\alpha \\ \Delta v \sin\beta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中, α 与 β 分别表示速度增量在轨道面内的方位角与面外的俯仰角, Δv 为速度增量幅值.

航天器满足动力学模型一般形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{f}_p \end{cases} \quad (3)$$

式中, μ 是地球引力常数, $\mathbf{f}_p$ 是摄动力.

速度增量幅值取最大值, 并对速度增量的方位角和俯仰角进行采样, 分别将机动后轨道传播至 t 时刻, 组成末端位置空间点集合, 即单脉冲固定时间 t 时刻可达域. 对于任一采样点, 其末端位置表示为

$$\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t, \Delta v, \alpha, \beta), \quad (4)$$

式中, t 是传播时间.

GEO轨道的典型固定时间可达域外包络如图1所示, 不同时刻的可达域包络变化包括长轴相对参考轨道的旋转和包络形状的变化. 因此, 本文引入长轴旋转角和包络形状参数等几何特征描述固定时间可达域

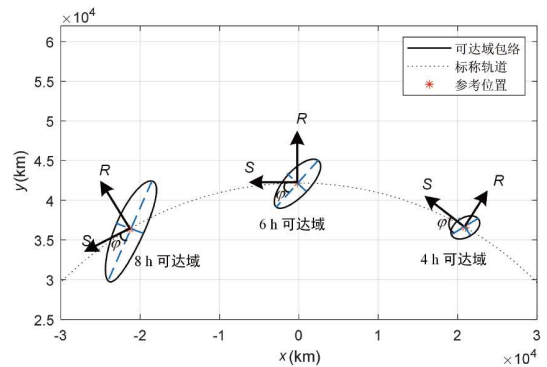


图 1 (网络版彩图)航天器固定时间可达域包络变化示意
Figure 1 (Color online) Illustration of reachable domain variation.

的变化. 需指出的是, 本文所描述可达域外包络均在标称位置 RSW 坐标系下描述, R 轴为地心指向标称位置方向, W 轴为轨道面法向, RSW 三轴组成右手坐标系.

2.2 可达域包络几何特征敏感性分析

对于给定的初始状态, 转移轨道末端位置是传播时间 t 与机动速度参数 Δv , α , β 的函数. 固定时间可达域外包络是不同方向速度增量机动后的末端位置集合, 其包络形状和位置分布由传播时间和机动速度增量幅值决定^[4], 即固定时间可达域包络是关于传播时间和最大机动速度敏感的不规则形状.

2.2.1 长轴旋转角特征

首先, 分析传播时间对长轴旋转角的影响, 如图2所示, 初始时刻标称轨道上 A 点进行单脉冲机动, 速度增量在速度方向 v_A 的投影为负(如 Δv_2), 则机动后的轨道半长轴小于标称轨道, 轨道周期减小, 轨道角速度增大. 轨道演化相同时间后, Δv_2 对应转移轨道末端位置 B_2 在标称点 B 运动方向下方, 反之在后上方(如 B_1). 因此在初始速度影响下, 如图中 BB_2 , 可达域包络椭圆长轴并非与速度方向平行, 而相对于速度方向旋转角度 φ .

分别计算GEO轨道速度上限 $\Delta v_{\max} = 50$ m/s, 传播时间 $t = T/4, T/2, T$ 航天器可达域在标称轨道相对坐标系轨道面内投影如图3所示, 随传播时间延长, 包络形状从 $T/4$ 时刻椭圆形沿长轴拉长, 演变为弯曲绳形, 最终形成标称轨迹附近一段区域包络.

进一步地分析机动速度增量幅值对长轴旋转角的影响. 分别计算GEO轨道单脉冲速度增量上限 $\Delta v_{\max} = 25, 50, 75, 100$ m/s, 演化四个周期内旋转角变化趋势

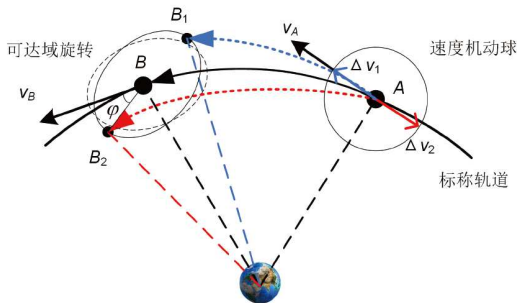


图 2 (网络版彩图)可达域旋转示意

Figure 2 (Color online) Illustration of reachable domain rotation.

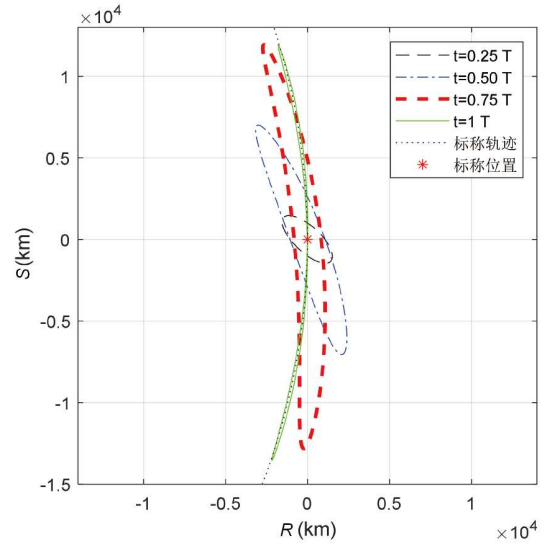


图 3 (网络版彩图)相同速度增量上限, 不同传播时间可达域

Figure 3 (Color online) Reachable domain with the same velocity increment limit for different propagation times.

如图4所示, 不同 $\Delta v_{\max}$ 可达域旋转角在机动后第一个周期内均随时间下降最终在0附近, 按照标称轨道的轨道周期进行波动, 且波动幅值与 $\Delta v_{\max}$ 正相关.

综上所述, 本文将旋转角几何特征 φ 记作 Δv 与 t 的函数:

$$\varphi = f_{\varphi}(\Delta v, t). \quad (5)$$

2.2.2 包络形状特征

根据不确定性传播理论, 航天器单脉冲机动固定时间可达域计算过程被转化为初始位置误差为0, 速度误差幅值为 Δv 的不确定性传播过程. 不失一般性, 在 RSW 坐标系中脉冲机动后轨道不确定性传播过程如下所示:

$$\begin{cases} \Delta r_R^2(t) = \frac{\sin^2 nt}{n^2} \Delta v_{0R}^2 + 4 \left(\frac{1 - \cos nt}{n} \right)^2 \Delta v_{0S}^2, \\ \Delta r_S^2(t) = 4 \left(\frac{1 - \cos nt}{n} \right)^2 \Delta v_{0R}^2 + \left(\frac{4}{n} \sin nt - 3t \right) \Delta v_{0S}^2, \\ \Delta r_W^2(t) = \left(\frac{\sin nt}{n} \right)^2 \Delta v_{0W}^2, \end{cases} \quad (6)$$

式中, Δr 为轨道 t 时刻位置不确定性, Δv_0 为初始机动速度, 下标“ R ”, “ S ”与“ W ”分别表示在 R, S, W 坐标轴的分量, n 为参考轨道的角速度.

首先, 给定传播时间分析可达域形状与初始机动速度增量幅值的关系. 不失一般性, $\Delta v_{\max}$ 分别取 25, 50, 75, 100 m/s, 计算 GEO 轨道传播时间 $t = T/2$ 时的可达域外包络如图 5 所示. 可达域包络尺寸与机动速度 Δv 正相关.

进一步地分析可达域形状与传播时间的关系. 根据式 (6), GEO 轨道一个周期内轨道不确定性与传播时间 t 关系如图 6 所示. 参考轨道面外可达距离极值呈周期性变化, 且变化周期为 $T/2$. 在一个周期内, 可达域包络长轴逐渐增大, 指向从 R 轴向 S 轴旋转, 轨道面内、法向短轴出现周期性变化, 使得可达域形状逐渐变扁

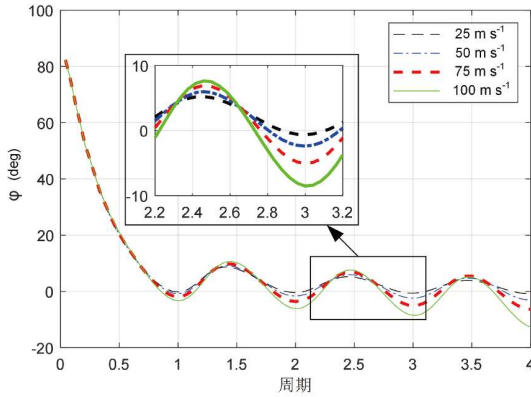


图 4 (网络版彩图) 旋转角与传播时间关系

Figure 4 (Color online) Relationship between rotation angle and time.

