中国科学: 物理学 力学 天文学 2026 年 第 56 卷 第 11 期: 110314
SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica physcn.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论 文

融合热启动和Grover混合器的量子近似优化算法及其在顶点覆盖问题的应用

吴恒[1], 甘志刚[1], 叶天语[1,2*]

1. 浙江工商大学信息与电子工程学院, 杭州 310018
2. 赤峰工业职业技术学院, 赤峰 024000
* 联系人, E-mail: yetianyu@zjgsu.edu.cn

收稿日期: 2026-03-18; 接受日期: 2026-05-19; 网络出版日期: 2026-08-25
国家自然科学基金(编号: 62071430)资助项目

摘要 量子近似优化算法(Quantum Approximate Optimization Algorithm, QAOA)是一种量子-经典混合算法, 在解决组合优化问题中展现了巨大潜力. 然而, 传统QAOA在初始态制备和混合算子全局搜索能力方面存在一定的局限性. 为了克服这些局限性, 本文提出了一种融合热启动和Grover混合器的QAOA, 在初始量子态制备阶段引入热启动策略, 并利用搜索能力更加精细的Grover混合算子代替传统QAOA的混合算子. 实验结果表明, 与传统QAOA和多角度量子近似优化算法(Multi-Angle Quantum Approximate Optimization Algorithm, MA-QAOA)相比, 本文算法在求解顶点覆盖问题上的准确率、损失值和近似比三个方面总体上均表现出优势, 尤其随着演化层数增多, 其性能提升更为明显; 传统QAOA和MA-QAOA的各项指标在达到峰值后还会出现下降的情况, 而本文算法的各项指标在达到峰值后不会出现下降的情况, 表现更为稳定.

关键词 量子近似优化算法, 顶点覆盖问题, 热启动策略, Grover混合器, 振幅放大

PACS: 03.67.Lx, 03.67.Ac, 02.10.Ox

1 引言

近年来, 量子算法这一领域已经取得了显著的进展, 其中变分量子算法[1]已成为研究的热点之一. 例如, 量子本征值求解算法[2,3]广泛应用于化学问题的研究, 量子近似优化算法(Quantum Approximate Optimization Algorithm, QAOA)为组合优化问题提供了新的解决思路. 其中, QAOA是由Farhi等人[4]于2014年提出的一种结合经典优化与量子计算优势的变分量子算法[5], 旨在高效求解非确定多项式(Nondeterministic Polynomial, NP)时间难问题[6–10].

为了进一步提升QAOA在组合优化问题中的性能, 研究者提出了多种改进算法[11–24]. 这些改进大大扩展了量子计算在复杂优化问题中的应用. Herrman

引用格式: 吴恒, 甘志刚, 叶天语. 融合热启动和Grover混合器的量子近似优化算法及其在顶点覆盖问题的应用. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2026, 56: 110314
Wu H, Gan Z, Ye T-Y. Quantum approximate optimization algorithm integrating warm-start and Grover mixer and its application to the vertex cover problem (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2026, 56: 110314, doi: 10.1360/SSPMA-2026-0199

© 2026《中国科学》杂志社

等人[11]提出了多角度量子近似优化算法(Multi-Angle Quantum Approximate Optimization Algorithm, MA-QAOA); 该算法为每一层的每个量子门引入了独立的参数, 能够更灵活地捕捉组合优化问题的结构特征, 从而在优化过程中显著提升近似比的同时有效减少量子电路的深度[12]. Zhou等人[13]提出的QAOA-in-QAOA算法是一种基于嵌套结构的QAOA改进方案, 其核心思想是在优化线路参数的过程中将另一个QAOA作为子程序嵌入主算法中, 从而加速优化过程; 实验表明, 将该算法应用于大规模最大切割问题, 能够有效提高参数选择的效率, 减少优化所需的迭代次数, 并显著加快算法的收敛速度. Yoshioka等人[14]提出了费米子量子近似优化算法(Fermionic Quantum Approximate Optimization Algorithm, FQAOA), 其创新点为通过引入费米子粒子数守恒的机制来解决约束优化问题; 该机制能够将约束条件自然地嵌入QAOA框架中; 实验表明, 该算法在投资组合优化问题中的性能显著优于经典算法. Chalupnik等人[15]提出的QAOA+算法通过引入一个额外的多参数问题层显著提升了在正则图上求解最大切割问题的近似比; 这一改进不仅增强了对正则图结构的适应性, 而且能够更好地处理约束优化问题, 为解决具有复杂结构的图的组合优化问题提供了新方案. Wurtz和Love[16]提出的数字化抗绝热量子近似优化算法(Digitized-Counterdiabatic Quantum Approximate Optimization Algorithm, DC-QAOA)在QAOA的拟设中引入一种依赖于问题的反绝热驱动机制, 能够有效减少量子计算过程中的非绝热跃迁, 使系统更容易保持在目标状态, 从而提高优化问题的求解精度和近似比的收敛速度. Patel等人[17]提出了一种基于强化学习的递归量子近似优化算法(Recursive Quantum Approximate Optimization Algorithm, RQAOA), 通过递归的方式实现量子近似优化, 通过在每次迭代后固定部分变量来逐步降低问题的规模[18]. 此外, Vijendran等人[19]在MA-QAOA的基础上提出了表达增强量子近似优化算法(Expressive Quantum Approximate Optimization Algorithm, XQAOA); 该算法在问题哈密顿量中引入了泡利Y算子, 增加了更多的独立参数, 但能够更有效地减少量子电路深度, 加快算法的收敛速度. Chiang和Alsing[20]探索了将Grover搜索算法的最优行为引入QAOA的可能性, 进一步提升了QAOA在解决组合优化问题中的性能. 与此同时, Mandl等人[21]改进了混合振幅放大的QAOA, 并将其应用于解决3-布尔可满足性问题, 通过增加量子线路的深度来提高算法的准确率. Kotil 等人[22]提出一种浅层量子近似多目标优化算法去逼近多目标加权最大切割问题的最优帕累托前沿. Cai等人[23]将卷积神经网络(Convolutional Neural Network, CNN)与条件风险价值(Conditional Value at Risk, CVaR)相结合, 以优化QAOA电路. Meng等人[24]提出一种面向大规模多输入多输出(Multiple-Input and Multiple-Output, MIMO)系统最大似然检测的浅层QAOA. Egger等人[25]提出热启动QAOA, 利用经典算法求得的解作为QAOA的初始状态来优化其性能, 从而加速收敛速度. Bärtschi和Eidenbenz[26]利用Grover混合器将QAOA的复杂度从混合器设计转移到态制备.

受文献[25,26]的启发, 本文提出了一种融合热启动和Grover混合器的QAOA, 并将其应用于顶点覆盖问题的求解, 其创新之处在于在初始量子态制备阶段引入热启动策略以及利用搜索能力更加精细的Grover混合算子代替传统QAOA的混合算子. 仿真结果表明, 与传统QAOA和MA-QAOA相比, 融合热启动和Grover混合器的QAOA在求解顶点覆盖问题上的准确率、损失值和近似比三个方面总体上均表现出优势, 尤其随着演化层数增多, 其性能提升更为明显; QAOA和MA-QAOA的各项指标在达到峰值后还会出现下降的情况, 而融合热启动和Grover混合器的QAOA的各项指标在达到峰值后不会出现下降的情况, 表现更为稳定.

2　顶点覆盖问题

组合优化问题是指在一组离散或连续的选项中找到最优解决方案的问题, 如旅行商问题、图分割问题及最大匹配问题等. 随着问题规模的增大, 求解所需的时间呈指数级增长, 这类问题在经典计算机上通常属于NP难问题.

