



考虑导航误差的火星探测器动力下降段鲁棒轨迹优化

高多志¹, 龚有敏², 郭延宁^{1*}, 李传江¹, 马广富^{1,2}

1. 哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

2. 哈尔滨工业大学(深圳)机电工程与自动化学院, 深圳 518055

*联系人, E-mail: guoyin@hit.edu.cn

收稿日期: 2024-07-31; 接受日期: 2024-11-13; 网络出版日期: 2024-12-19

国防基础研究项目(编号: JCKY2021603B030)资助

摘要 针对火星探测器动力下降段过程中依赖的自主导航设备存在有界测量误差的问题, 本文提出了一种基于凸优化的鲁棒轨迹优化算法. 首先, 对传统的基于凸优化的轨迹优化方法进行改进修正, 建立基于序列凸优化的快速、精确求解方法. 然后, 分别对高度、位置和速度存在导航误差的情况进行建模和分析, 并给出不同情况对应的修正斜坡约束. 接着, 分别提出针对位置和速度误差的鲁棒轨迹求解算法. 最后, 通过仿真案例对提出的改进凸优化算法和鲁棒轨迹优化算法进行了验证, 结果表明所得的解具有准确性和鲁棒性.

关键词 火星探测, 导航误差, 动力下降段, 凸优化, 鲁棒轨迹优化

PACS: 95.40.+s, 45.10.Db, 95.55.Pe, 02.30.Yy, 07.05.Dz

1 引言

近些年, 随着航天技术的不断发展, 以月球和火星为代表的行星探测引发了广泛的关注^[1-3]. 其中, 载人登月、国际月球科研站、火星移民等任务都需要着陆到行星表面后再开展深入的科学研究. 这些任务对行星探测中的软着陆技术提出了更安全、更高效、更高精度的要求^[4].

不同于地球上可回收火箭着陆过程中有高精度的地面导航设备与测控站提供导航支持, 行星探测任务距离地球远, 难以实现地面设备实时测控与通信^[5,6].

因此, 行星软着陆过程中需要依靠自主导航来进行着陆过程中的障碍探测与落点选取, 并对相对位置、相对速度等导航参数进行测量^[7-9]. 在这一过程中不可避免地会产生导航测量误差, 在未考虑测量误差的情况下可能会导致着陆阶段碰撞到障碍物, 进而导致着陆任务的失败. 此外, 动力下降段作为着陆任务中的最后关键一环, 在这一过程中依靠着陆器主发动机点火进行反推减速与制导, 着陆发动机会消耗大量的燃料. 所以, 节约动力下降段的燃料消耗可以帮助搭载更重的科学载荷, 提高任务的最终效率.

目前动力下降段的制导方法主要可以分为解析制

引用格式: 高多志, 龚有敏, 郭延宁, 等. 考虑导航误差的火星探测器动力下降段鲁棒轨迹优化. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2025, 55: 224513
Gao D Z, Gong Y M, Guo Y N, et al. Robust trajectory optimization for Mars lander powered descent considering navigation errors (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2025, 55: 224513, doi: 10.1360/SSPMA-2024-0308

导、优化制导以及基于学习的制导. 其中, ZEM/ZEV 制导^[10]、多项式制导以及凸曲率制导^[11,12]是解析制导中的典型方法, 其主要优点是运算量小、速度快, 但是难以处理复杂的过程约束, 以及得到最优的燃料消耗. 优化制导中以凸优化制导^[13,14]最为有效, 由于凸优化的快速求解特性, 能够实现实时的机载运算, SpaceX 的可回收火箭的着陆制导就是利用了这一项技术, 因此这项技术有广阔的应用前景. 基于学习的制导^[15]在近些年也引起了广泛的关注, 如基于强化学习的制导, 但是在应用上还存在着不稳定的因素.

在着陆制导的现有相关文献中, 一般将导航误差视为扰动和不确定性来进行处理^[16,17]. 文献^[18]结合 Tube-MPC 思想设计了扰动环境下的规划与重规划算法. 文献^[19]将鲁棒优化方法运用到存在不确定风场扰动下的动力下降段轨迹优化. 文献^[20]采用组合干扰补偿的方式来处理多种类型干扰的影响. 此外, 还有文献基于多项式混沌展开的方法^[21], 将不确定性进行概率量化, 进而基于期望和方差的指标来进行优化, 而这类方法在实际应用上需要大量的数据作支持来得到相应的概率分布.

考虑到导航设备是有一定的精度范围的^[22,23], 本文将导航误差设定在一个有界闭集合. 并在优化问题中预先考虑导航误差带来的影响, 进而得到的优化算法能在一定程度上兼具鲁棒性和最优性. 同时本文采用的凸优化方法也具有快速求解的特性, 能够为实际工程提供一定的参考作用.