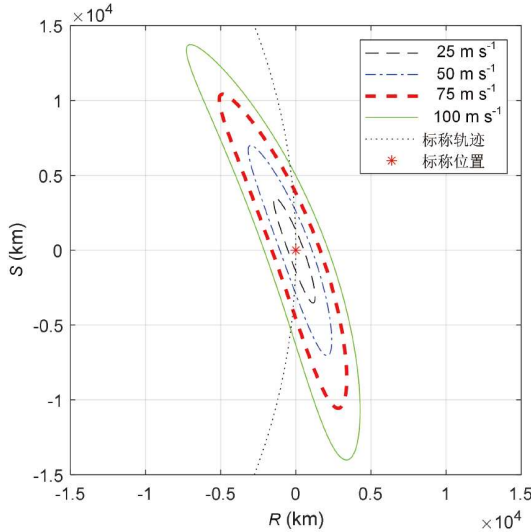


图 5 (网络版彩图) 相同传播时间, 不同速度增量上限可达域

Figure 5 (Color online) Reachable domain with the same propagation time for different velocity increment limits.

(长短轴比值增大).

事实上, 受非线性动力学模型影响, 随着传播时间 t 的延长, 可达域包络椭球出现弯曲畸变, 如图 3 所示. 定义可达域中线长轴两端点与标称点在中线上投影连线夹角为弯曲角 γ , 表示中线弯曲程度, 如图 7 所示.

数值仿真结果显示 γ 与传播时间 t 成负相关关系, 如图 8 所示. 而且, 由图 8 可知可达域畸变程度随 t 增长逐渐增大, 且外包络受 Δv 增大的影响, 会更早形成弯曲绳形. 因此, γ 减小速率与 Δv 成正相关关系.

此外, 分别考虑二体动力学环境与 J2 引力摄动条件, 以 $\Delta v_{\max} = 100$ m/s 传播可达域 12 与 72 h, 在相对坐

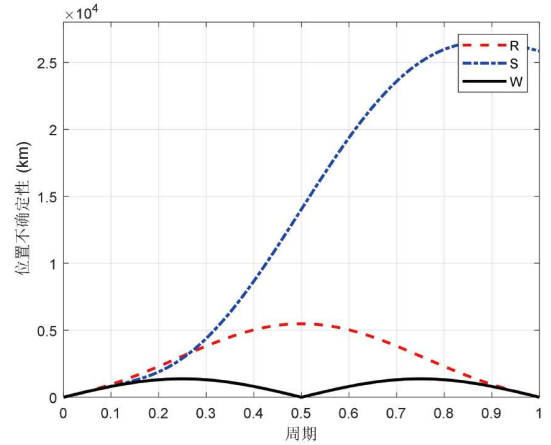


图 6 (网络版彩图) 脉冲机动 GEO 轨道一个周期内位置不确定性

Figure 6 (Color online) Position uncertainty within one period of GEO with impulse maneuver.

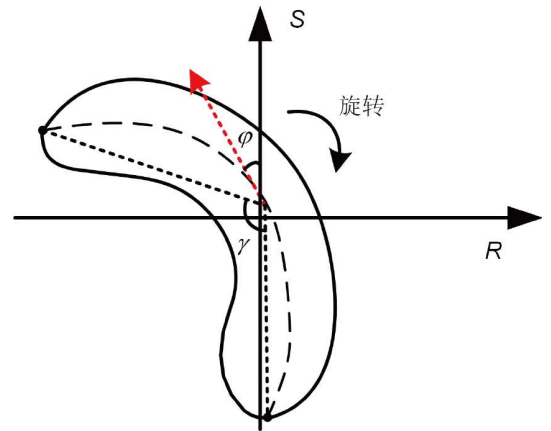


图 7 (网络版彩图) 可达域弯曲角示意

Figure 7 (Color online) Illustration of bending angle of reachable domain.

标系下描述两类环境下可达域外包络对比如图9所示, 两种动力学环境下可达域包络形状高度重合, 可见在摄动条件下, 固定时间可达域外包络形状仍能通过类似的几何模型进行表征, 因此本文以二体动力学为例,

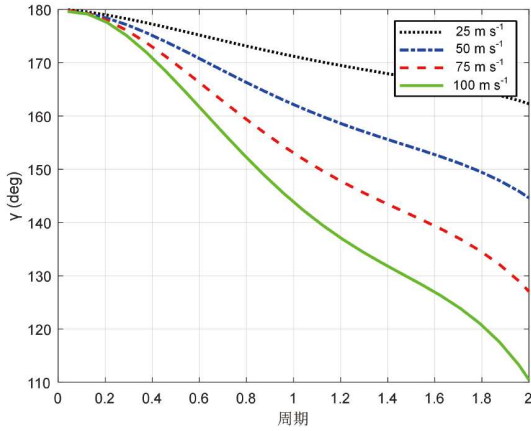


图 8 (网络版彩图)弯曲角与速度增量、传播时间的关系
Figure 8 (Color online) Relationship between bending angle, velocity increment, and propagation time.

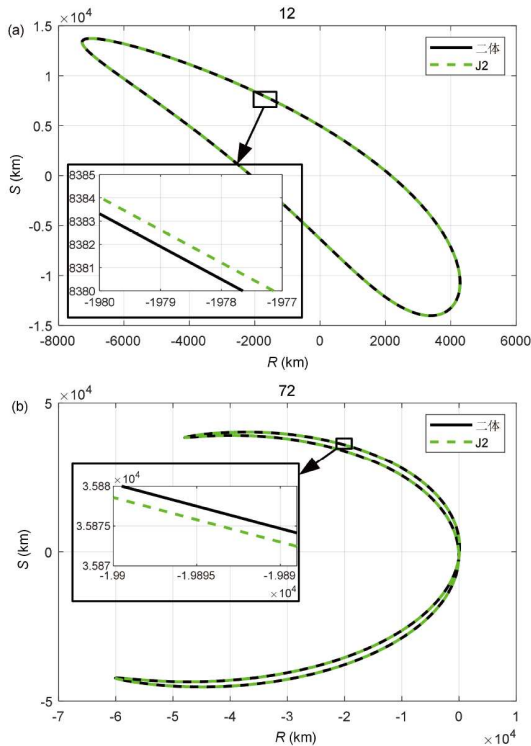


图 9 (网络版彩图)不同环境摄动下可达域对比示意. (a) 12 h和(b) 72 h两种环境下可达域对比
Figure 9 (Color online) Comparison of reachable domain under different environmental perturbations. Comparison of reachable domain under two environments at (a) 12 h and (b) 72 h.

建立可达域几何表征模型.

综上所述, 为降低可达域包络不规则曲线几何表征复杂度, 本文对可达域包络旋转角度与包络边界做解耦处理, 分别对两类特征进行针对性表征, 有效降低可达域计算难度, 提升可达域表征的准确性与鲁棒性. 如图10所示, 将相对可达域绕轨道面法向顺时针旋转角度 $\varphi + n\frac{\pi}{2}, n \in Z$, 使长条形可达域相位差最大两点连线在 R 轴投影最大, 同时满足包络面向上弯曲. 此时, 旋转解耦后可达域几何外包络曲线几何特征可记作关于 Δv 与 t 的函数:

$$\text{curve} = f_{\text{curve}}(\Delta v, t). \quad (7)$$

3 可达域包络几何表征方法

3.1 平面可达域几何表征

根据可达域几何特征敏感性分析结果, 固定时间可达域可由独立的长轴旋转角和形状参数描述. 由于可达域形状对时间十分敏感, 所以将平面可达域分为短期和长期, 分别表征.

3.1.1 短期平面可达域几何表征

轨道面内可达域边界是平面封闭图形, 是关于 R 轴坐标的多值函数, 难以求解. 因此, 如图11所示, 本文通过分别映射中线内侧曲线与外侧曲线后拼接组成外包络.

封闭可达域由包络与中心两侧距离最远点拆分成内侧曲线与外侧曲线, 可达域自变量范围 $[x_{\max}, x_{\min}]$ 作为包络形状特征的自变量, 由 $\Delta v, t$ 计算得到两条曲线

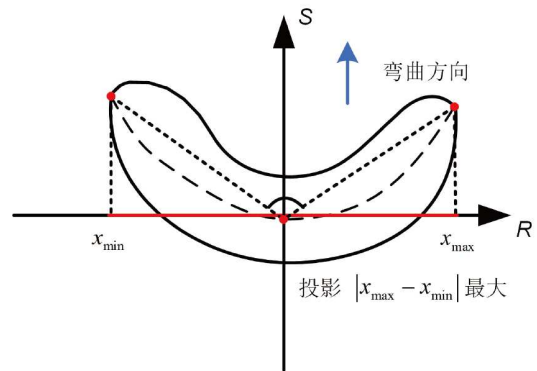


图 10 (网络版彩图)可达域旋转后示意
Figure 10 (Color online) Illustration of rotated reachable domain.