顶点覆盖问题是图论中一个经典的组合优化问题, 在计算机科学、网络设计和生物信息学等领域均有广泛的应用, 其目标是在离散或连续的解空间内搜寻到一组最优的参数配置方案. 具体而言, 给定一个无向图$G=(V, E)$, 其中V表示图中所有顶点的集合, E表示所有边的集合, 顶点覆盖问题的目标就是找到一个最小的顶点子集$C \subseteq V$, 使得图中的每一条边至少

有一个端点属于C. 换言之, 集合C中的顶点需要覆盖图中所有的边.

图1(a)的G_1是一个包含5个顶点和6条边的无向图, 其顶点集合为V_1={0,1,2,3,4}, 边集合为E_1={(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,2),(2,3)}. 显然, G_1的最小顶点覆盖集合为C_1={0,2}. 图1(b)的浅红色顶点分别为G_1对应的顶点覆盖问题的理论上的正确求解结果. 具体来说, 顶点0覆盖了边(0,1), (0,2), (0,3)和(0,4), 而顶点2覆盖了边(0,2), (1,2)和(2,3). 顶点0和2的组合成功覆盖了G_1的所有边, 满足了顶点覆盖问题的要求.

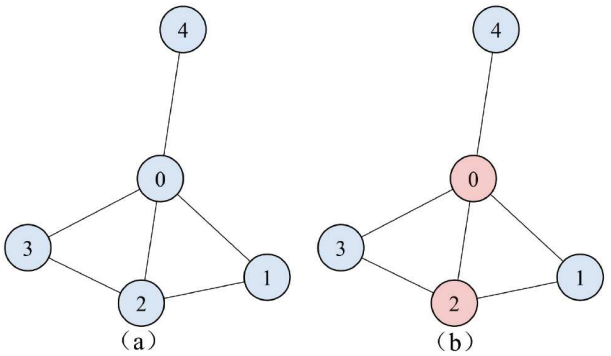


图 1　(网络版彩图) (a) G_1. (b) G_1的最小顶点覆盖问题的求解结果, 浅红色顶点代表理论上的正确求解结果.

Figure 1　(Color online) (a) G_1. (b) Solution to the minimum vertex cover problem for graph G_1, the light red vertices represent the theoretically correct solution results.

3　融合热启动和Grover混合器的QAOA及其在顶点覆盖问题中的应用

融合热启动和Grover混合器的QAOA结合了热启动QAOA[25]和Grover混合器QAOA[26]的核心思想, 进一步提升了算法在解决组合优化问题中的性能. 该算法通过引入热启动策略的初始量子态制备和Grover混合器的全局搜索能力, 显著提高了求解效率和近似解的质量.

图2展示了融合热启动和Grover混合器的QAOA求解组合优化问题的流程示意图.

使用融合热启动和Grover混合器的QAOA解决顶点覆盖问题的步骤如下.

步骤1: 初始量子态制备.

与传统量子近似优化算法不同, 融合热启动和Grover混合器的QAOA在初始量子态制备阶段引入了热启动策略.

首先, 初始化N个量子比特使它们均处于基态$|0\rangle$; 然后, 使用传统经典启发式算法(如贪心算法、模拟退火等)生成一个关于顶点覆盖问题所需的最小顶点个数的近似解K; 最后, 根据K值将初始量子态设置为由所有汉明重量为K的量子态构成的均匀叠加态:

$$\begin{aligned}|F\rangle &= \mathbf{U}_S\,|0\rangle^{\otimes N}\\ &= \left(\sum_{x\in\{0,1\}^N\ \&\ \text{Hamming Weight}(x)=K} |x\rangle\right)/\sqrt{|F|},\end{aligned}\tag{1}$$

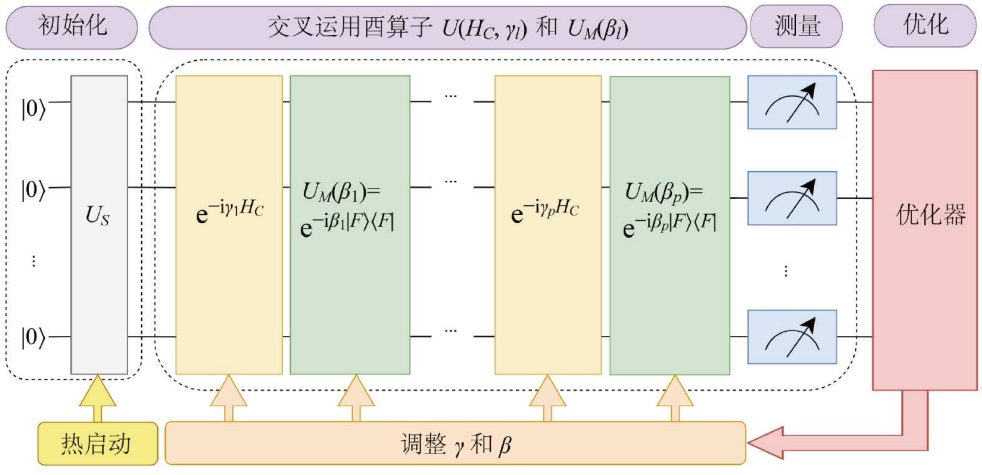


图 2　(网络版彩图)融合热启动和Grover混合器的QAOA求解组合优化问题的流程

Figure 2　(Color online) Flowchart of solving combinatorial optimization problems with QAOA integrating warm-start and Grover mixer.

其中Hamming Weight(x)=K表示$|x\rangle$中有K个量子比特为$|1\rangle$、$N-K$个量子比特为$|0\rangle$, $|x\rangle$表示其中一个汉明重量为K的量子态, $|F\rangle$表示由所有汉明重量为K的量子态构成的均匀叠加态, $\mathbf{U}_S$为将N个基态$|0\rangle$制备为由所有汉明重量为K的量子态构成的均匀叠加态的态制备算子, $|F|$表示汉明重量为K的量子态的总数.

Dicke态[27]是一种具有高度对称性的多体量子态. Dicke态$|D_N^K\rangle$是所有K个量子比特处于$|1\rangle$且其余$N-K$个量子比特处于$|0\rangle$的量子态构成的均匀叠加态. 因此, 根据式(1), 可以得到初始量子态为

$$|F\rangle = \mathbf{U}_S|0\rangle^{\otimes N} = |D_N^K\rangle = \left(\sum_{x\in\{0,1\}^N \,\&\, \text{Hamming Weight}(x)=K} |x\rangle\right) \Big/ \sqrt{\binom{N}{K}}, \tag{2}$$

其中$\binom{N}{K}$是汉明重量为K的量子态的总数. 以图1的无向图G_1为例, 若通过经典贪心算法求得其对应的最小顶点覆盖个数为K_1=2, 则可利用如图3所示的量子线路[28,29]通过受控门和量子态转换等操作将初始态$|0\rangle^{\otimes 5}$转换为Dicke态$|D_{|V_1|}^{K_1}\rangle = |D_5^2\rangle$, 其中$\mathbf{R}_Y(j,\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\boldsymbol{\sigma}_j^Y/2}$.

步骤2: 定义问题哈密顿量及其酉算子.