2 问题描述

着陆器在动力下降段过程中利用主发动机产生的反推力, 实现减速和降低高度, 最终以零速度降落在落点位置. 在一些复杂的场景中着陆时, 如陨石坑、火山口这一类地形, 还需要考虑对障碍物的规避.

选取着陆点为坐标原点 O_T , x 轴为竖直向上方向, y 轴为正东方向, z 轴为正北方向, 构成了惯性坐标系 O_Txyz . 在此过程中受到火星重力、发动机推力的作用. 坐标系与着陆场景如图1所示.

2.1 动力学建模与燃料最优问题描述

根据场景描述, 在 O_Txyz 坐标系下, 对动力下降段

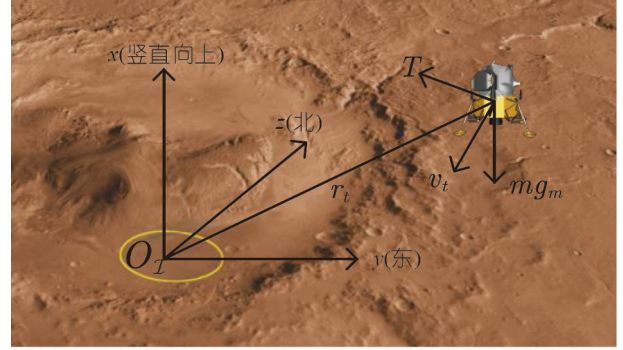


图1 (网络版彩图)动力下降段坐标系和着陆场景示意图

Figure 1 (Color online) Schematic of coordinate system and landing scenario for powered descent phase.

的动力学进行建模, 表示为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{v}(t), \\ \dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{g}_m + \frac{\mathbf{T}(t)}{m(t)}, \\ \dot{m}(t) &= -\alpha \|\mathbf{T}(t)\|_2,\end{aligned}\quad (1)$$

式中, $\mathbf{r} = [r_x, r_y, r_z]^T \in \mathbb{R}^3$ 和 $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \in \mathbb{R}^3$ 分别表示着陆器的位置和速度, $\mathbf{T} = [T_x, T_y, T_z]^T \in \mathbb{R}^3$ 表示发动机的推力. $\mathbf{g}_m$ 为火星地表重力加速度, 为常量. $\alpha > 0$ 为燃料消耗系数, 本文中假设燃料的消耗与推力幅值大小为恒定系数的线性关系. m 为着陆器的总质量, 会随着燃料消耗而减小.

在动力下降段降低高度和减速的过程中, 还需要对复杂地形中的障碍物进行规避, 本文将复杂地形障碍进一步简化为漏斗状的斜坡约束, 如图2所示, 并建模为如下公式:

$$\tan \gamma_{gs} \leq \frac{r_x}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}, \quad (2)$$

式中, γ_{gs} 为锥约束角, 也称为斜坡约束角.

考虑到主发动机点火后只能在终端时刻关闭, 因此过程中的最小推力大于0, 对于推力的约束表示为

$$0 < T_{\min} \leq \|\mathbf{T}(t)\|_2 \leq T_{\max}, \quad (3)$$

式中, $T_{\min}$ 和 $T_{\max}$ 分别为推力的最小幅值和最大幅值.

对于初末状态, 位置 $\mathbf{r}$ 、速度 $\mathbf{v}$ 以及质量 m 相应的约束表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad m(t_0) = m_{\text{wet}}, \\ \mathbf{r}(t_f) &= \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \quad m(t_f) \geq m_{\text{dry}},\end{aligned}\quad (4)$$

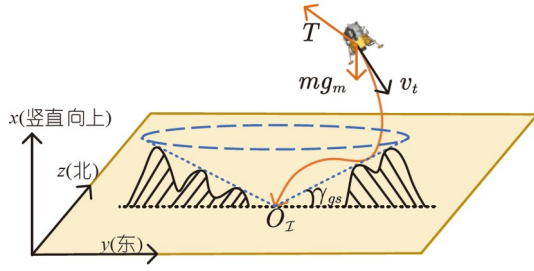


图 2 (网络版彩图)动力下降段避障与锥约束示意图

Figure 2 (Color online) Schematic diagram of obstacle avoidance and cone constraint for powered descent phase.

式中, t_0 表示初始时刻, t_f 表示终端时刻. m_{wet} 为着陆器初始总质量, m_{dry} 为不含燃料的着陆器干质量.

