



Kalb-Ramond场中带电黑洞的全息爱因斯坦环

陈刚¹, 桂金玉², 曾晓雄^{3*}, 李丽仿^{4*}, 李磐⁴, 徐鹏^{4,5}

1. 重庆工商大学人工智能学院, 重庆 400067

2. 重庆交通大学土木工程学院, 重庆 400074

3. 重庆师范大学物理与电子工程学院, 重庆 401331

4. 中国科学院力学研究所微重力实验室, 北京 100190

5. 兰州大学兰州理论物理中心, 兰州 730000

*联系人, 曾晓雄, E-mail: xxzengphysics@163.com; 李丽仿, E-mail: lilifang@imech.ac.cn

收稿日期: 2024-08-22; 接受日期: 2024-11-18; 网络出版日期: 2025-04-11

国家自然科学基金(编号: 12375043)和重庆市自然科学基金创新发展联合基金(编号: CSTB2022NSCQ-LZX0021, CSTB2023NSCQ-MSX0594)资助项目

摘要 基于全息对偶, 本文研究了Kalb-Ramond (KR)场背景下带电黑洞的爱因斯坦环. 当波源固定在AdS边界上时, 在边界的另一侧我们得到了响应函数. 进一步, 利用带凸透镜的光学系统, 得到了黑洞的全息爱因斯坦环. 结果发现, 随着观测者位置的变化, 屏幕上的图像从轴对称环变为弧形, 最终变为一个单独的发光点. 我们还发现随着洛伦兹破缺参数 ℓ 增大, 爱因斯坦环的环半径减小; 随着温度增高, 爱因斯坦环半径减小; 随着化学势增大, 爱因斯坦环半径减小. 此外, 我们还从几何光学的角度探讨了黑洞的爱因斯坦环, 结果表明, 几何光学中爱因斯坦环的入射角与波动光学中爱因斯坦环在屏上的角向距离完全一致, 这一结果验证了波动光学在研究爱因斯坦环问题上的有效性.

关键词 带电黑洞, KR场, 波动光学, 全息爱因斯坦环, 响应函数

PACS: 11.25.Tq, 04.70.-s, 04.50.Kd

1 引言

自Anti-de Sitter/Conformal Field Theory or Response (AdS/CFT)对偶^[1]提出以来, 该理论及其应用在物理学界引发了广泛而深入的探讨. AdS/CFT对偶的重要性, 不仅体现在它检验了理论自身的一致性, 更在于为强耦合场理论的研究开辟了一个全

新的视角和平台. 鉴于强耦合系统的复杂性, 传统的研究手段难以直接揭示其深层规律, 而AdS/CFT对偶则巧妙地提供了一种间接而有效的途径, 使人们能够借助引力理论的强大工具来探索量子场论的复杂性.

近年来, AdS/CFT对偶在物理学的多个分支中得到了广泛应用. 在凝聚态物理领域, 全息超导^[2,3]的研

引用格式: 陈刚, 桂金玉, 曾晓雄, 等. Kalb-Ramond场中带电黑洞的全息爱因斯坦环. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2025, 55: 100411
Chen G, Gui J-Y, Zeng X-X, et al. Holographic Einstein ring of charged black holes in Kalb-Ramond field (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2025, 55: 100411, doi: [10.1360/SSPMA-2024-0341](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0341)

究揭示了超导现象背后新颖的物理机制; 费米液体与非费米液体^[4,5]的研究加深了人们对这两类物质性质的认识; 在量子相变中的金属-绝缘体相变^[6-8]等领域, 全息对偶更是展现出了其强大的预测与解释能力.

自事件视界望远镜(EHT)项目组成功捕捉到M87星系中心及银河系中心的黑洞阴影图像^[9,10]以来, 黑洞的阴影图像迅速成为理论物理学家与天体物理学家关注的焦点. 目前, 黑洞阴影已在不同的时空背景下被广泛研究. 如双黑洞系统的阴影^[11]、不同黑洞形态与时空几何结构下的黑洞阴影^[12]、虫洞^[13]和裸奇点的阴影^[14]. 相关研究表明, 在黑洞事件视界之外存在一个明亮的环状结构, 通常被称为光子环或者爱因斯坦环. 光子环不仅可以作为检验广义相对论的探针, 还蕴含着关于宇宙本质与结构的深层次信息.

值得注意的是, 以往对黑洞阴影的研究大多基于几何光学的框架, 利用光线在黑洞附近的弯曲行为来描绘其轮廓. 最近, Hashimoto等人^[15]提出利用波动光学来深入研究黑洞阴影, 并成功重构了黑洞阴影中的爱因斯坦环. 特别是对AdS黑洞, 黑洞引力透镜效应产生的黑洞全息图像, 全息图像可以根据响应函数来构建爱因斯坦环^[16]. 目前, 这个工作已被推广到了全息超导模型^[17]、带电的黑洞^[18]以及各种引力背景^[19-22]. 这些研究证实, 黑洞事件视界外确实存在一个明亮的光子环, 其形状很大程度上依赖于观测者的视角.

Kalb-Ramond (KR)^[23]场, 作为一种源自超弦理论的反对称张量场, 其各种性质已被广泛研究^[24-26]. 文献^[27]成功推导出了类似施瓦西黑洞的解. 文献^[28]研究了这种类似施瓦西黑洞中的粒子运动、引力透镜效应以及能量转换过程. 文献^[29]获得了旋转KR黑洞解, 并考察了由该黑洞引起的光线偏折和阴影. 此外, 在KR场背景下的带电黑洞也取得了一系列进展. 例如, 文献^[30]已经成功推导出静态、球对称带电黑洞在KR引力背景下的精确解, 分析了该解的热力学性质. 文献^[31]在KR场中推导出了带宇宙常数的带电黑洞的精确解, 并研究了相应的热力学性质.

综上所述, 带电黑洞在具有KR场背景的引力研究中具有重要的理论意义和实际应用价值. 相关研究不仅深化了我们对黑洞物理特性的理解, 还为探索宇宙的奥秘提供了新的工具和思路. 然而, 目前该黑洞的阴影图像, 特别是爱因斯坦环的研究尚属空白. 因此, 本文基于AdS/CFT对偶, 在KR场引起的洛伦兹破缺的

引力背景下, 研究带电黑洞的爱因斯坦环, 并细致考察洛伦兹破缺参数和电荷对环结构的影响.

2 KR场中的黑洞及其响应函数

研究洛伦兹对称性破缺的一般理论框架是标准模型扩展^[32]. 在这个框架内大黄蜂模型通过引入一个矢量场 $\mathbf{B}_\mu$ (即大黄蜂场)来扩展广义相对论, 且该场与重力非最小耦合^[33,34]. 当大黄蜂场获得非零真空期望值(VEV)时, 它作为一个固定的背景场, 自发地打破洛伦兹对称.

相应地, 当KR场获得VEV时, 由于KR场与引力的非最小耦合, VEV背景自发地打破了粒子局域洛伦兹不变性. 在存在宇宙常数的情况下, 由KR场引起的洛伦兹破缺的引力理论中, 带电黑洞的度规和静电势为^[31]

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{(1-\ell)r}, \quad (2)$$

其中,

$$h(r) = \frac{1}{1-\ell} - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{(1-\ell)^2 r^2} - \frac{Ar^2}{3(1-\ell)}, \quad (3)$$

式中, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, M 是黑洞质量, Q 是黑洞的电荷参数, ℓ 是洛伦兹破缺参数, $A = -3/\bar{l}^2$ 是宇宙学常数, 其中 $\bar{l}$ 是AdS半径, 在后面计算中我们取 $\bar{l} = 1$. 当宇宙常数消失, 该解就简化为类Reissner-Nordstrom (RN)解^[31]. 当电荷消失, 该解简化为类Schwarzschild-(A)dS度规^[30]. 当洛伦兹破缺参数 ℓ 为0时, 该度规简化为RN-(A)dS度规.