为了找到目标函数的最小值, 需要根据目标函数来构建问题哈密顿量$\mathbf{H}_C$. 具体步骤如下: 首先, 将目标函数表示为二次无约束二值优化(Quadratic Unconstrained Binary Optimization, QUBO)问题模型$G(x_0,x_1,\cdots,x_{N-1})$, 其中每个变量$x_i\in\{0,1\}$; 然后根据表1中的映射规则将二值变量$x_i$换为旋转变量$s_i$得到经典伊辛模型, 其中$s_i\in\{-1,1\}$; 接着将旋转变量$s_i$转换为对应的泡利$\mathbf{Z}$算子(即$\boldsymbol{\sigma}^Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$)得到量子伊辛模型, 从而构建问题哈密顿量$\mathbf{H}_C$. 如果$\mathbf{H}_C$中存在常数项, 可以将其省略, 这是因为常量仅影响哈密顿量的整体相位, 而不会改变本征态的性质. 常数项的去除可进一步简化哈密顿量的形式, 同时保持优化问题的本质不会发生改变.

对于给定的图$G(V, E)$, 其顶点覆盖问题的目标函数可以表示为[30]

$$G(x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}) = A\sum_{(i,j)\in E}(1-x_i)(1-x_j) + B\sum_{i=0}^{|V|-1} x_i, \tag{3}$$

其中$A>B$, $|V|$为顶点的数量, $x_i\in\{0,1\}$. 若顶点i被选中, 则令x_i=1; 否则, 令x_i=0. 若采用表1中$0\equiv|0\rangle$和$1\equiv|1\rangle$的映射规则, 可将目标函数$G(x_0,x_1,\cdots,x_{N-1})$转换为经典伊辛模型:

$$\begin{aligned} &G(s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}) \\ &= A\sum_{(i,j)\in E}\left[(s_i+1)/2\right]\times\left[\left(s_j+1\right)/2\right] + B\sum_{i=0}^{|V|-1}(1-s_i)/2 \\ &= A\sum_{(i,j)\in E}\left(s_is_j+s_i+s_j+1\right)/4 + B\sum_{i=0}^{|V|-1}(1-s_i)/2 \\ &= A\sum_{(i,j)\in E}\left(s_is_j+s_i+s_j\right)/4 - B\sum_{i=0}^{|V|-1}s_i/2 \\ &\quad +A|E|/4 + B|V|/2, \end{aligned} \tag{4}$$

其中$|E|$为边的数量. 进一步, 使用$\boldsymbol{\sigma}^Z$替代s可得量子伊辛模型的问题哈密顿量为

表 1　不同映射规则对应的旋转变量表达式及泡利表达式

Table 1　Rotation variable expressions and Pauli expressions corresponding to different mapping rules

映射规则	旋转变量表达式	泡利表达式
$1\equiv\|0\rangle, 0\equiv\|1\rangle$	$(1+s)/2$	$(\mathbf{I}+\boldsymbol{\sigma}^Z)/2$
$0\equiv\|0\rangle, 1\equiv\|1\rangle$	$(1-s)/2$	$(\mathbf{I}-\boldsymbol{\sigma}^Z)/2$

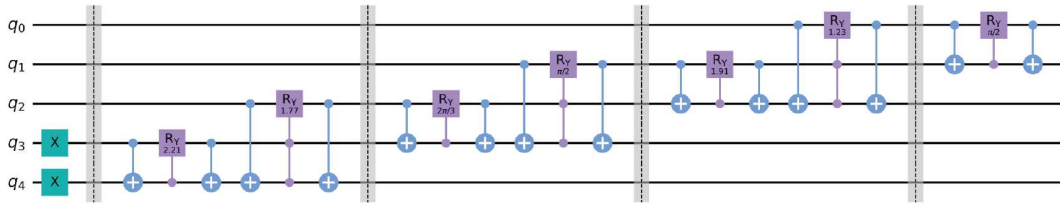


图 3　(网络版彩图) Dicke态$|D_5^2\rangle$制备对应的量子线路图

Figure 3　(Color online) Quantum circuit diagram corresponding to the preparation of Dicke state $|D_5^2\rangle$.

$$\mathbf{H}_C = A\sum_{(i,j)\in E}\left(\boldsymbol{\sigma}_i^z\otimes\boldsymbol{\sigma}_j^z+\boldsymbol{\sigma}_i^z+\boldsymbol{\sigma}_j^z\right)/4 - B\sum_{i=0}^{|V|-1}\boldsymbol{\sigma}_i^z/2 + A|E|/4 + B|V|/2. \tag{5}$$

删除式(5)的常量后得到简化后的问题哈密顿量为

$$\mathbf{H}_C = A\sum_{(i,j)\in E}\left(\boldsymbol{\sigma}_i^z\otimes\boldsymbol{\sigma}_j^z+\boldsymbol{\sigma}_i^z+\boldsymbol{\sigma}_j^z\right)/4 - B\sum_{i=0}^{|V|-1}\boldsymbol{\sigma}_i^z/2. \tag{6}$$

由式(6)的问题哈密顿量$\mathbf{H}_C$可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}(\mathbf{H}_C,\gamma_l) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_l\mathbf{H}_C}\\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_l\left[A\sum\limits_{(i,j)\in E}\left(\boldsymbol{\sigma}_i^z\otimes\boldsymbol{\sigma}_j^z+\boldsymbol{\sigma}_i^z+\boldsymbol{\sigma}_j^z\right)/4-B\sum\limits_{i=0}^{|V|-1}\boldsymbol{\sigma}_i^z/2\right]}\\
&= \prod_{(i,j)\in E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z\otimes\boldsymbol{\sigma}_j^z/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_j^z/4}\prod_{i=0}^{|V|-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}B\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z/2}\\
&= \prod_{(i,j)\in E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}_{(i)}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}_{(j)}\right)/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_j^z/4}\prod_{i=0}^{|V|-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}B\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z/2}\\
&= \prod_{(i,j)\in E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}_{(i,j)}/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_j^z/4}\prod_{i=0}^{|V|-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}B\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z/2}\\
&= \prod_{(i,j)\in E}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l/4}&0&0&0\\0&\mathrm{e}^{\mathrm{i}A\gamma_l/4}&0&0\\0&0&\mathrm{e}^{\mathrm{i}A\gamma_l/4}&0\\0&0&0&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l/4}\end{bmatrix}_{(i,j)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_j^z/4}\prod_{i=0}^{|V|-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}B\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z/2}\\
&= \prod_{(i,j)\in E}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}_{(i,j)}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l/4}&0&0&0\\0&\mathrm{e}^{\mathrm{i}A\gamma_l/4}&0&0\\0&0&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l/4}&0\\0&0&0&\mathrm{e}^{\mathrm{i}A\gamma_l/4}\end{bmatrix}_{(i,j)}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}_{(i,j)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_j^z/4}\prod_{i=0}^{|V|-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}B\gamma_l\boldsymbol{\sigma}_i^z/2}\\
&= \prod_{(i,j)\in E}\mathrm{CNOT}(i,j)\left(\mathbf{I}(i)\otimes\mathbf{R}_Z(j,A\gamma_l/2)\right)\mathrm{CNOT}(i,j)\mathbf{R}_Z(i,A\gamma_l/2)\mathbf{R}_Z(j,A\gamma_l/2)\prod_{i=0}^{|V|-1}\mathbf{R}_Z(i,-B\gamma_l)\\
&= \prod_{(i,j)\in E}\mathrm{CNOT}(i,j)\mathbf{R}_Z(j,A\gamma_l/2)\mathrm{CNOT}(i,j)\mathbf{R}_Z(i,A\gamma_l/2)\mathbf{R}_Z(j,A\gamma_l/2)\prod_{i=0}^{|V|-1}\mathbf{R}_Z(i,-B\gamma_l),
\end{aligned}\tag{7}$$

其中$\mathbf{R}_Z(j,\theta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\boldsymbol{\sigma}_j^Z/2}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}/2}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}&0\\0&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\end{bmatrix}$, $\mathrm{CNOT}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$.

步骤3: 定义Grover混合算子.