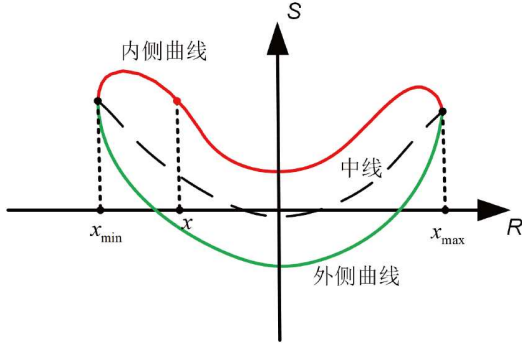


图 11 (网络版彩图) 包络拼接示意
Figure 11 (Color online) Illustration of envelope stitching.

自变量上下界分别为 $x_{\max}$ 与 $x_{\min}$, 如式(8)所示:

$$[x_{\max}, x_{\min}] = F_S(OE, \Delta v, t), \quad (8)$$

式中, OE 为航天器初始轨道参数.

记参数 δ 表征处于自变量范围内任意一个点的横坐标 x 在自变量范围内的位置, 如式(9)所示:

$$\delta = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}. \quad (9)$$

在自变量范围内均匀取采样, 分别计算内侧和外侧曲线上每个点纵坐标最远可达距离 y , 首尾相连组合两条曲线成封闭图形, 即可达域平面外包络:

$$\begin{cases} y_{\text{in}} = G_{\text{in}}(OE, \Delta v, t, \delta), \\ y_{\text{out}} = G_{\text{out}}(OE, \Delta v, t, \delta), \end{cases} \quad (10)$$

式中, G_{in} , G_{out} 分别表示内、外侧 S 轴最远可达距离与机动参数、采样点位置特征的关系.

3.1.2 长期平面可达域几何表征

随着传播时间的延长, 如图12(a)所示, 可达域形状弯曲畸变加剧, 导致内外侧曲线形成多值函数. 对于航天器单脉冲机动导致的轨道周期变化可以表示为机动速度增量幅值和方向 Δv , α 的函数:

$$\Delta T = f_{\Delta T}(\Delta v, \alpha). \quad (11)$$

对于相同的机动幅值, ΔT 边界点即为 $f_{\Delta T}(\cdot)$ 关于 α 梯度为0的位置. 极值点对应机动后的最大周期和最小周期 $T_{\max}$, $T_{\min}$. 则可计算可达域包络内最大相位差 ω_{span} :

$$\omega_{\text{span}} = 2\pi t \left(\frac{1}{T_{\min}} - \frac{1}{T_{\max}} \right). \quad (12)$$

当 $\omega_{\text{span}} > \pi$ 时, 旋转后可达域包络平面投影左右两端存在, 如图12(a)所示, 一个 x 值对应多个 y 值的奇异映射关系, 在可达域左侧同一个 x 值会对应 y 轴上两个交点 A 与 A' . 记最大相位差满足 $\omega_{\text{span}} = \pi$ 时刻为切换时间 t_{switch} :

$$t_{\text{switch}} = \frac{\pi}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})} = f_t(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \Delta v). \quad (13)$$

当 $t > t_{\text{switch}}$ 时, 可达域包络在 x 轴与 y 轴上的尺寸量级相同, 尽管一个 x 值可能对应多个 y 值, 但此时可以将内外两条曲线在各自的 y 轴最小值点拆分成两条曲线, 得到如图12(b)所示四条曲线, 均满足如式(14)所示的单值函数关系:

$$x = g_i(y), i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (14)$$

式中, g 为曲线的函数关系, i 为曲线编号.

针对单脉冲可达域长期计算, 由式(15)计算自变量 y 范围, 如式(16), 记参数 δ_2 表征处于某一条曲线上任意一点的纵坐标值 y 在自变量范围内位置:

$$[y_{\min 1}, y_{\min 2}, y_{\max 1}, y_{\max 2}] = F_L(OE, \Delta v, t), \quad (15)$$

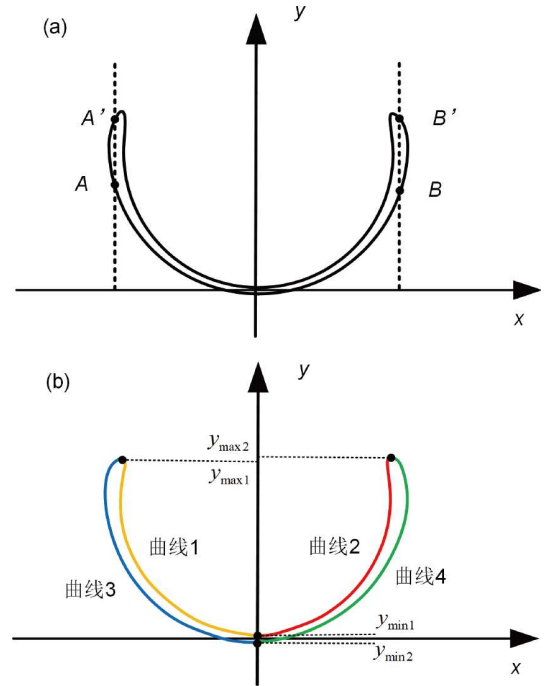


图 12 (网络版彩图) 长期可达域包络几何表征. (a) 长期可达域边界映射奇异示意; (b) 长期可达域边界拼接方法

Figure 12 (Color online) Geometric characterization of long-term reachable domain. (a) Illustration of long-term reachable domain boundary mapping singularities and (b) boundary stitching method.

$$\delta_2 = \frac{y - y_{\min i}}{y_{\max i} - y_{\min i}}. \quad (16)$$

根据给定的速度增量 Δv 与传播时间 t 和求解的自变量范围内点纵坐标, 可以求得各个曲线唯一对应的 x 轴坐标值. 通过在自变量范围内均匀取点, 得到组成长期可达域外包络的四条曲线:

$$x = G_i(OE, \Delta v, t, \delta_2), i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (17)$$

式中, G_i 为 S 轴最远可达距离与机动参数、采样点位置特征的关系.

由式(10)和(17)得到可达域包络曲线还需通过逆时针旋转得到标称位置相对坐标系下可达域, 结合旋转角敏感性分析结论, 旋转角是关于初始轨道状态、机动速度增量幅值和传播时间 t 的单值函数, 如下所示:

$$\varphi = W_\varphi(OE, \Delta v, t). \quad (18)$$

需注意的是, 固定时间可达域传播时间在超过一定时间 t_{end} 后, 将演变为螺旋线形, 会再次出现多值函数问题, 类似式(13), 本文所提可达域几何表征方法适用时间上限如式(19):

$$t_{\text{end}} = \frac{2\pi}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})} = f_{i2}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \Delta v). \quad (19)$$

3.2 异面可达域几何表征

结合平面可达域形状表征方式, 本文提出通过五个特征长度比例对航天器单脉冲固定时间可达域表征的方法, 如图13(a)所示为计算所得可达域三维外包络, 包络面上的点记作 $P_{ijk} = [x_i, y_j, z_k]$. 对任一 x_i , 存在唯一 j, k 使得 P_{ijk} 的 z 坐标值最大, 记该类点为 M 类点. 机动后固定 t 时刻可达域全部 M 类点组合为图13(a)中绿色曲线, 其在平面内投影为如图13(b)黑色虚线所示特征中线 $M_L M_R$.

假设可达域包络平面内存在点 A , 则中线上距离 A 最近的点为点 A_M , 记 AA_M 的模长为 L_0 , AA_M 延长线与内外侧曲线的交点分别即为 E 和 F , 记 AE 和 AF 的模长分别为 L_1 和 L_2 , 记 EF 的长度为 L_S , $L_S = L_1 + L_2$; 中线与外包络的交点记为 M_L 和 M_R , 记中线 $M_L M_R$ 的长度为 L_M , 曲线 $A_M M_L$ 的长度记为 L_3 ; 中线上与参考轨道点 N 距离最近的点记为 N_P , 曲线 $M_L N_P$ 的长度记为 L_4 .