对上述度规函数做变量代换, $r=1/z$ 后, 当 $z=\infty$ 时, 出现时空奇点; 当 $z=0$ 时, 对应系统在AdS边界. 式(1)-(3)可写为

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} \left[-h(z)dt^2 + \frac{dz^2}{h(z)} + d\Omega^2 \right], \quad (4)$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{(1-\ell)}(z - z_h), \quad (5)$$

$$h(z) = -2Mz^3 + \frac{Q^2 z^4}{(1-\ell)^2} + \frac{z^2}{1-\ell} + \frac{1}{1-\ell}, \quad (6)$$

式中, z_h 为黑洞的事件视界, 当 $z_h \rightarrow \infty$ 时, 可得纯AdS时

空. 在边界上, 系统的化学势为 $\mu = z_h Q / (1 - \ell)$, 黑洞的温度由霍金温度的定义可表示成

$$T = -\frac{-3 + Q^2 z_h^4 + z_h^2(\ell - 1) + 3\ell}{4\pi z_h(\ell - 1)^2}. \quad (7)$$

本文将基于如下克莱因-戈尔登方程研究标量场的动力学^[16]:

$$D_\mu D^\mu \Psi - M^2 \Psi = 0. \quad (8)$$

为了方便地求解克莱因-戈尔登方程, 我们引入超前爱丁顿坐标^[18]. 因为在这一坐标系中, 物理量在事件视界处是连续的, 方便对黑洞的本质进行研究. 引入坐标:

$$v \equiv t + z_* = t - \int \frac{1}{h(z)} dz. \quad (9)$$

则式(4)和(5)可以变换成一下形式:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} [-h(z) dv^2 - 2dz dv + d\Omega^2], \quad (10)$$

$$\Phi_a = -\Phi(r)(dv)_a. \quad (11)$$

在这种情况下, 规范变换也被应于电磁四势. 我们取 $e=1$, $M^2=-2$, 并定义 $\Phi=z\Psi$. 在 AdS 边界处, 标量场的渐近解为

$$\Psi(v, z, \theta, \varphi) = J_K(v, \theta, \varphi) + \langle K \rangle z + \mathcal{K}(z^2). \quad (12)$$

根据规范引力对偶关系, J_K 为边界共形场中的物质源^[35], 其相应的对偶算符期望值即响应函数由下式给出:

$$\langle K \rangle_{JK} = \langle K \rangle - (\partial_v - i\mu)JK, \quad (13)$$

其中, $\langle K \rangle$ 为波源关闭时的对偶算符的期望值.

在 AdS 边界南极 ($\theta_0=\pi$), 我们选取单色轴对称高斯波包作为波源, 见图 1.

$$\begin{aligned} J_K(v, \theta) &= e^{-i\omega v} (2\pi\eta^2)^{-1} \exp\left[-\frac{(\pi-\theta)^2}{2\eta^2}\right] \\ &= e^{-i\omega v} \sum_{l=0}^{\infty} C_{l0} Y_{l0}(\theta), \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $Y_{l0}(\theta)$ 为球谐波函数, η 为高斯源产生的波的宽度, 且 $\eta \ll \pi$. 通过计算, $Y_{l0}(\theta)$ 的系数 C_{l0} 为

$$C_{l0} = (-1)^l \sqrt{\frac{l+1/2}{2\pi}} \exp\left[-\frac{(l+1/2)^2 \eta^2}{2}\right]. \quad (15)$$

考虑到时空的对称性, 标量场 $\Psi(v, z, \theta, \varphi)$ 可分

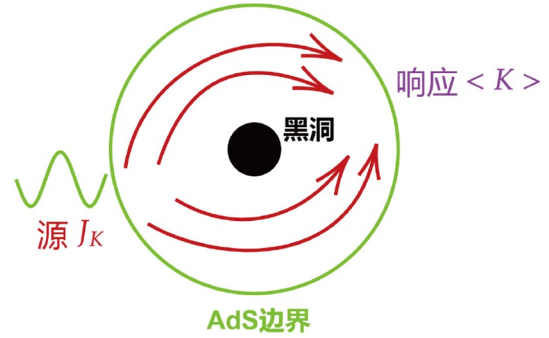


图 1 (网络版彩图) 响应函数与源的示意图

Figure 1 (Color online) Response function and source relationship diagram.

解为

$$\Psi(v, z, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l e^{-i\omega v} C_{l0} Z_l(z) Y_{ln}(\theta), \quad (16)$$

式中 Z_l 满足运动方程

$$\begin{aligned} z^2 h Z_l'' + (z^2 h' - 2i e z^2 \Phi + 2i \omega z^2) Z_l' + \\ [(2-2h) + z h' - z^2 i e \Phi' - z^2 l(l+1)] Z_l = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

根据规范引力对偶, Z_l 在 AdS 边界附近可展开为

$$\lim_{z \rightarrow 0} Z_l = 1 + \langle K \rangle_l z + \mathcal{K}(z^2). \quad (18)$$

对应的响应函数 $\langle K \rangle$ 可展开为^[36]

$$\langle K \rangle_{JK} = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-i\omega v} C_{l0} \langle K \rangle_{JKl} Y_{l0}(\theta), \quad (19)$$

$$\langle K \rangle_{JKl} = \langle K \rangle_l + i\tilde{\omega}. \quad (20)$$

函数 Z_l 有两个边界条件: 一个在事件视界 $z=z_h$ 处; 另一个是在 $z=0$ 处, 此时波源 J_K 为标量场在无穷远处的渐近形式, 由式(17)可知 $Z_l(0)=1$. 采用伪谱法, 我们得到了 Z_l 相应的数值解, 并提取出 $\langle K \rangle_l$ ^[15,16]. 结合式(19), 利用 $\langle K \rangle_l$ 得到总响应函数的值. 考虑到总响应距离波源位置较远, 因此可以忽略式(13)中与波源相关的第二项, 则式(19)中的 $\langle K \rangle_{JKl}$ 可以用 $\langle K \rangle_l$ 代替.

图2-6展示了不同参数对应的响应函数的幅度, 从图2可知响应函数的振幅随洛伦兹破缺参数 ℓ 的增大而增大. 从图3可知响应函数的周期随角频率 ω 的增大而变小. 从图4可知响应函数的振幅随场电荷 e 的增大而增大. 最后从图5和6可知, 响应函数的振幅分别随化学势 μ 和温度 T 的增大而变小.

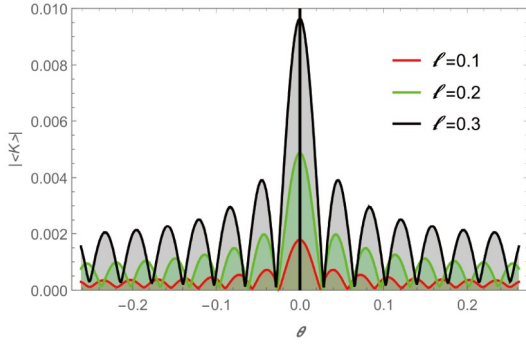


图 2 (网络版彩图)不同 l 对响应函数的影响, 其中 $Q=0.6$, $z_h=0.5$, $\omega=100$, $e=1$
Figure 2 (Color online) Effect of different l on the response function, where $Q=0.6$, $z_h=0.5$, $\omega=100$, $e=1$.