Grover混合算子为

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}_M(\beta_l) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_l|F\rangle\langle F|} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{i}\beta_l)^k\left(|F\rangle\langle F|\right)^k/k! \quad = \mathbf{I}+\sum_{k=1}^{\infty}(-\mathrm{i}\beta_l)^k\left(|F\rangle\langle F|\right)^k/k! \\
&= \mathbf{I}+\sum_{k=1}^{\infty}(-\mathrm{i}\beta_l)^k|F\rangle\left(|F\rangle\langle F|\right)^{k-1}\langle F|/k! \quad = \mathbf{I}+\sum_{k=1}^{\infty}(-\mathrm{i}\beta_l)^k|F\rangle\langle F|/k! \quad = \mathbf{I}+(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_l}-1)|F\rangle\langle F| \\
&= \mathbf{U}_S\left(\mathbf{I}+(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_l}-1)|0\rangle^{\otimes N}\langle 0|^{\otimes N}\right)\mathbf{U}_S^{\dagger} = \mathbf{U}_S\left(\mathbf{I}+(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_l}-1)\mathbf{X}^{\otimes N}|1\rangle^{\otimes N}\langle 1|^{\otimes N}\mathbf{X}^{\otimes N}\right)\mathbf{U}_S^{\dagger} \\
&= \mathbf{U}_S\mathbf{X}^{\otimes N}\left(\mathbf{I}+(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_l}-1)|1\rangle^{\otimes N}\langle 1|^{\otimes N}\right)\mathbf{X}^{\otimes N}\mathbf{U}_S^{\dagger} = \mathbf{U}_S\mathbf{X}^{\otimes N}\left(\mathbf{I}+(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_l}-1)\begin{bmatrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{bmatrix}_{1}\right)\mathbf{X}^{\otimes N}\mathbf{U}_S^{\dagger} \\
&= \mathbf{U}_S\mathbf{X}^{\otimes N}\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_l}\end{bmatrix}_{1}\mathbf{X}^{\otimes N}\mathbf{U}_S^{\dagger} = \mathbf{U}_S\mathbf{X}^{\otimes N}\mathbf{CP}(\beta_l)\mathbf{X}^{\otimes N}\mathbf{U}_S^{\dagger},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中l=1,2,⋯, p, p为演化的总层数, $\mathbf{U}_S^{\dagger}$为$\mathbf{U}_S$的厄米共轭操作, 非门$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, 控制相位门$\mathbf{CP}(\beta_l)=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_l}\end{bmatrix}_{1}$. 由于类似于Grover搜索算法的扩散算子, $\mathbf{U}_M(\beta_l)$可看作一种广义上的振幅放大操作, 但是它使用了可调节的相位偏移量$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_l}$, 而不是Grover搜索算法中扩散算子的固定数值$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$. 与传统的Grover搜索算法相比, $\mathbf{U}_M(\beta_l)$提供了更灵活的相位调节能力, 能在解空间中进行更加精细的搜索, 而不仅是简单的相位反转. 图4展示了$\mathbf{U}_M(\beta_l)$对应的量子线路图.

步骤4: 优化参数$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$及测量.

量子态的演化通过交替应用问题哈密顿量酉算子$\mathbf{U}(\mathbf{H}_C,\gamma_l)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_l\mathbf{H}_C}$和Grover混合算子来实现. 经过$p$层演化后的输出态为

$$
|\psi(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_p|F\rangle\langle F|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_p\mathbf{H}_C}\cdots\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_1|F\rangle\langle F|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma_1\mathbf{H}_C}|F\rangle, \tag{9}
$$

其中$\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p)$和$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)$分别是$\mathbf{U}(\mathbf{H}_C,\ \gamma_l)$和$\mathbf{U}_M(\beta_l)$的演化参数.

在测量量子态$\psi(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$后, 可计算出问题哈密顿量$\mathbf{H}_C$的期望值为

$$
EV(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}) = \langle\psi(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})|\mathbf{H}_C|\psi(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})\rangle, \tag{10}
$$

其反映了在当前参数下目标函数的性能.

使用经典优化器不断地调整参数$\boldsymbol{\gamma}$和$\boldsymbol{\beta}$, 以最小化期望值$EV(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$. 若优化后的最优参数为

$$
(\boldsymbol{\gamma}^*,\boldsymbol{\beta}^*) = \mathrm{argmin}EV(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}), \tag{11}
$$

则对应的问题哈密顿量$\mathbf{H}_C$的期望值为$EV(\boldsymbol{\gamma}^*,\boldsymbol{\beta}^*)$, 其中$\boldsymbol{\gamma}^*=\left(\gamma_1^*,\gamma_2^*,\ldots,\gamma_p^*\right)$, $\boldsymbol{\beta}^*=\left(\beta_1^*,\beta_2^*,\ldots,\beta_p^*\right)$.

由于本文算法无法保证找到全局最优解, 而是寻找近似最优解, 因此可通过近似比ar来衡量解的质量. ar被定义为

$$
ar = EV(\boldsymbol{\gamma}^*,\boldsymbol{\beta}^*)/C_{\mathrm{opt}}, \tag{12}
$$

其中C_{opt}表示问题的全局最优解对应的问题哈密顿量$\mathbf{H}_C$的期望值. 当ar越接近1时, 表明算法求得的解越接近全局最优解.

本文算法的性能高度依赖参数$\boldsymbol{\gamma}$和$\boldsymbol{\beta}$的选择, 因此选择合适的优化器至关重要. 优化器的选择通常取决

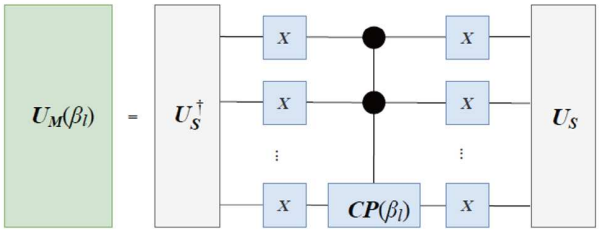


图 4　(网络版彩图) $\mathbf{U}_M(\beta_l)$对应的量子线路图
Figure 4　(Color online) Quantum circuit diagram of $\mathbf{U}_M(\beta_l)$.

于问题的规模和参数的数量. 当优化参数较少时, 使用与梯度无关的优化算法通常更为高效, 如COBYLA算法、Powell算法、Nelder-Mead算法; 反之, 使用基于梯度的优化算法通常更为高效, 如BFGS算法、Adam算法、Momentum算法.

演化层数p决定了量子电路的深度, 而迭代次数则影响优化精度和计算成本. 通常情况下, 增加演化层数p和迭代次数可以提升解的精度, 但也会增加计算资源的消耗. 可根据具体问题的需求选择合适的p、优化器及其迭代次数.

4　仿真实验及其结果

这部分使用IBM　QASM仿真器对由Qiskit设计出的量子线路进行仿真实验.

融合热启动和Grover混合器的QAOA求解图G_1的顶点覆盖问题的量子线路如图5所示, 其中初始态制备由$\mathbf{U}_S$实现且其具体结构如图3所示, $\mathbf{U}(\mathbf{H}_C,\gamma_l)$对应的完整量子线路如图6(a)所示, $\mathbf{U}_S^{\dagger}$对应的完整量子线路图如图6(b)所示.