进一步地利用可达域包络的横截线长度 L_S 和中线长度 L_M 对点 A 的平面相对位置进行归一化, 如下所示:

$$s_0 = \frac{L_0}{L_S}, s_1 = \frac{L_1}{L_S}, s_2 = \frac{L_2}{L_S}, s_3 = \frac{L_3}{L_M}, s_4 = \frac{L_4}{L_M}, \quad (20)$$

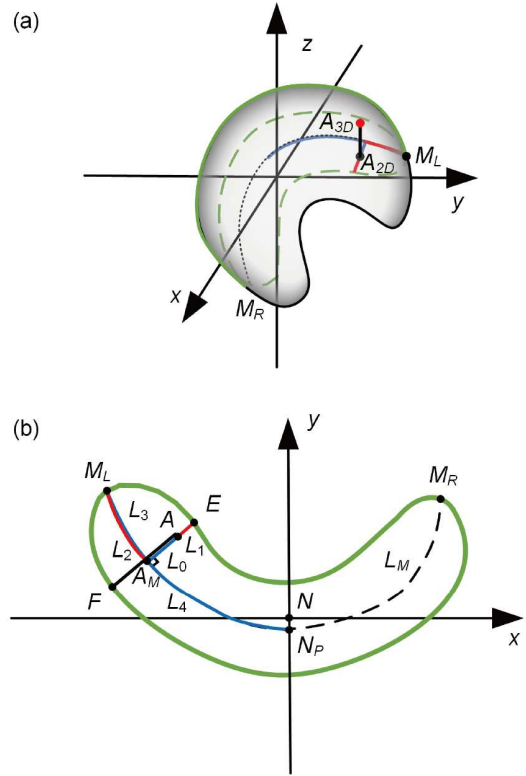


图 13 (网络版彩图) 航天器可达域包络几何特征位置示意图. (a) 三维位置特征示意; (b) 平面位置特征示意

Figure 13 (Color online) Illustration of positions feature of reachable domain envelope of spacecraft. (a) Illustration of 3D position features and (b) 2D position features.

式中, s_0 表示 A 点在绳形可达域横截线 EF 上相对中线 $M_L M_R$ 的位置, s_1, s_2 分别表示 A 点在 EF 上相对内、外边界的位置, s_3, s_4 分别表示 A 点中线上投影 A_M 在中线 $M_L M_R$ 相对左、右端点的位置.

如图13(b)所示, 记平面包络内任一点平面距离特征 $\mathbf{s} = [s_0, s_1, s_2, s_3, s_4]$, 作为二维点 A_{2D} 位置特征, 计算该点法向最大可达距组成三维外包络上的点 A_{3D} . 如图13(a)所示, 通过在二维可达域包络面内均匀取采样, 计算采样点的平面位置特征值, 进而结合机动参数表征三维空间可达域:

$$z = H(OE, \Delta v, t, \mathbf{s}). \quad (21)$$

此外, 可达域特征中线 $M_L M_R$ 并非几何上与内、外边界距离相等曲线, 中线 $M_L M_R$ 也是 $OE, \Delta v, t$ 及点在自变量上相对位置的函数:

$$y = G_{\text{mid}}(OE, \Delta v, t, \delta). \quad (22)$$

4 固定时间可达域包络快速计算方法

4.1 可达域几何特征计算方法

结合本文所构建的可达域包络几何表征模型, 固定时间可达域的计算流程如图14所示.

步骤1: 输入初始时刻轨道参数 OE 、传播时间 t 、机动速度幅值上限 Δv .

步骤2: 由式(4)计算 t 时刻标称位置 $\mathbf{r}_t$.

步骤3: 由式(18)计算旋转角 ϕ .

步骤4: 由式(13), 计算切换时间 t_{switch} , 判断计算短期/长期可达域, 短期可达域计算进入步骤5, 长期可达域计算进入步骤6.

步骤5: 由式(8)计算包络自变量范围, 通过均匀取采样点由式(10)计算二维包络, 由式(22)计算可达域特征中线.

步骤6: 由式(15)计算包络自变量范围, 通过均匀取采样点由式(17)计算二维包络, 由式(22)计算可达域特征中线.

步骤7: 在二维包络面内均匀取采样点, 由式(20)

计算点在二维包络中与中线、边界相对位置关系 $\mathbf{s}$.

步骤8: 由式(21)计算采样点轨道面法向最远可达距, 将平面采样点拓展至三维点, 对全部三维点取最小外包络得到可达域包络几何形状.

步骤9: 在标称位置 $\mathbf{r}_t$ 构造步骤8得到的几何包络, 并旋转旋转角 ϕ 得到标称位置相对坐标系可达域外包络.

上述方法中相对可达域自变量范围、面内和面外最远可达距以及中线等包络形状和长轴旋转角特征不存在显函数表达式, 只能通过蒙特卡罗采样计算, 求解效率低. 因此, 本文引入多个深度神经网络逼近上述函数关系, 实现几何特征的快速计算.

4.2 可达域几何特征网络映射

蒙特卡罗拟合是可达域精确计算的方法, 但由于其无法避免对采样点轨道进行数值递推导致计算效率低. 本文通过引入深度神经网络, 建立初始轨道参数 OE 、机动速度幅值上限 Δv 、传播时间 t 与可达域包络几何特征间的映射, 提升采样点空间内最远可达距离计算效率, 实现高效、精确表征可达域外包络.

4.2.1 可达域几何特征样本生成与数据处理

本文以地球同步轨道为背景, 分别建立敏感参数与可达域包络边界、旋转角特征网络映射关系. 表1给出样本生成过程中速度增量幅值与传播时间的范围.

将 Δv 与 t 两类参数组合, 对 $20 \times 120 = 2400$ 组数据用蒙特卡罗法计算可达域外包络并提取包络几何特征. 几何特征提取流程如图15所示.

本文对可达域长轴旋转角、包络形状做解耦处理, 首先, 通过PSO算法在 $[0, 360^\circ]$ 范围内搜索旋转角 ϕ , 使可达域两侧端点连线在 R 轴投影最大, 同时满足长轴向 S 轴正方向弯曲. 其次, 计算并储存旋转后平面内采样点位置特征、面内最远可达距离. 不失一般性地计算并储存异面采样点位置特征、异面最远可达距离.

针对长、短期固定时间可达域, 如式(23)和(24)所示, 本文分别设计存储单元 SU_S 与 SU_L 存储每种 $[\Delta v, t]$ 组合各100个样本点的几何特征:

$$SU_S = [\Delta v, t, \phi, x_{\min i}, x_{\max i}, x_{i_{\text{norm}}}, s_i, y_i, z_i], \quad (23)$$

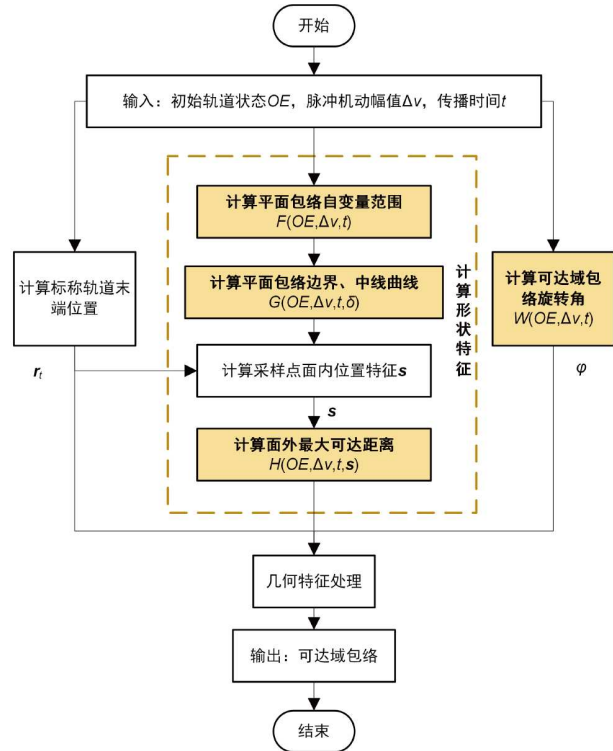


图 14 (网络版彩图)固定时间可达域计算流程
Figure 14 (Color online) Algorithm flow chart of time-fixed reachable domain.

表 1 样本生成范围

Table 1 Range of generated samples

样本范围	Δv (m/s)	t (h)
下限	5	—
上限	100	120
步长	5	1

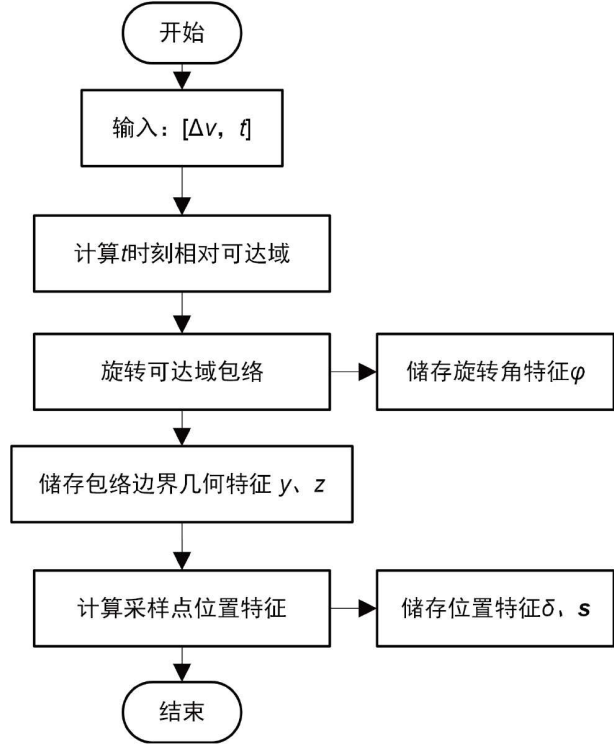


图 15 几何特征储存流程

Figure 15 Flow chart of geometric feature storage.

$$SU_L = [\Delta v, t, \varphi, y_{\min 1i}, y_{\min 2i}, y_{\max 1i}, y_{\max 2i}, \mathbf{s}_i, x_i, z_i], \quad (24)$$

式中, i 为采样点编号.