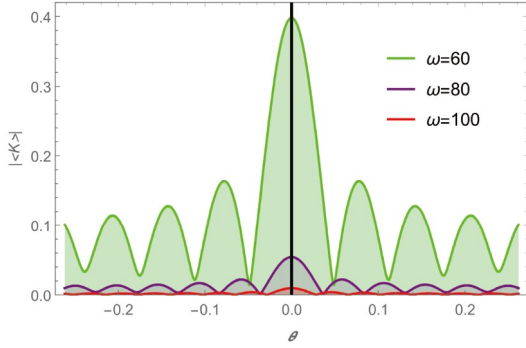


图 3 (网络版彩图)不同 ω 对响应函数的影响, 其中 $l=0.3$, $Q=0.6$, $z_h=0.5$, $e=1$
Figure 3 (Color online) Effect of different ω on the response function, where $l=0.3$, $Q=0.6$, $z_h=0.5$, $e=1$.

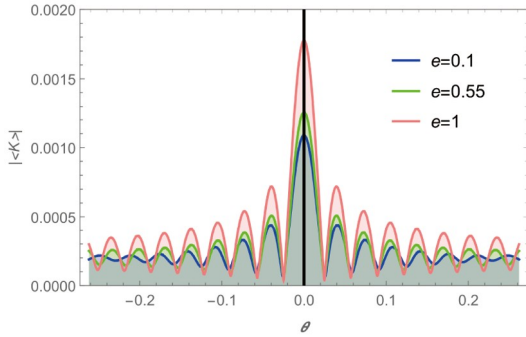


图 4 (网络版彩图)不同 e 对响应函数的影响, 其中 $l=0.3$, $Q=0.6$, $z_h=0.5$, $\omega=100$
Figure 4 (Color online) Effect of different e on the response function, where $l=0.3$, $Q=0.6$, $z_h=0.5$, $\omega=100$.

3 全息环的形成

为了观察爱因斯坦环, 需引入一个带凸透镜的光

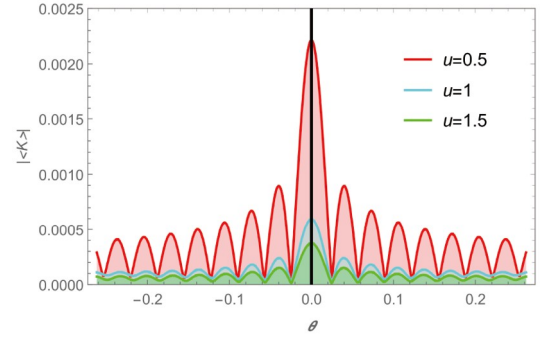


图 5 (网络版彩图)不同 μ 对响应函数的影响, 其中 $l=0.3$, $z_h=0.5$, $\omega=100$, $e=1$. 从上到下 μ 的取值分别对应 $Q=0.9$, 1.8, 2.7
Figure 5 (Color online) Effect of different μ on the response function, where $l=0.3$, $z_h=0.5$, $\omega=100$, $e=1$. From top to bottom, the values of μ correspond to $Q=0.9$, 1.8, 2.7, respectively.

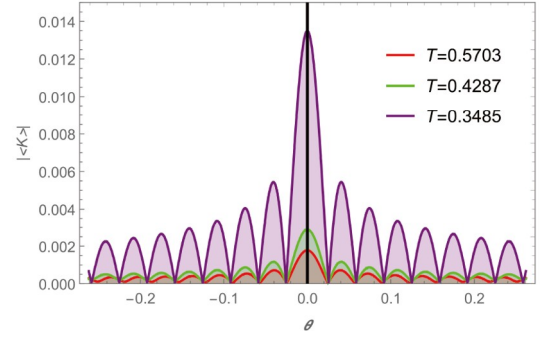


图 6 (网络版彩图)不同 T 对响应函数的影响, 其中 $l=0.3$, $Q=0.6$, $\omega=100$, $e=1$. 从上到下 T 的取值分别对应 $z_h=0.5$, 0.7, 0.9
Figure 6 (Color online) Effect of different T on the response function, where $l=0.3$, $Q=0.6$, $\omega=100$, $e=1$. From top to bottom, the values of T correspond to $z_h=0.5$, 0.7, 0.9, respectively.

学装置^[37]. 凸透镜的目的是将平面波转换为球面波, 在边界处观测角为 θ_{obs} . 通过旋转坐标 $\{\theta, \varphi\}$ 得到一个新的坐标 $\{\theta', \varphi'\}$, 并且满足如下关系^[18]:

$$\sin\theta'\cos\varphi' + i\cos\theta' = e^{i\theta_{\text{obs}}}(\sin\theta\cos\varphi + i\cos\theta), \quad (21)$$

其中, $\theta'=0$, $\varphi'=0$ 为观测中心. 此外, 对于一个虚拟的光学系统, 在观测点的边界处建立一个笛卡儿坐标系 (x, y, z) , $(x, y)=(\theta'\cos\varphi', \theta'\sin\varphi')$, 在二维平面 (x, y) 上调整凸透镜, 分别用 f 和 d 表示其焦距和对应的半径. 定义坐标 $(x, y, z)=(x_{\text{SC}}, y_{\text{SC}}, z_{\text{SC}})$ 为球面屏幕上的坐标, 满足关系 $x_{\text{SC}}^2 + y_{\text{SC}}^2 + z_{\text{SC}}^2 = f^2$. 通过凸透镜前和后的波分别定义为 $\Psi(\tilde{x})$ 和 $\Psi_t(\tilde{x})$, 其关系满足

$$\Psi_T(\tilde{x}) = e^{-i\omega \frac{|\tilde{x}|^2}{2f}} \Psi(\tilde{x}). \quad (22)$$

屏幕上的波函数图像可表示成^[18]

$$\begin{aligned} \Psi_{SC}(\tilde{x}_{SC}) &= \int_{|\tilde{x}| \leq d} d^2x \Psi_T(\tilde{x}) e^{i\omega R} \\ &\propto \int_{|\tilde{x}| \leq d} d^2x \Psi(\tilde{x}) e^{-i\frac{\omega}{2f} \tilde{x} \cdot \tilde{x}_{SC}} \\ &= \int d^2x \Psi(\tilde{x}) \sigma(\tilde{x}) e^{-i\frac{\omega}{2f} \tilde{x} \cdot \tilde{x}_{SC}}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中, R 为透镜点 $(x, y, 0)$ 到屏幕点 $(x_{SC}^2, y_{SC}^2, z_{SC}^2)$ 的距离, $\sigma(\tilde{x})$ 为窗口函数, 其定义为

$$\sigma(\tilde{x}) := \begin{cases} 1, & 0 \leq |\tilde{x}| \leq d, \\ 0, & |\tilde{x}| > d. \end{cases} \quad (24)$$

从式(23)中可以清楚地看到, 屏幕上的观测波与入射波通过傅里叶变换相关联.

在本文中, 可把响应函数当作入射波 $\Psi(\tilde{x})$, 利用式(23), 可以在屏上观测到爱因斯坦环.

下面研究洛伦兹破缺参数 ℓ 及其他相关物理参数对爱因斯坦环的影响. 波源波宽 $\eta=0.02$, 凸透镜曲率半径 $d=0.6$, 观察 AdS 边界全息爱因斯坦环的图像轮廓.