由于需要满足$A>B$, 所以设置参数为A=2, B=1; 同时, 经典贪心算法求得图G_1对应的最小顶点覆盖个数为K_1=2; 演化层数p为1; γ_1和β_1为π/2; 迭代次数由非量子COBYLA算法自动获取, 以得到认定的最佳参数γ'_1和β'_1. 最终输出的量子态表示为

$$|\psi_1(\gamma_1,\beta_1)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta'_1|F_1\rangle\langle F_1|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma'_1\mathbf{H}_{C_1}}|F_1\rangle,$$

其中$|F_1\rangle = |D_5^2\rangle$,

$$\mathbf{H}_{C_1} = \sum_{(i,j)\in E_1}\left(\boldsymbol{\sigma}_i^z\otimes\boldsymbol{\sigma}_j^z+\boldsymbol{\sigma}_i^z+\boldsymbol{\sigma}_j^z\right)/2-\sum_{i=0}^{|V_1|-1}\boldsymbol{\sigma}_i^z/2,$$

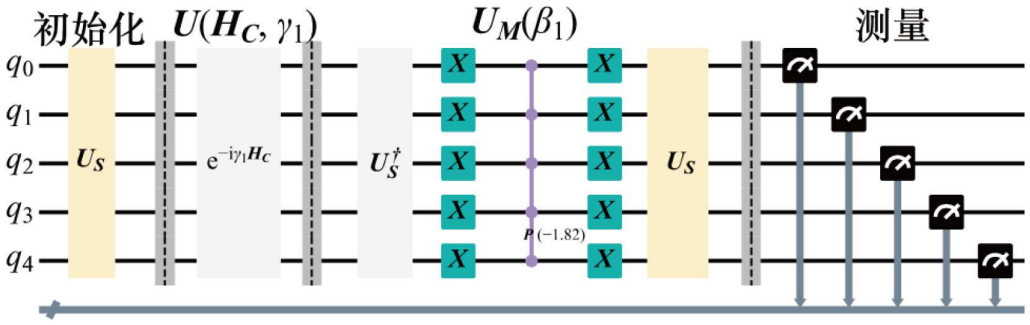


图 5　(网络版彩图)融合热启动和Grover混合器的QAOA解决G_1的最小顶点覆盖问题的量子线路图

Figure 5　(Color online) Quantum circuit for solving the minimum vertex cover problem of graph G_1 with QAOA integrating warm-start and Grover mixer.

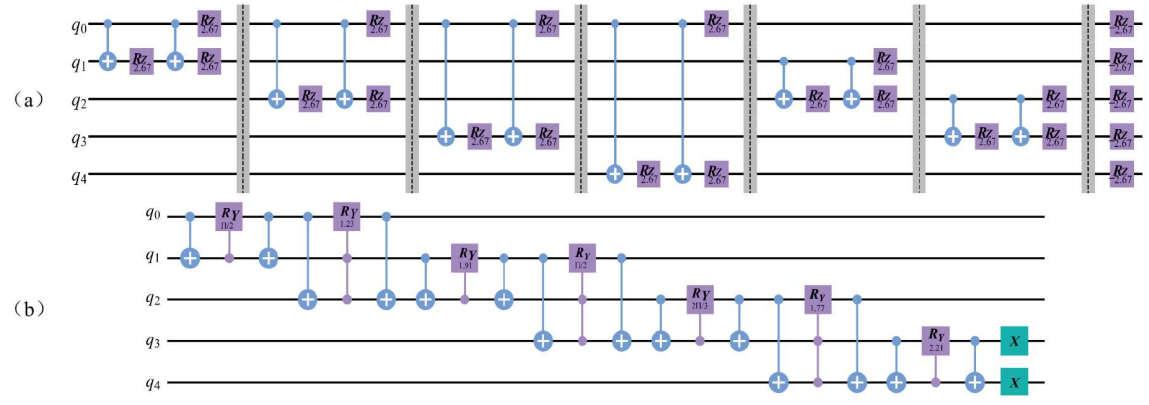


图 6　(网络版彩图)图5中$\mathbf{U}(\mathbf{H}_C,\gamma_l)$ (a)及$\mathbf{U}_S^{\dagger}$ (b)所对应的量子线路图

Figure 6　(Color online) Quantum circuit diagrams corresponding to $\mathbf{U}(\mathbf{H}_C,\gamma_l)$ (a) and $\mathbf{U}_S^{\dagger}$ (b) in Figure 5.

γ'_1和β'_1为对应于COBYLA算法的最优迭代次数γ_1和β_1的值，由此可以得到目标函数的期望值为$EV_1(\gamma_1,\beta_1)=\langle\psi_1(\gamma_1,\beta_1)|\mathbf{H}_{C_1}|\psi_1(\gamma_1,\beta_1)\rangle$. 在优化算法中通常使用损失函数来表示需要最小化的目标函数，因此可将损失值定义为目标函数的期望值$EV(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$，准确率定义为实验正确求解结果次数/实验总次数. 将融合热启动和Grover混合器的QAOA求解图G_1的顶点覆盖问题的过程运行10240遍后, 损失值约为−1.80, 近似比约为0.51, 次数分布实验结果如图7所示. 从图7可以看出，正确解00101的次数为4068次，即实验结果准确率达到4068/10240≈39.73%.

接下来以求解图8(a1)中2-正则图G_2、图8(a2)中完全二分图G_3、图8(a3)中随机生成的7顶点图G_4的顶点覆盖问题为例，将融合热启动和Grover混合器的QAOA与传统QAOA和MA-QAOA进行性能对比. 每种算法均运算10240遍，以确保结果的可靠性. 图8(b1), (b2)和(b3)的浅红色顶点分别为G_2, G_3和G_4对应的顶点覆盖问题的理论上的正确求解结果.

实验参数设置为A=2, B=1; 热启动采取经典贪心算法，贪心算法求得图G_2，G_3和G_4对应的最小顶点覆盖个数分别为K_2=4, K_3=2, K_4=3; $\boldsymbol{\gamma}$和$\boldsymbol{\beta}$中的元素均初始化为$\pi/2$; 优化算法为COBYLA算法，迭代次数由其自动获取以得到认定的最佳参数. 图9(a1)–(a3)分别展示了当演化层数变化时，三种算法在图G_2，G_3和G_4上的准确率对比图; 图9(b1)–(b3)分别为损失值对比图; 图9(c1)–(c3)为近似比对比图. 由图可知，随着演化层数的增加，三种算法在解决图G_2，G_3和G_4对应的顶点覆盖问题时，总体上均呈现准确率上升、损失值减小和近似比提升的趋势，但在少数情况下准确率会出现下降，这可能是由图的性质、贫瘠高原现象[31]或算法陷入局部最优解[32]等导致的. 具体地, 对图G_2而言，当演化层数较少时，三种算法在准确率上表现的差异较小, QAOA在损失值和近似比表现较为优异; 但随着演化层数增加，融合热启动和Grover混合器的QAOA的准确率和近似比显著提升、损失值显著降低，远超其他两种算法. 对于图G_3而言, QAOA和MA-QAOA的准确率、损失值和近似比随演化层数增加呈有所改善的趋势, 但提升较慢且不稳定; 融合热启动和Grover混合器的QAOA的三项指标优化较快且显著高于另两种算法. 对于图G_4而言, MA-QAOA与融合热启动和Grover

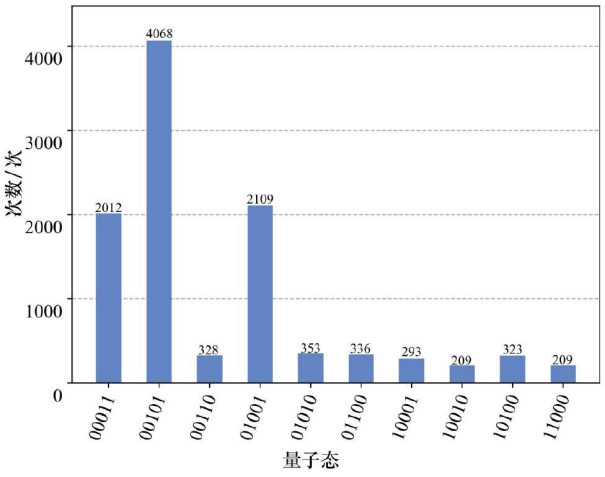


图 7　(网络版彩图)融合热启动和Grover混合器的QAOA解决G_1的最小顶点覆盖问题的次数分布实验结果

Figure 7　(Color online) Experimental results of the number distribution for solving the minimum vertex cover problem on G_1 with the QAOA integrating warm-start and Grover mixer.