由式(13), 计算满足 $t_{\text{switch}} < 120$ h 的速度增量有: $\Delta v = 55, 60, \dots, 100$ m/s, 且 $\Delta v = 100$ m/s 对应切换时间 $t_{\text{switch}} = 61$ h. 取满足 $\Delta v \geq 55$ m/s 共 $10 \times 60 \times 100 = 60000$ 个储存单元组成长期可达域几何特征样本数据库, 其余单元组成短期特征样本数据库.

由于航天器轨道周期因半长轴差异而各异. 为在相同时间尺度研究传播时间对可达域几何形状影响, 本文定义归一化传播时间, 如式(25)所示:

$$\tau = t / T_n, \quad (25)$$

式中, t 是传播时间, T_n 标称轨道周期.

4.2.2 可达域几何特征映射网络模型

针对本文自变量范围、面内包络边界、面外最远可达距、长轴旋转角四类几何特征分别建立网络映射. 其中, 短期可达域几何特征映射关系如下式所示:

$$\begin{cases} [x_{\max}, x_{\min}] = \text{net}_{F_S}(OE, \Delta v, \tau), \\ y = \text{net}_{G_{\text{in/out}}}(OE, \Delta v, \tau, \delta), \\ z = \text{net}_H(OE, \Delta v, \tau, \mathbf{s}), \\ y_M = \text{net}_M(OE, \Delta v, \tau, \delta), \\ \varphi = \text{net}_W(OE, \Delta v, \tau), \end{cases} \quad (26)$$

式中, net_{F_S} 是自变量映射神经网络, $\text{net}_{G_{\text{in/out}}}$ 是平面内、外侧边界映射网络, net_H 是异面最远可达距映射网络, net_M 是中线映射网络, net_W 是长轴旋转角度映射网络.

不失一般性地, 长期可达域几何特征映射关系如下式所示:

$$\begin{cases} [y_{\min 1}, y_{\min 2}, y_{\max 1}, y_{\max 2}] = \text{net}_{F_L}(OE, \Delta v, \tau), \\ x = \text{net}_{G_i}(OE, \Delta v, \tau, \delta_i), i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ z = \text{net}_H(OE, \Delta v, \tau, \mathbf{s}), \\ y_{\text{mid}} = \text{net}_M(OE, \Delta v, \tau, \delta), \\ \varphi = \text{net}_W(OE, \Delta v, \tau), \end{cases} \quad (27)$$

式中, net_{F_L} 是自变量映射神经网络, net_{G_i} 是平面内边界映射网络.

各类深度神经网络结构具体设置如表2所示.

基于Levenberg-Marquardt算法, 本文采用trainlm方法训练网络, 以8:1:1比例划分训练集、验证集与测试集, 深度神经网络训练过程如图16所示, 最佳表现效果如图17所示, 深度神经网络收敛效果较好、精准度较高.

5 数值仿真

5.1 二维固定时间可达域计算

针对航天器单脉冲固定时间可达域计算问题, 本节设计GEO场景仿真算例验证本文方法有效性, 考虑航天器初始轨道参数如表3所示.

利用本文所提神经网络计算可达域几何特征方法, 分别计算脉冲机动速度幅值上限 $\Delta v_{\max} = 100$ m/s, $t = 12, 24, 36, 48$ h时刻可达域二维包络形状如图18所示, 图中黑色虚线表示蒙特卡罗方法计算所得可达域外包络, 红色实线为本文方法计算所得可达域外包络.

表 2 深度神经网络结构设置

Table 2 Configuration of neural network structure

深度神经网络	网络层	节点数	激活函数
net_W	输入层	3	—
	隐藏层	[5, 2]	tansig
	输出层	1	purelin
net_{FS}	输入层	3	—
	隐藏层	[25, 2]	tansig
	输出层	2	purelin
net_{FL}	输入层	3	—
	隐藏层	[25, 2]	tansig
	输出层	4	purelin
net_G	输入层	4	—
	隐藏层	[50, 25]	tansig
	输出层	1	purelin
net_M	输入层	4	—
	隐藏层	[50, 20]	tansig
	输出层	1	purelin
net_H	输入层	8	—
	隐藏层	[60, 30]	tansig
	输出层	1	purelin

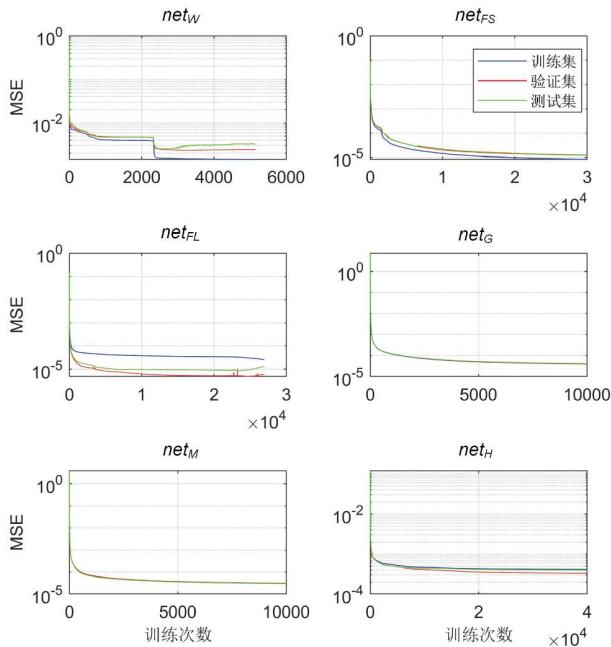


图 16 (网络版彩图)深度神经网络收敛效果

Figure 16 (Color online) Convergence effect of deep neural networks.

记本文方法与蒙特卡罗方法计算得到包络面积分别为 A_P 与 A_{MC} , 如下式所示, 定义面积交集与并集之比

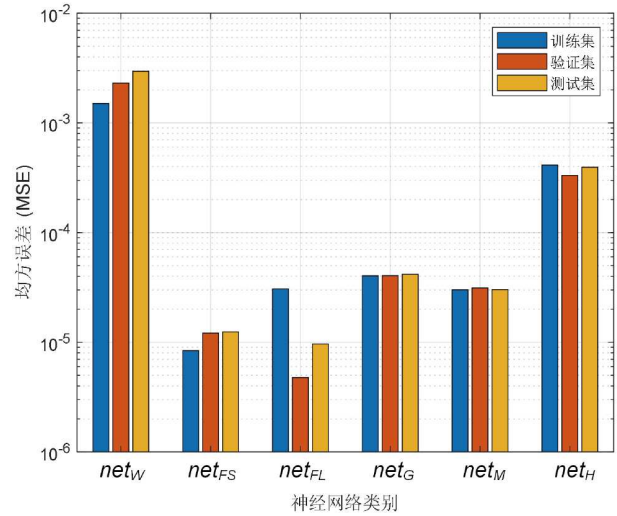


图 17 (网络版彩图)深度神经网络最佳效果

Figure 17 (Color online) Best performance of deep neural networks.

表 3 航天器初始轨道参数

Table 3 Initial orbit elements of spacecraft

参数	数值
半长轴 (km)	42164
偏心率	0
轨道倾角 (°)	0
升交点赤经 (°)	0
近地点幅角 (°)	0
真近点角 (°)	0

为 ε , ε 值越接近1表示本文方法与蒙特卡罗仿真结果吻合度越高:

$$\varepsilon = \frac{A_P \cap A_{MC}}{A_P \cup A_{MC}}, \quad (28)$$

式中, $\cap$ 表示面积交集, $\cup$ 表示面积并集.

本文采用 ε 对二维可达域包络计算准确性进行评价, 分别计算传播时间 $t = 12, 24, 36, 48$ h二维可达域准确率为99.1%, 96.4%, 97.9%, 97.2%, 吻合程度高.