图7考察的是洛伦兹破缺参数 ℓ 及观测者位置 θ_{obs} 对爱因斯坦环的影响. 在 $\theta_{\text{obs}}=0$ 处, 观测者位于 AdS 边界的北极, 对于不同的 ℓ , 都观测到一系列轴对称的同心圆环. 当 $\theta_{\text{obs}}=\pi/6$ 时(见图7第二列), 爱因斯坦环由严格的球对称变为轴对称且部分亮度减弱. 当 θ_{obs} 增加到 $\pi/3$ 和 $\pi/2$ 时环状逐渐消失, 特别是在 $\theta_{\text{obs}}=\pi/2$ 时只有亮点出现. 因此爱因斯坦环的形状很大程度上依赖于观测者的位置. 从图7的第一列发现, 随着洛伦兹破缺参数 ℓ 增大, 爱因斯坦环的环半径减小. 这一现象在图8中可以更清楚地观察到. 图中横坐标对应的峰值即光子环的位置. 我们可以看到当 $\ell=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ 时, 横坐标峰值分别为 0.93, 0.83, 0.7, 0.56, 不难看出, 随着洛伦兹破缺参数 ℓ 增大, 爱因斯坦环的环半径减小.

下面讨论化学势 $\mu=1$ 时, 温度 T 对爱因斯坦环的影响. 为了方便, 我们只考虑 $\theta_{\text{obs}}=0$ 的情况, 如图9所示, 随着 T 降低, 环半径变大. 同样我们可以画出其光度图, 如图10所示. 当 $T=0.5018$, $xs/f=0.23$ 时, 光度最大. 当 T 逐渐降低, 光度对应的横坐标的峰值逐渐增大, 也就是说随着 T 降低, 环半径增大.

我们还可以考虑化学势 μ 对爱因斯坦环的影响, 将固定温度 $T=0.5$. 如图11所示, 随着化学势 μ 变大, 环半

径减小. 这一变化趋势在图12中可以更清楚地看到, 当 $\mu=0.1$, $xs/f=0.53$ 时, 光度最大. 当 μ 增加到 1 时, $xs/f=0.23$ 光度最大. 也就是说随着 μ 逐渐增大, 光度最大所对应的横坐标逐渐减小, 意味着 μ 增大而环半径减小.

我们还可以研究波源, 如角频率 ω , 对爱因斯坦环的影响. 如图13所示, 当角频率增加, 爱因斯坦环更加清晰. 这是因为在高频时几何光学更加明显. 为了全面理解图13, 我们在图14中也描绘了光度与角频率的关系. 很明显仅在高频时才能很好地观测到环半径.

前面我们分别研究了非极端黑洞中洛伦兹破缺参数、温度、化学势、波源角频率对爱因斯坦环的影响. 这里我们考虑极端黑洞, 此时黑洞的化学势、温度都是固定的. 从图15中可以看出, 随着洛伦兹破缺参数 ℓ 的增大, 爱因斯坦环的环半径减小. 很显然, 洛伦兹破缺参数 ℓ 对爱因斯坦环的影响和非极端黑洞完全一样, 但不同的是, 此时的环半径不依赖于化学势和温度, 因为此时是一个零温系统.

4 几何光学

我们将从几何光学的角度研究爱因斯坦环并检验所得结果是否与波动光学一致. 这里主要研究光子的入射角. 基于方程(1)和(2)所描述的球对称时空背景, 我们可以定义度规中的守恒量 $\tilde{\omega} = h(r) \partial t / \partial \kappa$ 和 $\tilde{L} = r^2 \partial \varphi / \partial \kappa$, 其中 $\tilde{\omega}$ 是光子能量, $\tilde{L}$ 是光子的角动量, κ 是光子轨道的仿射参数. 由于时空的球对称性, 我们仅考虑光子轨道位于赤道 $\theta \equiv \pi/2$ 的情况. 四速向量 $v^\gamma \equiv (d/d\kappa)^\gamma$ 满足

$$\begin{aligned} &-h(r)(dt/d\kappa)^2 + h(r)^{-1}(dr/d\kappa)^2 \\ &+ r^2 \sin^2 \theta (d\varphi/d\kappa)^2 = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

也就是说

$$\dot{r}^2 = \tilde{\omega} - \tilde{L}^2 z(r), \quad (26)$$

其中, $z(r) = h(r)/r^2$, $\dot{r} = \partial r / \partial \kappa$. 以边界 θ_{in} 为法向量的入射角 $n^\gamma \equiv \partial / \partial r^\gamma$ 定义为^[18,38]

$$\cos \theta_{\text{in}} = \frac{g_{\alpha\beta} v^\alpha n^\beta}{|v||n|} \Big|_{r=\infty} = \sqrt{\frac{\dot{r}^2/h}{\dot{r}^2/h + \tilde{L}^2/r^2}} \Big|_{r=\infty}, \quad (27)$$