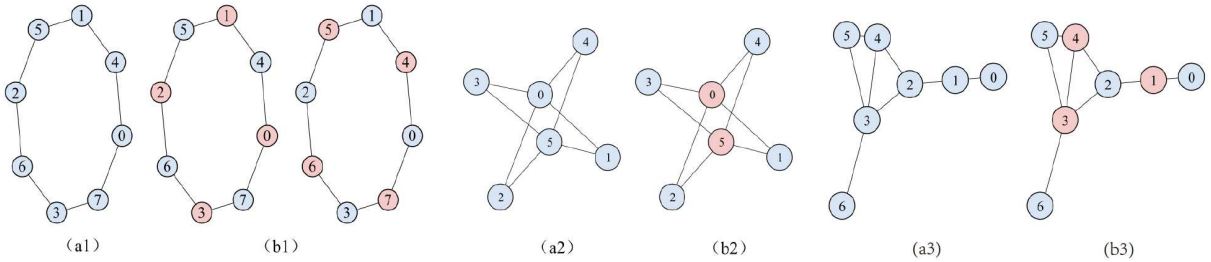


图 8　(网络版彩图) (a1) 2-正则图G_2; (b1) G_2对应的最小顶点覆盖问题的求解结果. (a2) 完全二分图G_3; (b2) G_3对应的最小顶点覆盖问题的求解结果. (a3) 随机7顶点图G_4; (b3) G_4对应的最小顶点覆盖问题的求解结果. 浅红色顶点代表理论上的正确求解结果

Figure 8　(Color online) (a1) 2-regular graph G_2; (b1) the solution result of the minimum vertex cover problem corresponding to G_2. (a2) complete bipartite graph G_3; (b2) the solution result of the minimum vertex cover problem corresponding to G_3. (a3) random 7-vertex graph G_4; (b3) the solution result of the minimum vertex cover problem corresponding to G_4. The light red vertices represent the theoretically correct solution results.

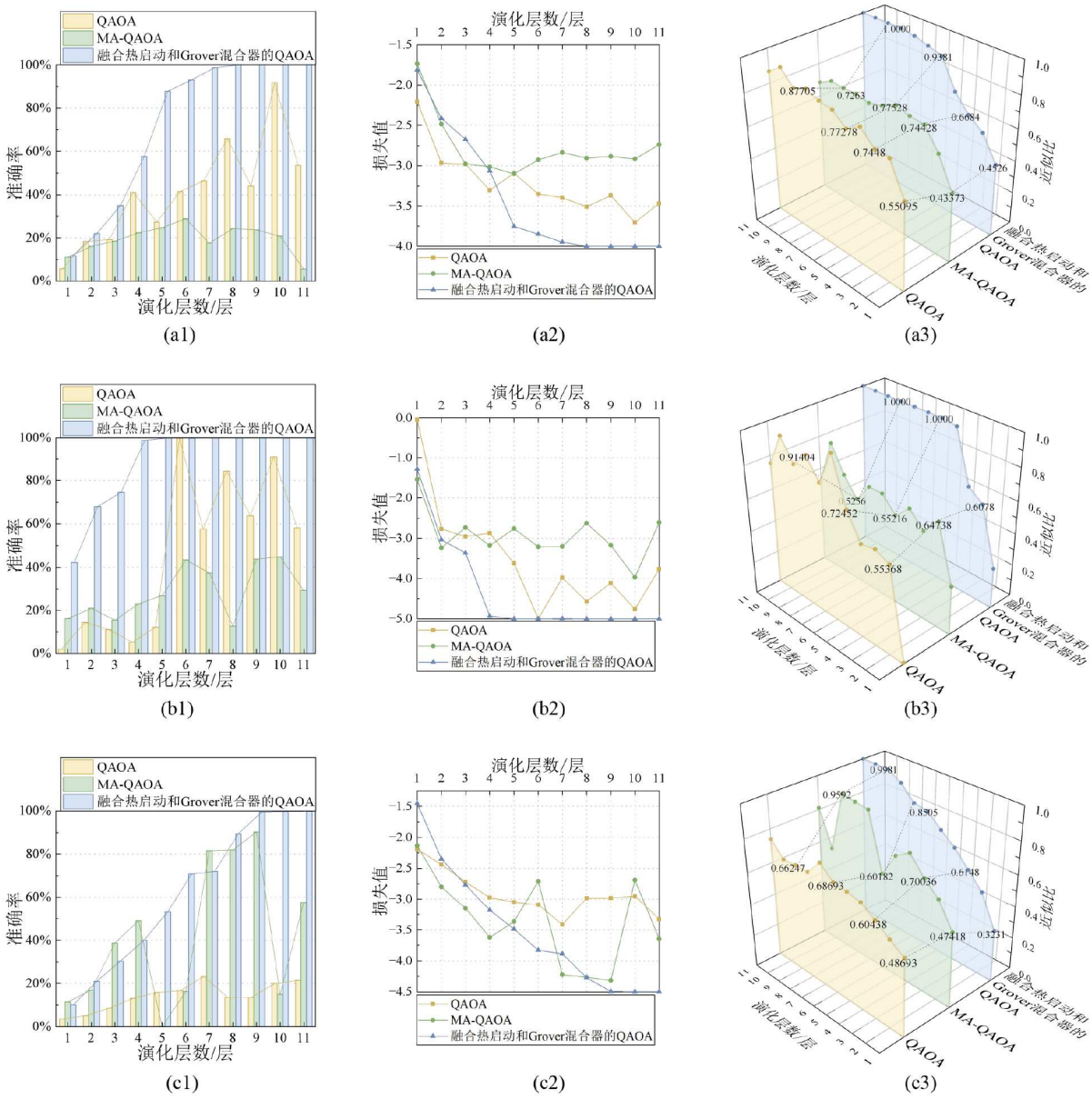


图 9　(网络版彩图)当演化层数从1递增至11时，分别使用QAOA、MA-QAOA、融合热启动和Grover混合器的QAOA解决图G_2，G_3和G_4的最小顶点覆盖问题的准确率、损失值和近似比对比图. (a1) G_2的准确率对比图; (b1) G_2的损失值对比图; (c1) G_2的近似比对比图. (a2) G_3的准确率对比图; (b2) G_3的损失值对比图; (c2) G_3的近似比对比图. (a3) G_4的准确率对比图; (b3) G_4的损失值对比图; (c3) G_4的近似比对比图. 黄色对应QAOA，绿色对应MA-QAOA，蓝色对应融合热启动和Grover混合器的QAOA

Figure 9　(Color online) When the number of evolution layers increases from 1 to 11, comparison charts of accuracy, loss value, and approximation ratio for solving the minimum vertex cover problems of graphs G_2, G_3, and G_4 with QAOA, MA-QAOA, and the QAOA integrating warm-start and Grover mixer, respectively. (a1) Accuracy comparison chart for G_2; (b1) loss value comparison chart for G_2; (c1) approximation ratio comparison chart for G_2. (a2) Accuracy comparison chart for G_3; (b2) loss value comparison chart for G_3; (c2) approximation ratio comparison chart for G_3. (a3) Accuracy comparison chart for G_4; (b3) loss value comparison chart for G_4; (c3) approximation ratio comparison chart for G_4. Yellow corresponds to QAOA, green corresponds to MA-QAOA, and blue corresponds to the QAOA integrating warm-start and Grover mixer.