短期可达域几何表征模型计算 $t = 72$ h可达域包络如图19所示, 模型无法准确反应可达域包络两侧几何形状特征. 此外, 数据库中存在包络两侧的多值函数关系, 使得其他采样点面内最远可达距映射关系受到影响而增大误差.

采用本文长期可达域几何特征计算模型计算 $t = 72, 120$ h时刻可达域二维包络面如图20所示, 可有效

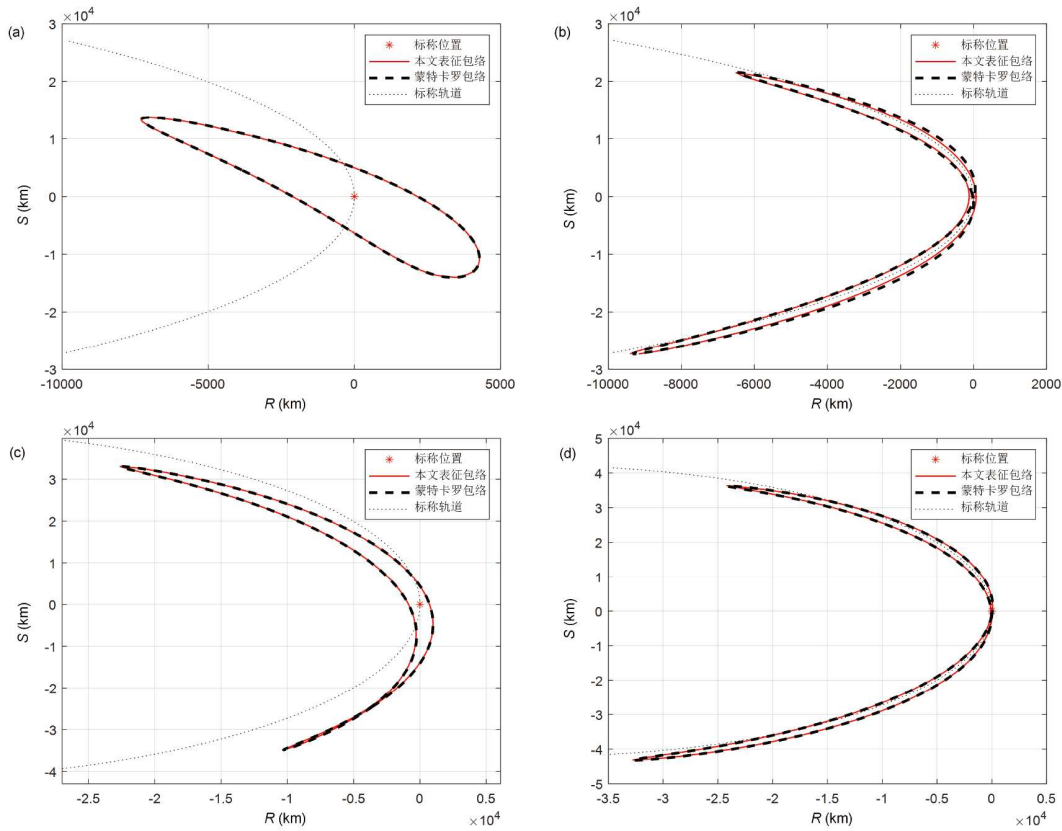


图 18 (网络版彩图)短期平面可达域. (a) 12 h可达域包络; (b) 24 h可达域包络; (c) 36 h可达域包络; (d) 48 h可达域包络
Figure 18 (Color online) Envelop of short-term planar reachable domain in (a) 12 h, (b) 24 h, (c) 36 h, and (d) 48 h.

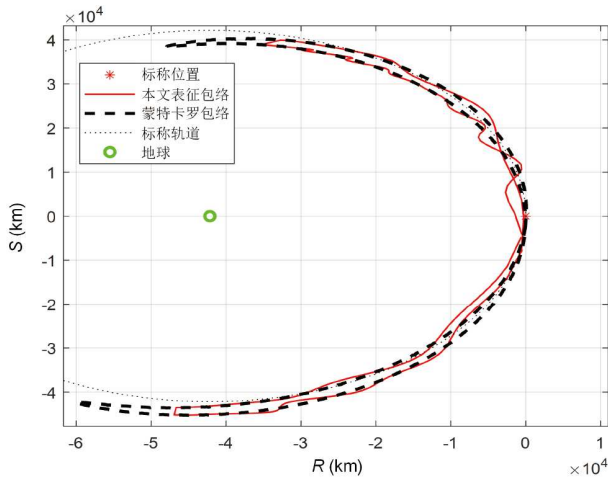


图 19 (网络版彩图)短期计算方法局限性
Figure 19 (Color online) Limitation of short-term characterization methods.

解决可达域弯曲程度大而出现的奇异映射情况. 传播时间 $t = 72, 120$ h 二维可达域准确率分别为 94.8%,

91.5%.

如图 20, 固定时间可达域即将演变为螺旋线形, 结合式 (19), 计算本文所提方法计算周期上限如图 21 所示. 其中, 脉冲机动速度幅值上限 $\Delta v_{\max} = 100$ m/s 时, 方法适用周期上限 5.114, 对应 122.73 h.

二维可达域计算准确率如图 22 所示, 红色实线为短期包络计算准确率, 绿色虚线为切换时间 2.547 后长期包络计算准确率. 其中, 短期计算准确率平均值为 97.8%, 而随传播时间延长, 短期可达域几何表征模型准确率由于可达域几何形状弯曲程度加剧而下降至 91.6%, 若在切换时间 2.547 后不进行表征模型切换, 准确率将会进一步下降. 在切换时间后采用长期可达域表征模型能有效表征弯曲可达域几何形状, 准确率重新上升, 并在长期准确率均值 93.5% 附近波动. 需要注意的是, 在传播时间超过此场景下计算可达域周期上限 5.114 后, 方法准确率会再次下降. 此外, 在个人计算机环境 Intel Core i7-13700F 2.10 GHz 处理器上, 单次平

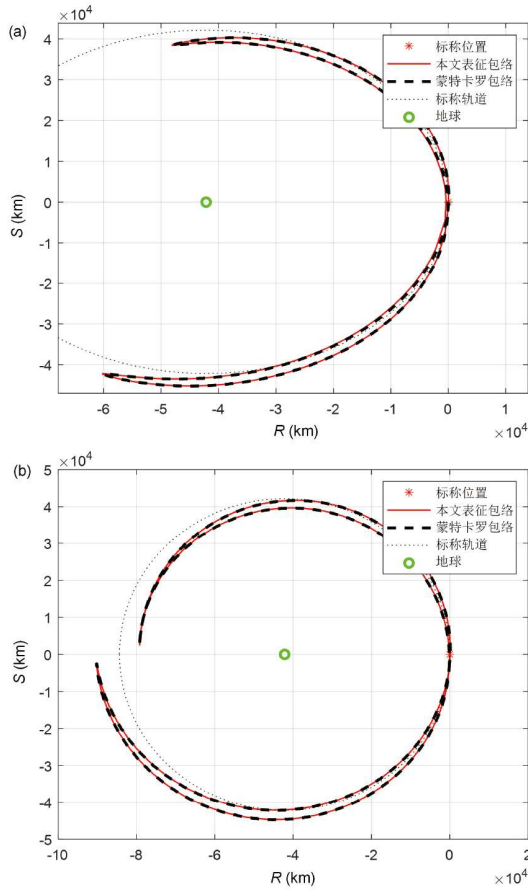


图 20 (网络版彩图)长期平面可达域. (a) 72 h 可达域包络; (b) 120 h 可达域包络

Figure 20 (Color online) Envelop of long-term planar reachable domain in (a) 72 h and (b) 120 h.

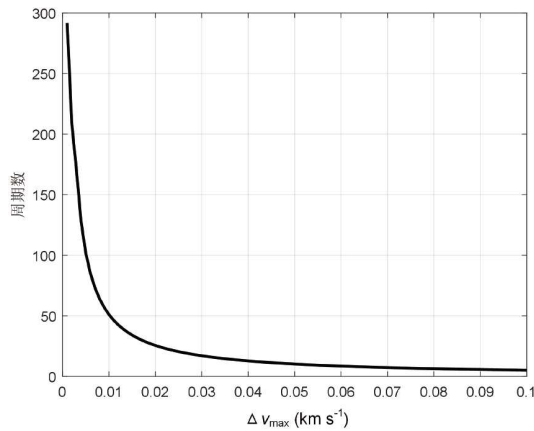


图 21 本文方法适用传播周期上限

Figure 21 Upper propagation period limit of the proposed method.

面可达域计算时间为0.033 s.