进一步化简可得

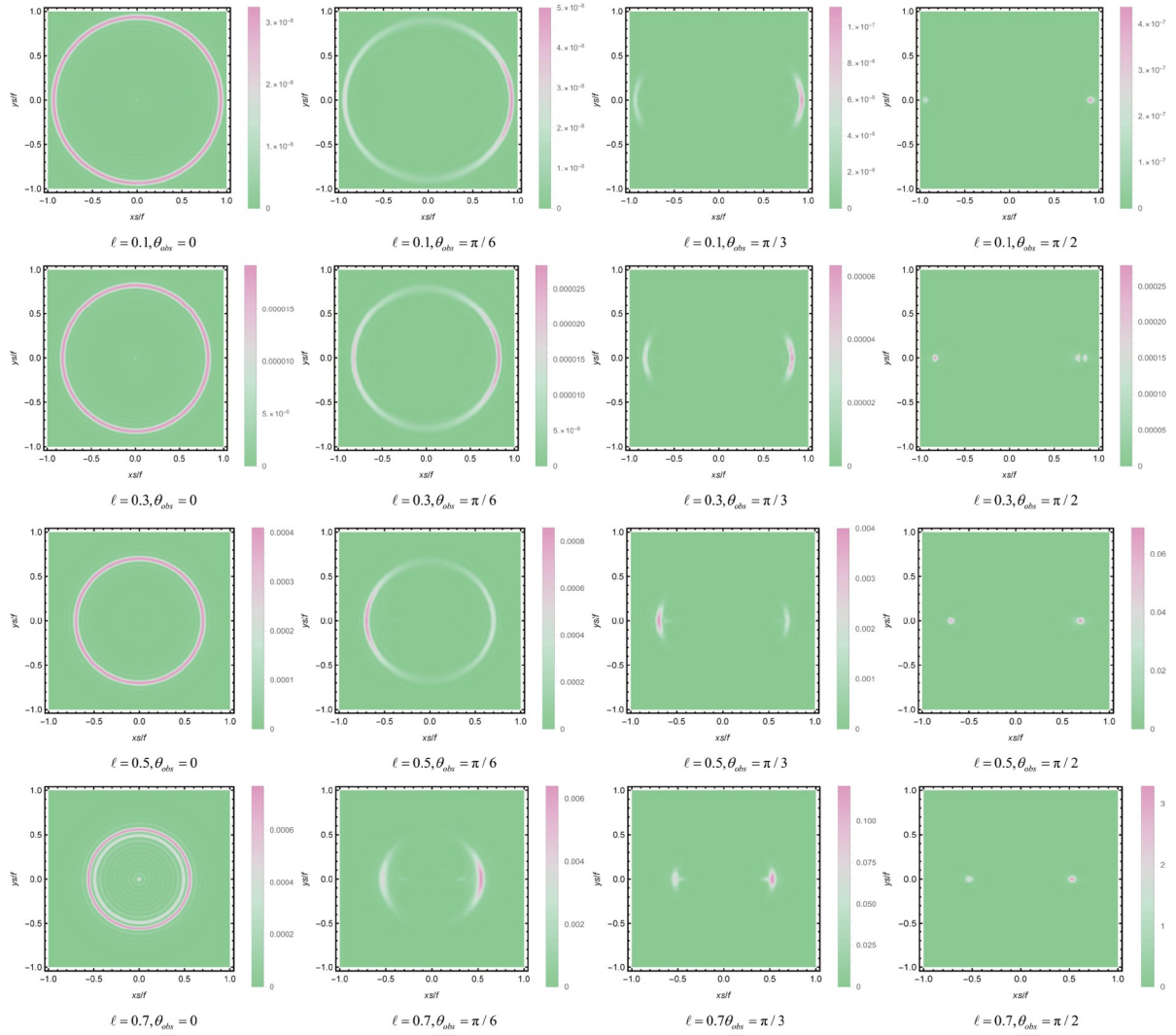


图 7 (网络版彩图)在不同观测角时不同 ℓ 对应的响应函数在屏上的观测图像, 其中 $Q=0.6$, $z_h=1$, $\omega=100$, $e=0.05$

Figure 7 (Color online) Observational appearance of the response function on the screen for different ℓ at various observation angles, where $Q=0.6$, $z_h=1$, $\omega=100$, $e=0.05$.

$$\sin\theta_{\text{in}}^2 = 1 - \cos\theta_{\text{in}}^2 = \frac{\tilde{L}^2 z(r)}{r^2 + \tilde{L}^2 z(r)} \bigg|_{r=\infty} = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\omega}^2}. \quad (28)$$

因此, 光子轨道从边界进入时空的角度满足如下关系式:

$$\sin\theta_{\text{in}} = \tilde{L} / \tilde{\omega}. \quad (29)$$

如果测地线的两个端点与黑洞的中心在一条直线上, 由于轴对称^[16], 观测者看到的是一个半径与入射角 θ_{in} 相对应的环形像. 特别是当光子到达光子球的位置时, 光子既不会逃离黑洞, 也不会落入黑洞, 而是开

始围绕黑洞不断旋转. 此时的角动量用 L_p 标记, 在光子环处光子的轨道运动方程由如下条件决定^[15,16,18]:

$$\dot{r} = 0, \quad dz/dr = 0. \quad (30)$$

此外, 由图16可知,

$$\sin\theta_R = r_R / f. \quad (31)$$

物理上, 光子的入射角和光子环在屏上的角向距离都描述了观察者可以观察到的光子环的角度, 它们本质上应该是相等的, 即

$$r_R / f = L_p / \tilde{\omega}. \quad (32)$$

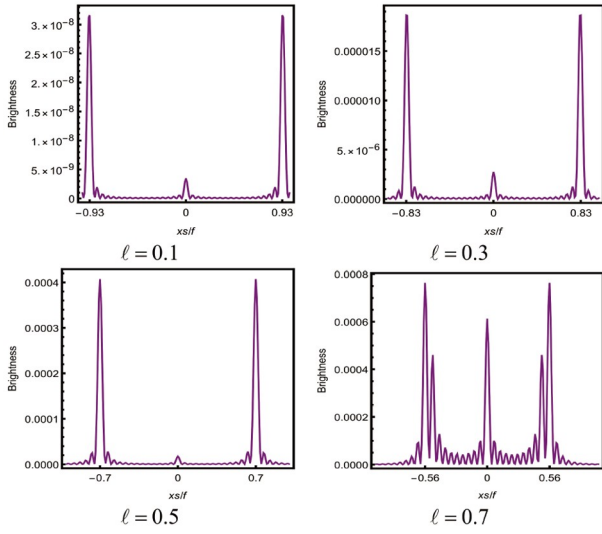


图 8 (网络版彩图) 参数 ℓ 对光度的影响, 其中 $\theta_{\text{obs}}=0$, $Q=0.6$, $z_h=1$, $\omega=100$, $e=0.05$

Figure 8 (Color online) The effect of ℓ on the brightness, where $\theta_{\text{obs}}=0$, $Q=0.6$, $z_h=1$, $\omega=100$, $e=0.05$.

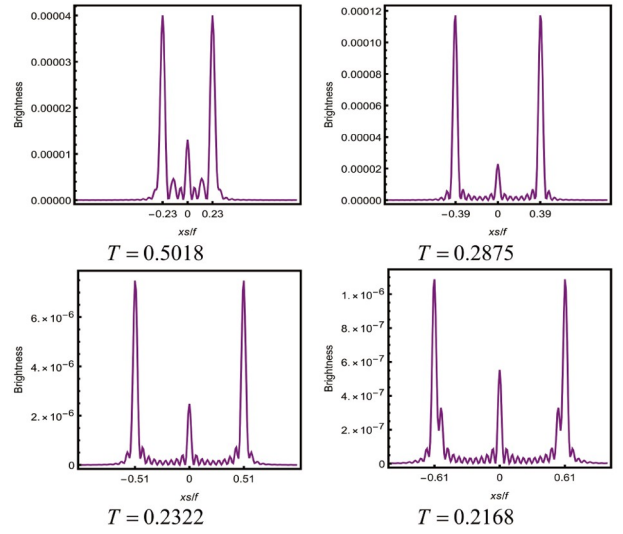


图 10 (网络版彩图) 温度 T 对光度的影响, 其中 $\theta_{\text{obs}}=0$, $\mu=1$, $\ell=0.3$, $\omega=100$, $e=0.05$

Figure 10 (Color online) The effect of temperature T on the brightness, where $\theta_{\text{obs}}=0$, $\mu=1$, $\ell=0.3$, $\omega=100$, $e=0.05$.

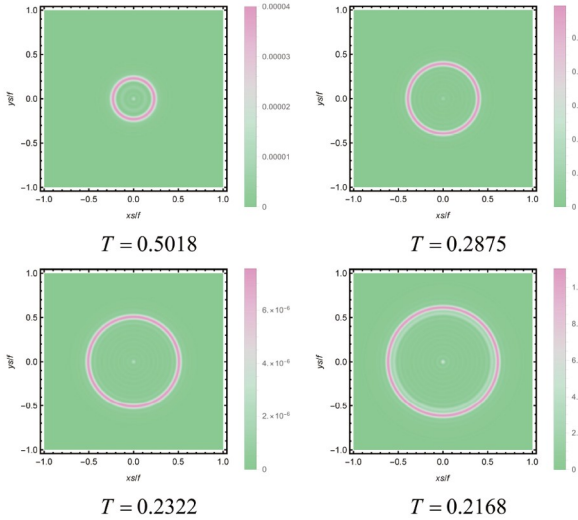


图 9 (网络版彩图) 温度 T 对爱因斯坦环的影响, 其中 $\theta_{\text{obs}}=0$, $\mu=1$, $\ell=0.3$, $\omega=100$, $e=0.05$. 温度取值从高到低, 分别对应 $Q=0.05, 0.1, 0.15, 0.2$

Figure 9 (Color online) The effect of temperature T on the Einstein ring, where $\theta_{\text{obs}}=0$, $\mu=1$, $\ell=0.3$, $\omega=100$, $e=0.05$. The temperatures are from high to low, corresponding to $Q=0.05, 0.1, 0.15, 0.2$, respectively.