混合器的QAOA的准确率在大多数时候差异较小，但较QAOA均有显著优势；三种算法在前期的损失值和近似比差异较小, 随演化层数增加, MA-QAOA与融合热启动和Grover混合器的QAOA在损失值和近似比表

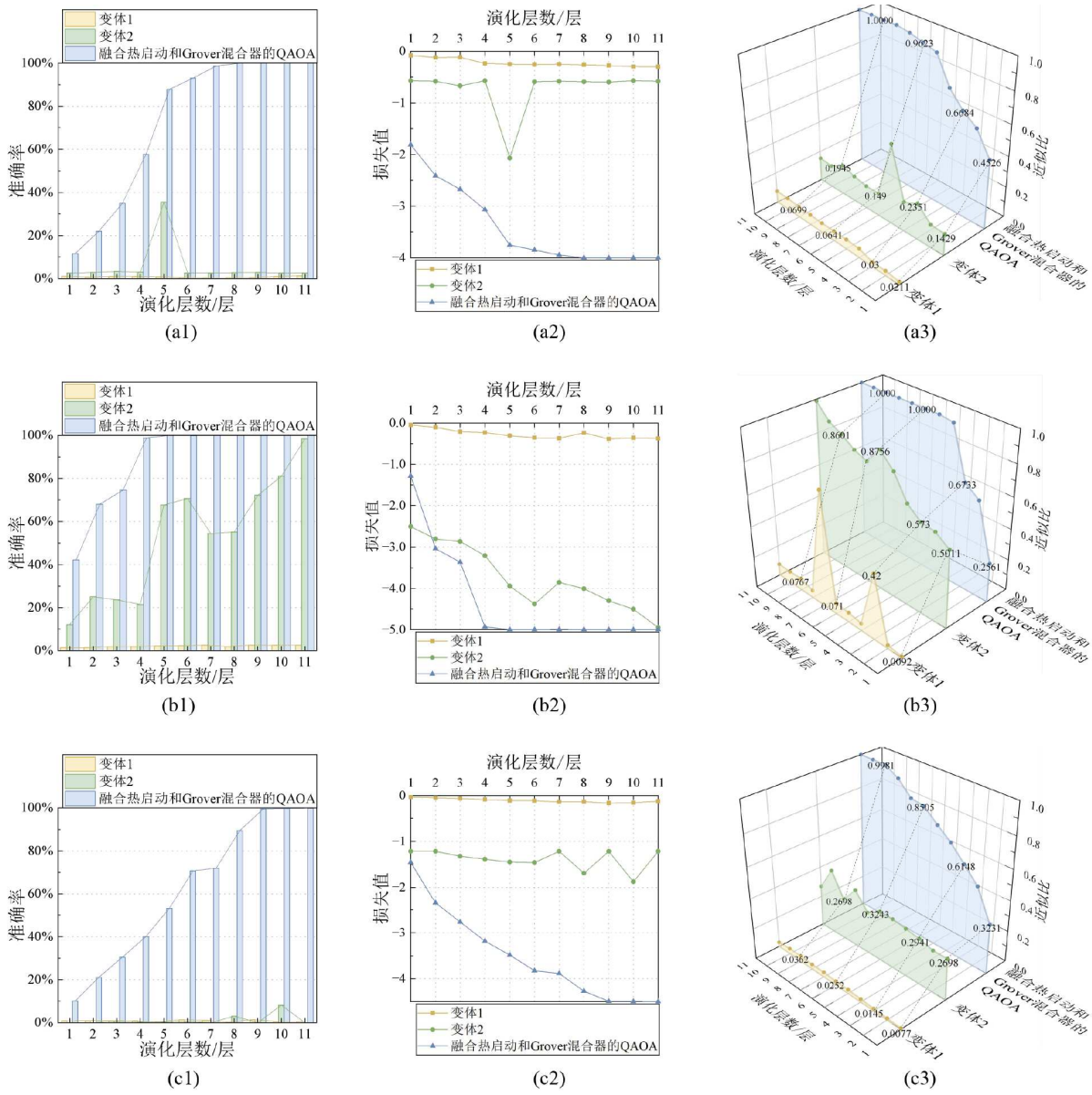


图 10　(网络版彩图)当演化层数从1递增至11时, 分别使用变体1、变体2、融合热启动和Grover混合器的QAOA解决图G_2, G_3和图G_4的最小顶点覆盖问题的准确率、损失值和近似比对比图. (a1) G_2的准确率对比图; (b1) G_2的损失值对比图; (c1) G_2的近似比对比图. (a2) G_3的准确率对比图; (b2) G_3的损失值对比图; (c2) G_3的近似比对比图. (a3) G_4的准确率对比图; (b3) G_4的损失值对比图; (c3) G_4的近似比对比图. 黄色对应变体1, 绿色对应变体2, 蓝色对应融合热启动和Grover混合器的QAOA

Figure 10　(Color online) When the number of evolution layers increases from 1 to 11, comparison charts of accuracy, loss value, and approximation ratio for solving the minimum vertex cover problems of graphs G_2, G_3, and G_4 with Variant 1, Variant 2, and the QAOA integrating warm-start and Grover mixer, respectively. (a1) Accuracy comparison chart for G_2; (b1) loss value comparison chart for G_2; (c1) approximation ratio comparison chart for G_2. (a2) Accuracy comparison chart for G_3; (b2) loss value comparison chart for G_3; (c2) approximation ratio comparison chart for G_3. (a3) Accuracy comparison chart for G_4; (b3) loss value comparison chart for G_4; (c3) approximation ratio comparison chart for G_4. Yellow corresponds to Variant 1, green corresponds to Variant 2, and blue corresponds to the QAOA integrating warm-start and Grover mixer.

现更为优异, 但前者波动较大, 而后者表现更为稳定.

可以得出结论, 相比于传统QAOA和MA-QAOA, 融合热启动和Grover混合器的QAOA总体上在准确率、损失值和近似比三个方面均表现出优势, 尤其是在演化层数增多时, 其性能提升更为明显; QAOA和MA-QAOA的各项指标在达到峰值后还会出现下降的

情况，而融合热启动和Grover混合器的QAOA的各项指标在达到峰值后不会出现下降的情况，表现更为稳定.

为了进一步厘清本文所提出算法性能提升的具体来源, 令本文融合算法的变体1为使用哈达玛门制备均匀叠加态作为初始态，但使用Grover混合器代替传统QAOA的X混合器的版本，本文融合算法的变体2为采用与本文融合算法相同的Dicke态作为初始态, 但使用传统QAOA的X混合器而非Grover混合器的版本, 实验图例仍选择图G_2, G_3和G_4, 仿真条件也与之前相同. 图10(a1)–(a3), (b1)–(b3)和(c1)–(c3)分别展示了当演化层数变化时，本文融合算法及其变体1和2在图G_2, G_3和G_4上的准确率、损失值和近似比对比图. 变体1和2的准确率、损失值的绝对值和近似比在绝大部分测试场景中均显著低于本文融合算法. 由此可知，仅凭Dicke初态或仅凭Grover混合器均无法带来性能提升，两者的有机结合才是本文融合算法取得优异性能的原因所在.