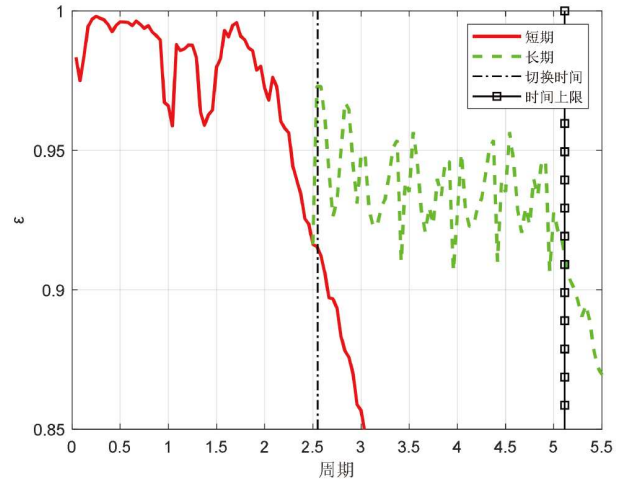


图 22 (网络版彩图)二维可达域计算准确率

Figure 22 (Color online) Accuracy of 2D reachable domain calculation.

5.2 三维固定时间可达域计算

基于表3中航天器轨道初始状态, 与4.1节中计算得到可达域平面包络, 在二维包络内选取1000个采样点由位置特征计算异面最远可达距离. 由于速度机动球关于初始轨道面对称, 可达域包络也关于初始轨道面对称, 因此仅需计算一半三维可达域包络, 另一半包络可由对称性得到.

文献[19]采用优化方法求解航天器相对坐标系下最远可达距(以下称H方法).

在计算效率方面, 随传播时间增长, 如图23所示, H方法需消耗大量时间进行轨道递推, 而本文仅利用敏感参数通过神经网络映射可达域异面最远可达距离, 单次计算时间为1.92 s, 计算效率优于H方法, 且随计算固定时间增长, 效率优势更显著.

在计算准确性方面, 不失一般性地记本文方法与蒙特卡罗法计算得到包络体积分别为 V_P 与 V_{MC} , 如式(29)所示, 定义体积交集与并集之比为 ϵ_3 :

$$\epsilon_3 = \frac{V_P \cap V_{MC}}{V_P \cup V_{MC}}. \quad (29)$$

由本文与H方法计算 $\Delta v_{\max} = 100$ m/s, $t = 12, 40$ h时刻可达域分别如图24和25所示, 采用 ϵ_3 评估本文传播时间 $t = 12, 40$ h三维可达域计算准确率为98.1%, 96.8%, H方法计算准确率为97.2%, 96.5%, 两种方法均与蒙特卡罗法吻合程度良好.

本文通过引入 ϵ_3 , 如图26所示, 分别对两种方法计

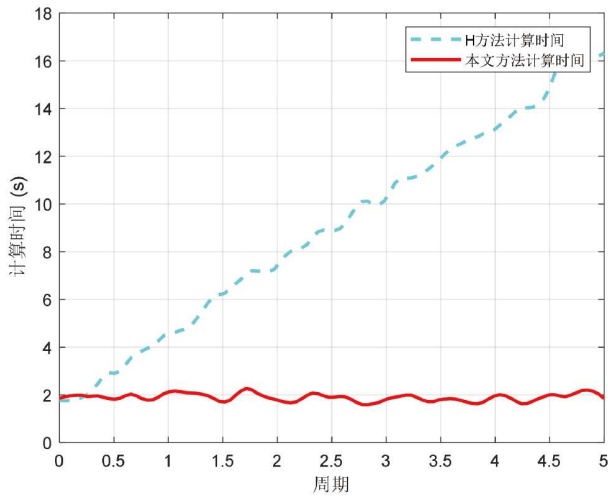


图 23 (网络版彩图)两种方法计算时间对比

Figure 23 (Color online) Comparison of calculation time between two methods.

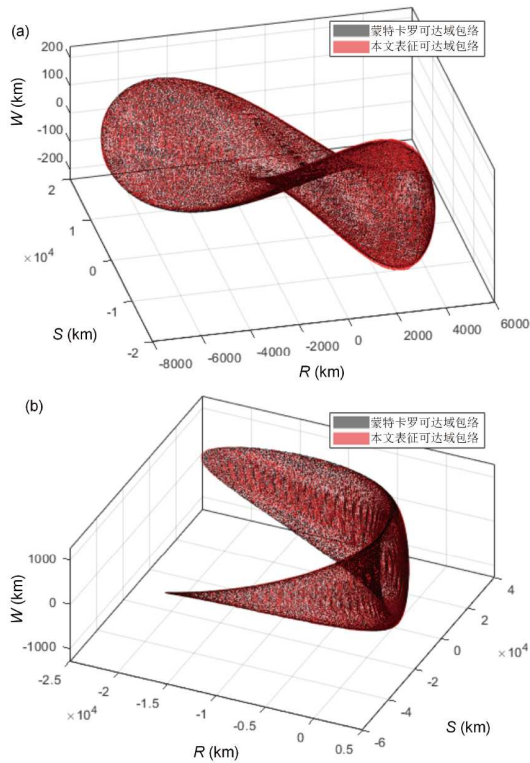


图 24 (网络版彩图)本文方法仿真结果. (a) 12 h可达域包络; (b) 40 h可达域包络

Figure 24 (Color online) Simulation result of the proposed method in (a) 12 h and (b) 40 h.

算5个周期内航天器单脉冲机动三维可达域准确率进行评价. H方法平均准确率为96.9%, 本文方法平均准

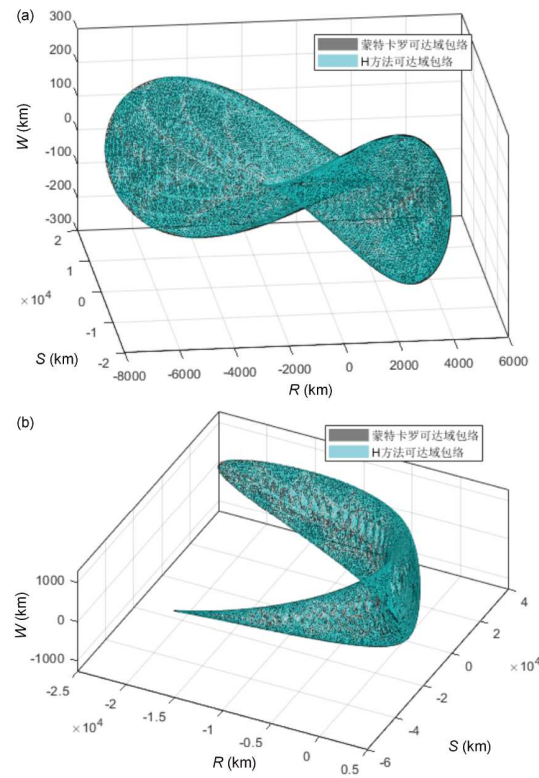


图 25 (网络版彩图) H方法仿真结果. (a) 12 h可达域包络; (b) 40 h可达域包络

Figure 25 (Color online) Simulation result of the H method in (a) 12 h and (b) 40 h.

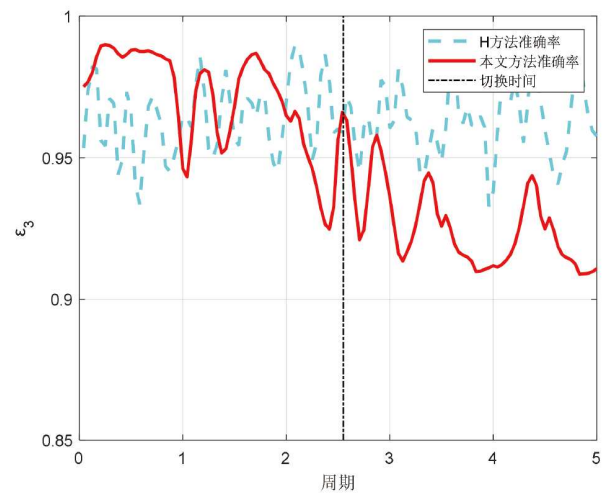


图 26 (网络版彩图)三维可达域计算准确率

Figure 26 (Color online) Accuracy of 3D reachable domain calculation.

确率为94.6%, 其中, 计算短期可达域平均准确率为97.1%, 计算长期可达域平均准确率为92.1%. 本文提

出的可达域几何特征计算方法, 在保证计算精度的同时, 具有较高计算效率.