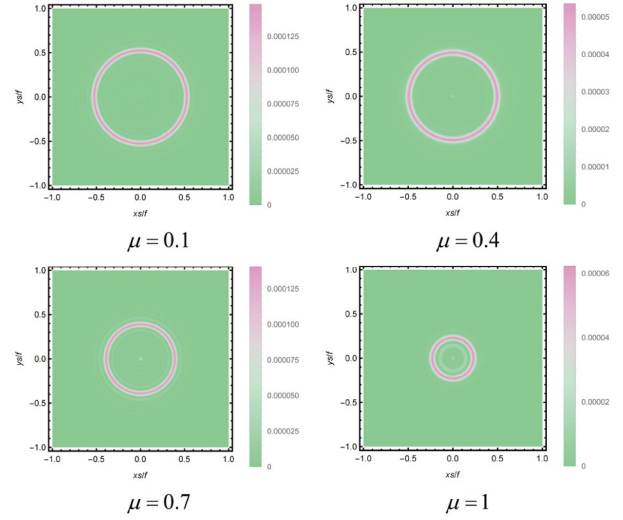


图 11 (网络版彩图) μ 对爱因斯坦环的影响, 其中 $\theta_{\text{obs}}=0$, $T=0.5$, $\ell=0.3$, $\omega=100$, $e=0.05$. 化学势取值从小到大, 分别对应 $Q=0.0195, 0.0677, 0.0827, 0.0502$

Figure 11 (Color online) The effect of μ on the Einstein ring, where $\theta_{\text{obs}}=0$, $T=0.5$, $\ell=0.3$, $\omega=100$, $e=0.05$. The chemical potential values change from low to high, corresponding to $Q=0.0195, 0.0677, 0.0827, 0.0502$.

我们将从数值的角度来证实这个结果. 图17描述了当化学势 $\mu=1$ 时不同参数 ℓ 值下的爱因斯坦环半径, 可以看到, 通过波动光学得到的爱因斯坦环的观测角与通过几何光学得到的光子的入射角非常吻合. 这一

结论不依赖于参数 ℓ , 但需要注意的是随着 ℓ 增大, 拟合数据更大, 拟合更加精确.

图18描述了当温度 $T=0.5$ 时不同 μ 值下的爱因斯坦环半径. 可以看到, 对于不同的 ℓ , 离散点与绿线几乎重

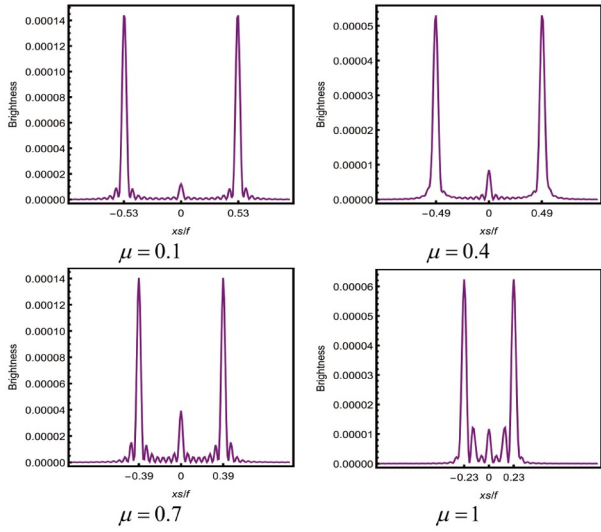


图 12 (网络版彩图) μ 对光度的影响, 其中 $\theta_{\text{obs}}=0$, $T=0.5$, $\ell=0.3$, $\omega=100$, $e=0.05$

Figure 12 (Color online) The effect of μ on the brightness, where $\theta_{\text{obs}}=0$, $T=0.5$, $\ell=0.3$, $\omega=100$, $e=0.05$.

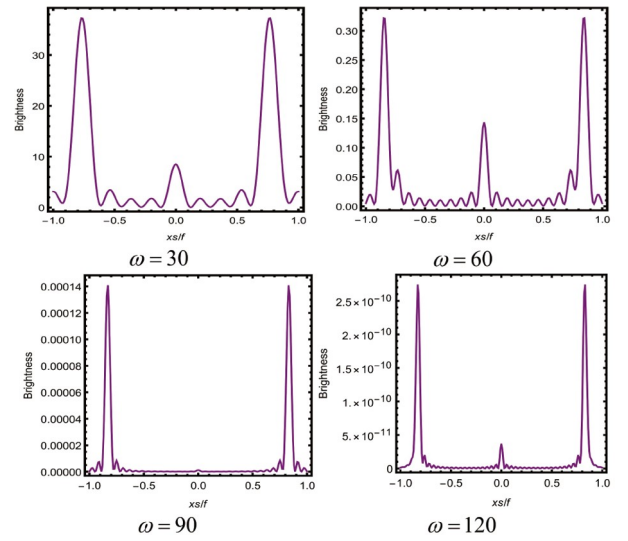


图 14 (网络版彩图) ω 对光度的影响, 其中 $\theta_{\text{obs}}=0$, $\ell=0.3$, $Q=0.6$, $z_h=1$, $e=0.05$

Figure 14 (Color online) The effect of ω on the brightness, where $\theta_{\text{obs}}=0$, $\ell=0.3$, $Q=0.6$, $z_h=1$, $e=0.05$.

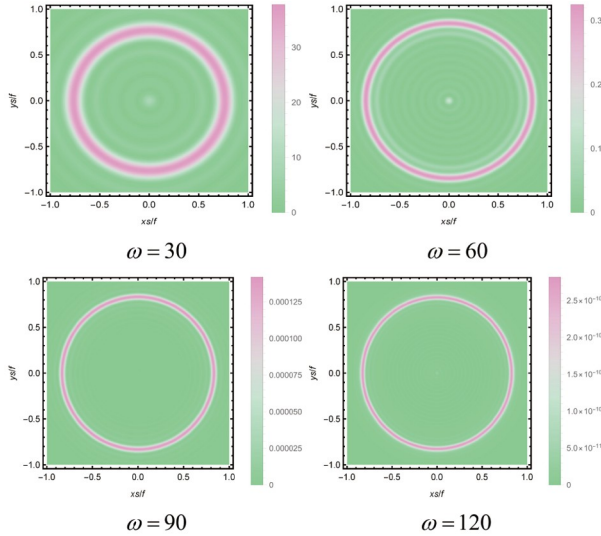


图 13 (网络版彩图) ω 对爱因斯坦环的影响, 其中 $\theta_{\text{obs}}=0$, $\ell=0.3$, $Q=0.6$, $z_h=1$, $e=0.05$

Figure 13 (Color online) The effect of ω on the Einstein ring, where $\theta_{\text{obs}}=0$, $\ell=0.3$, $Q=0.6$, $z_h=1$, $e=0.05$.