5　结论

针对传统QAOA在初始态制备和混合算子全局搜索能力方面的不足, 本文提出了一种融合热启动和Grover混合器的QAOA，在初始量子态制备阶段引入热启动策略, 并利用搜索能力更加精细的Grover混合算子代替传统QAOA的混合算子, 从而在求解顶点覆盖问题时表现出高效率和高稳定性. 实验结果表明，与传统QAOA和MA-QAOA相比，本文算法在准确率、损失值和近似比三个方面总体上均表现出优势, 尤其随着演化层数增多，其性能提升更为明显；传统QAOA和MA-QAOA的各项指标在达到峰值后还会出现下降的情况, 而本文算法的各项指标在达到峰值后不会出现下降的情况, 表现更为稳定. 本文算法有望为组合优化问题的求解提供一种高效且稳定的解决方案.

参考文献

1 Cerezo M, Arrasmith A, Babbush R, et al. Variational quantum algorithms. Nat Rev Phys, 2021, 3: 625–644
2 Tilly J, Chen H, Cao S, et al. The variational quantum eigensolver: A review of methods and best practices. Phys Rep, 2022, 986: 1–128
3 Lim H, Kang D H, Kim J, et al. Fragment molecular orbital-based variational quantum eigensolver for quantum chemistry in the age of quantum computing. Sci Rep, 2024, 14: 2422
4 Farhi E, Goldstone J, Gutmann S. A quantum approximate optimization algorithm. arXiv: 1411.4028
5 Choi J, Kim J. A tutorial on quantum approximate optimization algorithm (QAOA): Fundamentals and applications. In: Proceedings of the 2019 International Conference on Information and Communication Technology Convergence (ICTC). Jeju Island: IEEE, 2019. 138–142
6 Abbas A, Ambainis A, Augustino B, et al. Challenges and opportunities in quantum optimization. Nat Rev Phys, 2024, 6: 718–735
7 Shaydulin R, Li C, Chakrabarti S, et al. Evidence of scaling advantage for the quantum approximate optimization algorithm on a classically intractable problem. Sci Adv, 2024, 10: eadm6761
8 Pelofske E, Bärtschi A, Eidenbenz S. Short-depth QAOA circuits and quantum annealing on higher-order ising models. npj Quantum Inf, 2024, 10: 30
9 Blekos K, Brand D, Ceschini A, et al. A review on quantum approximate optimization algorithm and its variants. Phys Rep, 2024, 1068: 1–66
10 Abualigah L, AlNajdawi S, Ikotun A M, et al. Quantum approximate optimization algorithm: A review study and problems. In: Metaheuristic Optimization Algorithms. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2024. 147–165
11 Herrman R, Lotshaw P C, Ostrowski J, et al. Multi-angle quantum approximate optimization algorithm. Sci Rep, 2022, 12: 6781
12 Gaidai I, Herrman R. Performance analysis of multi-angle QAOA for $p > 1$. Sci Rep, 2024, 14: 18911
13 Zhou Z, Du Y, Tian X, et al. QAOA-in-QAOA: Solving large-scale MaxCut problems on small quantum machines. Phys Rev Appl, 2023, 19: 024027
14 Yoshioka T, Sasada K, Nakano Y, et al. Fermionic quantum approximate optimization algorithm. Phys Rev Res, 2023, 5: 023071
15 Chalupnik M, Melo H, Alexeev Y, et al. Augmenting QAOA ansatz with multiparameter problem-independent layer. In: Proceedings of the 2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE). Broomfield: IEEE, 2022. 97–103
16 Wurtz J, Love P J. Counterdiabaticity and the quantum approximate optimization algorithm. Quantum, 2022, 6: 635

17 Patel Y J, Jerbi S, Bäck T, et al. Reinforcement learning assisted recursive QAOA. EPJ Quantum Technol, 2024, 11: 6
18 Bae E, Lee S. Recursive QAOA outperforms the original QAOA for the MAX-CUT problem on complete graphs. Quantum Inf Process, 2024, 23: 78
19 Vijendran V, Das A, Koh D E, et al. An expressive ansatz for low-depth quantum approximate optimisation. Quantum Sci Technol, 2024, 9: 025010
20 Chiang C F, Alsing P M. Grover search inspired alternating operator ansatz of quantum approximate optimization algorithm for search problems. Quantum Inf Process, 2023, 22: 221
21 Mandl A, Barzen J, Bechtold M, et al. Amplitude amplification-inspired QAOA: Improving the success probability for solving 3SAT. Quantum Sci Technol, 2024, 9: 015028
22 Kotil A, Pelofske E, Riedmüler S, et al. Quantum approximate multi-objective optimization. Nat Comput Sci, 2025, 5: 1168–1177
23 Cai P, Shen K, Yang T, et al. Enhancing quantum approximate optimization with CNN-CVaR integration. Quantum Inf Process, 2025, 24: 37
24 Meng F, Liu Y, Wang L, et al. Low-depth quantum approximate optimization algorithm for maximum likelihood detection in massive MIMO. Quantum Inf Process, 2025, 24: 294
25 Egger D J, Mareček J, Woerner S. Warm-starting quantum optimization. Quantum, 2021, 5: 479
26 Bärtschi A, Eidenbenz S. Grover mixers for QAOA: Shifting complexity from mixer design to state preparation. In: Proceedings of the 2020 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE). Denver: IEEE, 2020. 72–82
27 Liu Y C, Yu X D, Shang J, et al. Efficient verification of dicke states. Phys Rev Appl, 2019, 12: 044020
28 Bärtschi A, Eidenbenz S. Deterministic preparation of Dicke states. In: Fundamentals of Computation Theory. Cham: Springer International Publishing, 2019. 126–139
29 Bärtschi A, Eidenbenz S. Short-depth circuits for Dicke state preparation. In: Proceedings of the 2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE). Broomfield: IEEE, 2022. 87–96
30 Lucas A. Ising formulations of many NP problems. Front Phys, 2014, 2: 5
31 Wang S, Fontana E, Cerezo M, et al. Noise-induced barren plateaus in variational quantum algorithms. Nat Commun, 2021, 12: 6961
32 Boy C, Wales D J. Energy landscapes for the quantum approximate optimization algorithm. Phys Rev A, 2024, 109: 062602

Quantum approximate optimization algorithm integrating warm-start and Grover mixer and its application to the vertex cover problem

WU Heng[1], GAN Zhi-Gang[1] & YE Tian-Yu[1,2*]

[1] *College of Information and Electronic Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China*
[2] *Chifeng Industry Vocational Technology College, Chifeng 024000, China*
**Corresponding author (email: yetianyu@zjgsu.edu.cn)*

The quantum approximate optimization algorithm (QAOA) is a hybrid quantum-classical algorithm and has shown great potential in solving combinatorial optimization problems. However, the traditional QAOA has certain limitations in initial state preparation and the mixing operator's global search capability. In order to overcome these limitations, this study proposes the QAOA integrating warm-start and Grover mixer, which introduces a warm-start strategy in the initial quantum state preparation stage and uses the Grover mixing operator with finer search capability to replace the mixing operator in traditional QAOA. Experimental results demonstrate that compared to traditional QAOAs and MA-QAOA, the proposed algorithm performs better as a whole in solving the vertex cover problem in terms of accuracy, loss value, and approximation ratio; notably, its performance improvements become more pronounced with an increasing number of evolution steps; moreover, all indicators of traditional QAOA and MA-QAOA may decline after reaching the peak, while all indicators of the proposed algorithm do not decline after reaching the peak and perform more stably.

quantum approximate optimization algorithm, vertex cover problem, warm-start strategy, Grover mixer, amplitude amplification

PACS: 03.67.Lx, 03.67.Ac, 02.10.Ox

doi: 10.1360/SSPMA-2026-0199