6 结论

本文提出一种利用几何特征进行高效且精确计算航天器单脉冲固定时间可达域的方法. 首先采用蒙特卡罗法精确计算航天器可达域, 分析可达域包络几何特征关于机动速度、传播时间等参数的敏感性. 然后, 为使包络形状特征不受旋转角特征影响, 同时为降低包络形状特征表征复杂程度, 对可达域旋转角、边界特征做解耦处理. 本文将二维封闭可达域拆分为首尾

相连曲线后分别进行几何表征, 以解决封闭包络图形存在多值映射的奇异问题. 最后, 通过建立采样点在平面包络内位置特征与异面最远可达距映射关系, 计算三维可达域外包络. 此外, 本文推导长、短期可达域切换时间, 对计算初始脉冲速度大、传播时间长的固定时间可达域提出长期几何表征方法. 在此基础上, 本文基于蒙特卡罗法组建训练集, 并引入深度神经网络拟合机动参数与可达域几何特征间的非线性关系, 由网络映射解决蒙特卡罗法计算低效问题, 并与蒙特卡罗包络对比评价本文可达域表征方法准确性. 经检验, 本文所提航天器单脉冲固定时间可达域几何表征方法可精确、高效计算可达域包络.

参考文献

- 1 Chen Q, Qiao D, Shang H, et al. A new method for solving reachable domain of spacecraft with a single impulse. *Acta Astronaut*, 2018, 145: 153–164
- 2 Wen C, Qiao D. Calculating collision probability for long-term satellite encounters through the reachable domain method. *Astrodynamics*, 2022, 6: 141–159
- 3 Zou Z Y, Chen Q F. Decision tree-based target assignment for confrontation of multiple space vehicles (in Chinese). *Acta Aeronaut Astronaut Sin*, 2022, 43: 78–88 [邹子缘, 陈琪峰. 基于决策树搜索的空间飞行器集群对抗目标分配方法. *航空学报*, 2022, 43: 78–88]
- 4 Zhang S, Yang Z, Luo Y Z. An algorithm for solving spacecraft reachable domain with single-impulse maneuvering in ECEF (in Chinese). *Mech Eng*, 2022, 44: 1286–1296 [张赛, 杨震, 罗亚中. 地固系下航天器单脉冲轨道机动可达域求解算法. *力学与实践*, 2022, 44: 1286–1296]
- 5 Wen C, Sun Y, Peng C, et al. Reachable domain under J2 perturbation for satellites with a single impulse. *J Guid Control Dyn*, 2023, 46: 64–79
- 6 Li B, Zheng W, Zhang H B. Description and solution of orbit interception accessibility with impulse thrust (in Chinese). *Fight Control Detect*, 2019, 2: 26–36 [李彬, 郑伟, 张洪波. 脉冲推力轨道拦截可达性描述及求解方法. *飞控与探测*, 2019, 2: 26–36]
- 7 Vinh N X, Gilbert E G, Howe R M, et al. Reachable domain for interception at hyperbolic speeds. *Acta Astronaut*, 1995, 35: 1–8
- 8 Xue D, Li J, Baoyin H, et al. Reachable domain for spacecraft with a single impulse. *J Guid Control Dyn*, 2010, 33: 934–942
- 9 Wen C, Zhao Y, Shi P. Precise determination of reachable domain for spacecraft with single impulse. *J Guid Control Dyn*, 2014, 37: 1767–1779
- 10 Du X N, Yang Z. An algorithm for solving spacecraft reachable domain with single-impulse maneuvering (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mech*, 2020, 52: 1621–1631 [杜向南, 杨震. 航天器单脉冲机动可达域求解算法. *力学学报*, 2020, 52: 1621–1631]
- 11 Zhang Z, Ma Y, Zhu H Y, et al. Research on the concept and evaluation method for reconfigurability of launch vehicles (in Chinese). *J Astronaut*, 2023, 44: 1305–1316 [张智, 马英, 朱海洋, 等. 运载火箭可重构性及评价方法研究. *宇航学报*, 2023, 44: 1305–1316]
- 12 Xia C, Zhang G, Geng Y. Reachable domain with a single coplanar impulse considering the target-visit constraint. *Adv Space Res*, 2022, 69: 3847–3855
- 13 Jia F D, Han H W, Wen C X. Calculation of launch window for target interception based on reachable domain of ascending trajectory (in Chinese). *J Astronaut*, 2022, 43: 403–412 [贾飞达, 韩宏伟, 温昶煊. 基于上升轨迹可达范围的目标拦截发射窗口计算. *宇航学报*, 2022, 43: 403–412]
- 14 Zhao Z D, Cui P Y, Zhu S Y. An analytical homotopic method to generate the reachable longitudinal area for mars entry (in Chinese). *J Astronaut*, 2019, 40: 1024–1033 [赵泽端, 崔平远, 朱圣英. 火星大气进入段纵向可达区生成的解析同伦法. *宇航学报*, 2019, 40: 1024–1033]

- 15 Chen T B, Gong M, Wang H B, et al. Trajectory optimization and performance analysis of the near-space morphing glide vehicles (in Chinese). *J Astronaut*, 2018, 39: 944–952 [陈铁彪, 龚旻, 王洪波, 等. 临近空间可变形滑翔飞行器轨迹优化与性能分析. *宇航学报*, 2018, 39: 944–952]
- 16 Huang M Y, Liang Z X, Cui P Y. Reachable zone generation for irregularly shaped asteroid landing (in Chinese). *J Astronaut*, 2021, 42: 1550–1558 [黄美伊, 梁子璇, 崔平远. 不规则小行星附着可达区生成方法. *宇航学报*, 2021, 42: 1550–1558]
- 17 Li C B, Bao W M, Li Z K, et al. Trajectory reachable envelope analysis of launch vehicle under thrust failure and uncertainties (in Chinese). *J Astronaut*, 2023, 44: 25–33 [李超兵, 包为民, 李忠奎, 等. 运载火箭推力故障不确定性下轨迹可达包络分析. *宇航学报*, 2023, 44: 25–33]
- 18 Wang P C, Zhang R X, Yan X L. Robust optimization of hypersonic diving trajectory under uncertain conditions (in Chinese). *Fight Control Detect*, 2022, 5: 61–68 [王培臣, 张睿轩, 闫循良. 不确定条件下高超声速俯冲弹道鲁棒优化. *飞控与探测*, 2022, 5: 61–68]
- 19 Holzinger M J, Scheeres D J. Reachability results for nonlinear systems with ellipsoidal initial sets. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2012, 48: 1583–1600
- 20 Wen C, Gurfil P. Relative reachable domain for spacecraft with initial state uncertainties. *J Guid Control Dyn*, 2016, 39: 462–473
- 21 Wen C, Gao Y, Shi H. Three-dimensional relative reachable domain with initial state uncertainty in Gaussian distribution. *Proc Inst Mech Eng Part G-J Aerosp Eng*, 2019, 233: 1555–1570
- 22 Wen C, Ma J. Reachable domain for satellite relative motion along elliptic orbit with uncertainty and process noise. *Proc Inst Mech Eng Part G-J Aerosp Eng*, 2020, 234: 1287–1300
- 23 Wang Z, Jiang F. Analytical optimal solution for the reachable domain of low-thrust spacecraft. *J Spacecr Rockets*, 2024, 61: 274–284
- 24 Zhang R D, Cai W W, Yang L P, et al. Multi-spacecraft cooperative guard strategy based on reachable domain coverage (in Chinese). *J Nat Univ Defense Technol*, 2024, 46: 12–20 [张润德, 蔡伟伟, 杨乐平, 等. 采用可达域覆盖的多航天器协同护卫策略. *国防科技大学学报*, 2024, 46: 12–20]

Geometric characterization and rapid computation method for reachable domain of spacecraft with single impulse

ZHONG HanQi, YANG Bin, XIE RenYuan, SHAO ChangBao,
ZHOU HongGang & LI Shuang*

College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

**Corresponding author (email: lishuang@nuaa.edu.cn)*

The reachable domain is an effective means for multi-objective selection and sequence optimization in future multi objective rendezvous missions, such as on-orbit servicing and space debris removal. A representation and efficient calculation method for the envelope of fixed-time reachable domain by geometric features is proposed to address the issues in time sensitivity and heavy computational burden in traditional numerical methods for calculating fixed-time reachable domain. Firstly, based on the Monte Carlo simulation results, the sensitivity of the characteristic parameters of reachable domain envelope to maneuver parameters is analyzed. Then, based on the conclusion of sensitivity analysis, a new method for characterizing the reachable domain envelope of spacecraft with single impulse by geometric features was proposed. Finally, a deep neural network was introduced to establish a mapping relationship between maneuvering parameters and geometric characteristic parameters of envelope, which addresses the inherent contradiction between the computational efficiency and accuracy of existing numerical methods and realizes rapid and high-precision calculation for fixed-time reachable domain of spacecraft with single impulse. The simulation results show that the reachable domain calculated by proposed method matches well with the Monte Carlo simulation results and significantly improves computational efficiency.

reachable domain, impulse maneuver, geometric feature, deep neural network

PACS: 91.10.Sp, 96.15.De, 07.05.Mh, 02.60.Ed

doi: [10.1360/SSPMA-2024-0388](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0388)