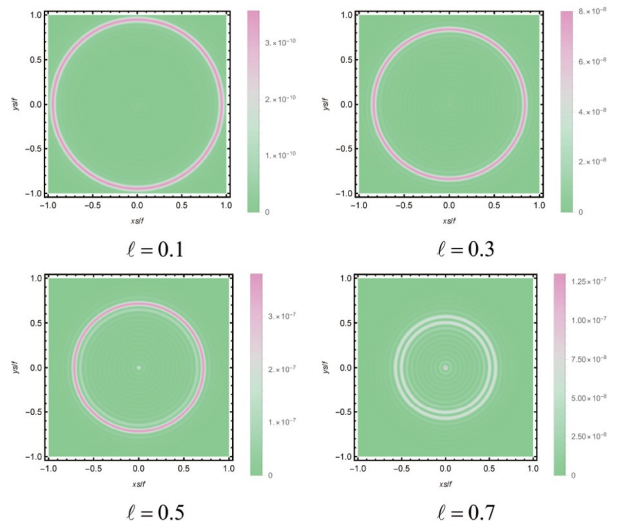


图 15 (网络版彩图) 极端黑洞下 ℓ 对爱因斯坦环的影响, 其中 $\theta_{\text{obs}}=0$, $z_h=1$, $e=0.05$

Figure 15 (Color online) The effect of ℓ on the Einstein ring, under extreme black holes, where $\theta_{\text{obs}}=0$, $z_h=1$, $e=0.05$.

合, 也就是说, 通过波动光学得到的爱因斯坦环的观测角与通过几何光学得到的光子的入射角非常吻合。

5 结论

基于AdS/CFT对偶, 我们采用波动光学的方法深

入研究了KR场中带电黑洞所产生的爱因斯坦环现象。通过求解波函数在边界区域的渐近行为, 我们成功得到了南极处的高斯波源在北极处的响应。研究表明响应函数仅是波源被黑洞散射后的衍射图像。随着洛伦兹磁参数增大, 响应函数的振幅增大; 随着角频率增大, 响应函数的周期变小; 随着场电荷的增大, 响应函数的振幅

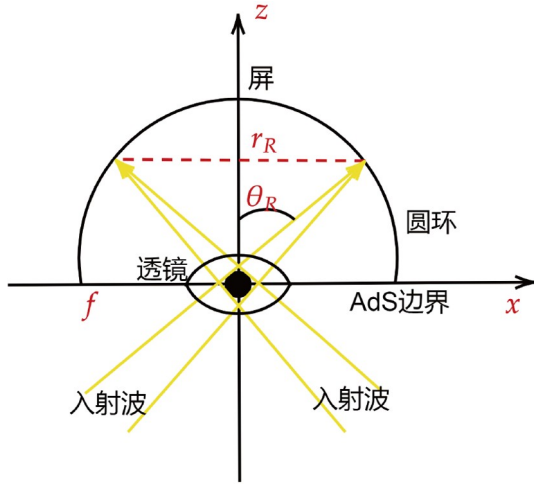

 图 16 (网络版彩图) r_R 和 θ_R 之间的关系

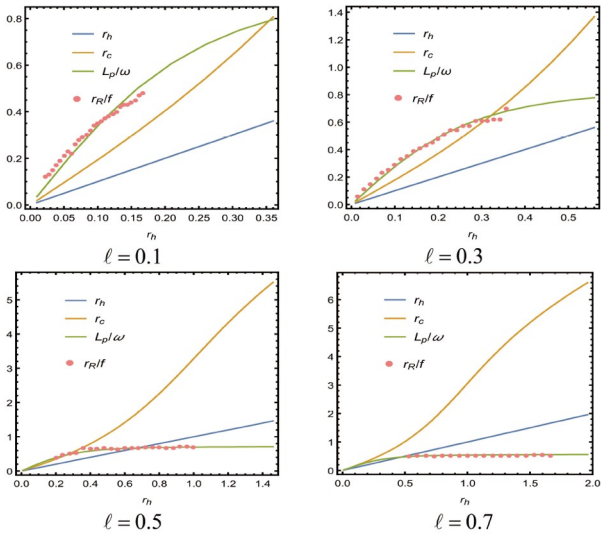
 Figure 16 (Color online) The relation between r_R and θ_R .

 图 17 (网络版彩图) 当 $\mu=1$, $e=0.05$, $\omega=100$ 时, 不同 ℓ 值下黑洞视界 r_h 、光子轨道位置 r_c 、光子轨道的爱因斯坦环半径 (绿线) 和由波动光学得到的爱因斯坦环半径 (离散点)

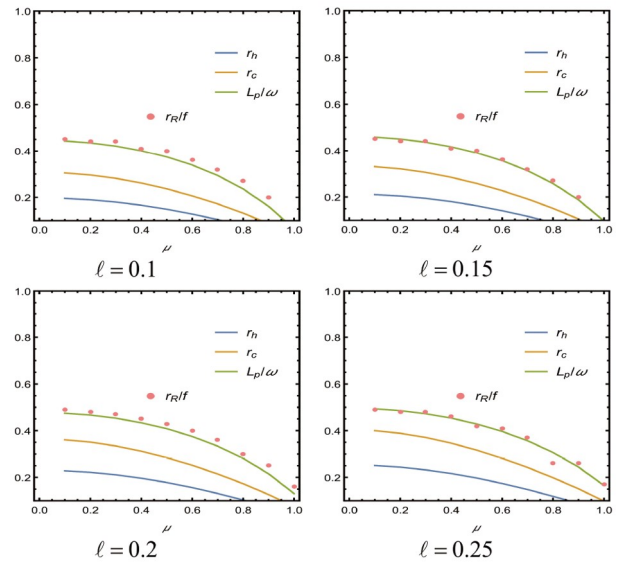
 Figure 17 (Color online) Black hole horizon r_h , location of photon orbit r_c , radius of the Einstein ring of the photon orbit (green line) and radius of the Einstein ring obtained by wave optics (discrete points) for different values of ℓ with fixed values of $\mu=1$, $e=0.05$, $\omega=100$.

 图 18 (网络版彩图) 当 $T=0.5$, $e=0.05$, $\omega=100$ 时, 不同 μ 值下黑洞视界 r_h 、光子轨道位置 r_c 、光子轨道的爱因斯坦环半径 (绿线) 和由波动光学得到的爱因斯坦环半径 (离散点)

 Figure 18 (Color online) Black hole horizon r_h , location of photon orbit r_c , radius of the Einstein ring of the photon orbit (green line) and radius of the Einstein ring obtained by wave optics (discrete points) for different values of μ with fixed values of $T=0.5$, $e=0.05$, $\omega=100$.

增大; 随着温度和化学势增大, 响应函数的振幅分别变小。

为了进一步观测到爱因斯坦环现象, 我们引入了一个带凸透镜的光学系统, 研究了观测者位置、洛伦兹破缺参数、温度、化学势、波源角频率对爱因斯坦环的影响。结果表明随着洛伦兹破缺参数增大, 环半径减小; 随着温度增高, 环半径减小; 随着化学势增大, 半径减小; 随着角频率增大, 环半径更清晰。

此外, 在几何光学框架下, 我们还研究了光子的入射角。通过理论分析与数值模拟发现, 几何光学得到的结果与波动光学得到的结果一致。这一结论不依赖于洛伦兹破缺参数和化学势, 尽管它们影响拟合精度。

综上所述, 全息爱因斯坦环不仅与时空几何有关, 还与波源和透镜有关, 这不同于通过测地线研究爱因斯坦环的几何光学。

参考文献

- 1 Maldacena J. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv Theor Math Phys*, 1998, 2: 231–252
- 2 Hartnoll S A, Herzog C P, Horowitz G T. Holographic superconductors. *J High Energy Phys*, 2008(12): 015
- 3 Hartnoll S A, Herzog C P, Horowitz G T. Building a holographic superconductor. *Phys Rev Lett*, 2008, 101: 25–28

- 4 Čubrović M, Zaanen J, Schalm K. String theory, quantum phase transitions, and the emergent fermi liquid. *Science*, 2009, 325: 439–444
- 5 Faulkner T, Liu H, McGreevy J, et al. Emergent quantum criticality, Fermi surfaces, and AdS_2 . *Phys Rev D*, 2011, 83: 125002
- 6 Mefford E, Horowitz G T. Simple holographic insulator. *Phys Rev D*, 2014, 90: 084042
- 7 Kiritsis E, Ren J. On holographic insulators and supersolids. *J High Energy Phys*, 2015, 2015(9): 168
- 8 Donos A, Gauntlett J P. Novel metals and insulators from holography. *J High Energy Phys*, 2014, 2014(6): 7
- 9 Akiyama K, Alberdi A, Alef W, et al. First M87 event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole. *Astrophys J Lett*, 2019, 875: L1
- 10 Akiyama K, Alberdi A, Alef W, et al. First Sagittarius A* event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole in the center of the Milky Way. *Astrophys J Lett*, 2022, 930: L12
- 11 Shipley J O, Dolan S R. Binary black hole shadows, chaotic scattering and the Cantor set. *Class Quantum Grav*, 2016, 33: 175001
- 12 Bambi C, Freese K. Apparent shape of super-spinning black holes. *Phys Rev D*, 2009, 79: 043002
- 13 Nedkova P G, Tinchev V K, Yazadjiev S S. Shadow of a rotating traversable wormhole. *Phys Rev D*, 2013, 88: 124019
- 14 Shaikh R, Kocherlakota P, Narayan R, et al. Shadows of spherically symmetric black holes and naked singularities. *Mon Not R Astron Soc*, 2019, 482: 52–64
- 15 Hashimoto K, Kinoshita S, Murata K. Einstein rings in holography. *Phys Rev Lett*, 2019, 123: 031602
- 16 Hashimoto K, Kinoshita S, Murata K. Imaging black holes through the AdS/CFT correspondence. *Phys Rev D*, 2020, 101: 066018
- 17 Kaku Y, Murata K, Tsujimura J. Observing black holes through superconductors. *J High Energy Phys*, 2021, 2021(9): 138
- 18 Liu Y, Chen Q, Zeng X X, et al. Holographic Einstein ring of a charged AdS black hole. *J High Energy Phys*, 2022, 2022(10): 189
- 19 Zeng X X, Aslam M I, Saleem R, et al. Holographic Einstein rings of black holes in scalar-tensor-vector gravity. arXiv: [2311.04680](#)
- 20 Gui J Y, Zeng X X, He K J, et al. Holographic Einstein ring of deformed AdS -Schwarzschild black holes. arXiv: [2407.09069](#)
- 21 Aslam M I, Zeng X X, Saleem R, et al. Holographic Einstein ring of a charged Rastall AdS black hole with bulk electromagnetic field. arXiv: [2403.01995](#)
- 22 Gui J Y, Zeng X X, Ye H, et al. Holographic Einstein ring of a black hole with torsion (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2024, 54: 110411
[桂金玉, 曾晓雄, 叶欢, 等. 绕率黑洞的全息爱因斯坦环. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2024, 54: 110411]
- 23 Kalb M, Ramond P. Classical direct interstring action. *Phys Rev D*, 1974, 9: 2273–2284
- 24 Kao W F, Dai W B, Wang S Y, et al. Induced Einstein-Kalb-Ramond theory and the black hole. *Phys Rev D*, 1996, 53: 2244–2247
- 25 Kar S, SenGupta S, Sur S. Static, spherically symmetric solutions, gravitational lensing, and perihelion precession in Einstein-Kalb-Ramond theory. *Phys Rev D*, 2003, 67: 044005
- 26 Nair K K, Arun M T. Kalb-Ramond field-induced cosmological bounce in generalized teleparallel gravity. *Phys Rev D*, 2022, 105: 103505
- 27 Lessa L A, Silva J E G, Maluf R V, et al. Modified black hole solution with a background Kalb-Ramond field. *Eur Phys J C*, 2020, 80: 335
- 28 Atamurotov F, Ortiqboev D, Abdujabbarov A, et al. Particle dynamics and gravitational weak lensing around black hole in the Kalb-Ramond gravity. *Eur Phys J C*, 2022, 82: 659
- 29 Kumar R, Ghosh S G, Wang A. Gravitational deflection of light and shadow cast by rotating Kalb-Ramond black holes. *Phys Rev D*, 2020, 101: 104001
- 30 Yang K, Chen Y Z, Duan Z Q, et al. Static and spherically symmetric black holes in gravity with a background Kalb-Ramond field. *Phys Rev D*, 2023, 108: 124004
- 31 Duan Z Q, Zhao J Y, Yang K. Electrically charged black holes in gravity with a background Kalb-Ramond field. arXiv: [2310.13555](#)
- 32 Kostelecký V A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. *Phys Rev D*, 2004, 69: 105009
- 33 Bailey Q G, Kostelecký V A. Signals for Lorentz violation in post-Newtonian gravity. *Phys Rev D*, 2006, 74: 045001
- 34 Bluhm R, Gagne N L, Potting R, et al. Constraints and stability in vector theories with spontaneous Lorentz violation. *Phys Rev D*, 2008, 77: 125007
- 35 Klebanov I R, Witten E. AdS/CFT correspondence and symmetry breaking. *Nucl Phys B*, 2000, 556: 210–214
- 36 Zeng X X, He K J, Pu J, et al. Holographic Einstein rings of a Gauss-Bonnet AdS black hole. *Eur Phys J C*, 2023, 83: 897
- 37 Hu X Y, Aslam M I, Saleem R, et al. Holographic Einstein rings of an AdS black hole in massive gravity. *J Cosmol Astropart Phys*, 2023, 2023(11): 013
- 38 Zeng X X, Li L F, Xu P. Holographic Einstein rings of a black hole with a global monopole. *Eur Phys J C*, 2024, 84: 714

Holographic Einstein ring of charged black holes in Kalb-Ramond field

CHEN Gang¹, GUI Jin-Yu², ZENG Xiao-Xiong^{3*}, LI Li-Fang^{4*}, LI Pan⁴ & XU Peng^{4,5}

¹ School of Artificial Intelligence, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

² School of Civil Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China

³ College of Physics and Electronic Engineering, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

⁴ Microgravity Laboratory, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

⁵ Lanzhou Center of Theoretical Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China

*Corresponding authors (ZENG Xiao-Xiong, email: xxzengphysics@163.com; LI Li-Fang, email: lilifang@imech.ac.cn)

This study investigates the Einstein rings of charged black holes in the Kalb-Ramond (KR) field based on AdS/CFT correspondence. When the wave source is fixed on the AdS boundary, we can obtain the corresponding response function on the other side of the boundary. Utilizing a specialized optical system equipped with a convex lens, we can capture the holographic image of Einstein rings of the black hole on a screen. It is found that the variation in the observer's position leads to a transformation of the image on the screen from an axisymmetric ring to an arc and finally to a single luminous point. We also found that the radius of the Einstein ring decreases as the Lorentz breaking parameter ℓ increases. As the temperature increases, the radius of the Einstein ring decreases. As the chemical potential increases, the radius of the Einstein ring decreases. From the perspective of geometric optics, we also discover the photon ring of the black hole. Numerical results indicate that the incidence angle of the photon ring is consistent with that of the Einstein ring, verifying the effectiveness of studying Einstein rings through wave optics.

charged black hole, KR field, wave optics, holographic Einstein rings, response function

PACS: 11.25.Tq, 04.70.-s, 04.50.Kd

doi: [10.1360/SSPMA-2024-0341](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0341)