综上, 动力下降段的燃料最优轨迹优化问题可以表示为问题 P1:

$$P1: \min_{\mathbf{T}(t)} -m(t_f) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{T}(t)} \int_0^{t_f} \alpha \|\mathbf{T}(t)\|_2 dt \quad (5)$$

subject to: 式(1)–(4),

式中, 终端的燃料最优等价于推力器消耗的燃料最少, 整个动力下降段需要满足动力学约束、锥形约束、推力器幅值约束以及初末状态约束, 是一个非凸的优化问题.

2.2 修正凸优化方法

问题 P1 给出了燃料最优问题的基本描述, 基于文献[13,18]对问题进行等价重构, 定义如下的变量替换:

$$\begin{aligned} z(t) &= \ln m(t), \\ \mathbf{u}(t) &= \frac{\mathbf{T}(t)}{m(t)}, \\ \sigma(t) &= \frac{\Gamma(t)}{m(t)}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $\Gamma(t)$ 用于替换问题 P1 中的 $\|\mathbf{T}(t)\|_2$. 动力学方程(1)转化为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{v}(t), \\ \dot{\mathbf{v}}(t) &= \mathbf{g}_m + \mathbf{u}(t), \\ \dot{z}(t) &= -\alpha \sigma(t), \\ \|\mathbf{u}(t)\|_2 &\leq \sigma(t). \end{aligned} \quad (7)$$

$z(t)$ 对时间求导得到

$$\dot{z}(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = \frac{-\alpha \Gamma(t)}{m(t)} = -\alpha \sigma(t). \quad (8)$$

求解微分方程 $\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = -\alpha \sigma(t)$, 得到

$$m(t) = m_{\text{wet}} e^{\int_0^t (-\alpha \sigma(\tau)) d\tau}. \quad (9)$$

因此, 根据式(9), 问题 P1 中的目标函数等价转换成

$$\min_{\mathbf{u}(t), \sigma(t)} -z(t_f) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{u}(t), \sigma(t)} \int_0^{t_f} \sigma(t) dt. \quad (10)$$

经过变量替换, 式(3)的推力幅值约束转换为

$$0 < T_{\min} e^{-z(t)} \leq \sigma(t) \leq T_{\max} e^{-z(t)}. \quad (11)$$

采用一阶泰勒展开对式(11)进行线性化近似后得到

$$\begin{aligned} T_{\min} e^{-z(t)} \left\{ 1 - [z(t) - z_l(t)] + \frac{1}{2} [z(t) - z_l(t)]^2 \right\} &\leq \sigma(t), \\ \sigma(t) &\leq T_{\max} e^{-z(t)} \left\{ 1 - [z(t) - z_l(t)] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中, $z_l(t) = \ln(m_{\text{wet}} - \alpha T_{\min} t)$.

此外, 将式(2)转化为二阶锥约束的标准形式:

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \left[\frac{1}{\tan \gamma_{gs}} \quad 0 \quad 0 \right] \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}. \quad (13)$$

相应的初末状态约束也替换为新的变量, 表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad z(t_0) = \ln m_{\text{wet}}, \\ \mathbf{r}(t_f) &= \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \quad z(t_f) \geq \ln m_{\text{dry}}. \end{aligned} \quad (14)$$

综上, 原始的问题 P1 转化为如下的凸问题 P2:

$$P2: \min_{\mathbf{u}(t), \sigma(t)} -z(t_f) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{u}(t), \sigma(t)} \int_0^{t_f} \sigma(t) dt \quad (15)$$

subject to: 式(7), (12)–(14).

问题 P2 是一个连续系统凸优化问题, 为了能够快速求解, 需要将连续系统离散化, 首先将连续系统描述为标准形式:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_c \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_c \mathcal{G}_m \quad (16)$$

式中,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_m \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & -\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

定义采样时间间隔 Δt 为 $\Delta t = \frac{t_f - t_0}{N+1}$, 令 $t_0=0$, 则离散时间点 t_i 表示为

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, N, N+1. \quad (18)$$

本文采用零阶保持器对系统进行离散化处理, 得到如下的离散系统:

$$\mathbf{X}(t_{k+1}) = \mathbf{A}_d \mathbf{X}(t_k) + \mathbf{B}_d \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t_k) \\ \sigma(t_k) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_d \mathcal{G}_m, \quad (19)$$

式中, $k = 0, 1, \dots, N$. 矩阵 $\mathbf{A}_d$ 和 $\mathbf{B}_d$ 通过如下式子计算:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A} \Delta t}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau)} \mathbf{B}_c d\tau, \quad (20)$$

得到,

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \Delta t \end{bmatrix}.$$

迭代式(19), 得到 $\mathbf{X}(t_{k+1})$ 的计算公式和式(7)的离散形式:

$$\mathbf{X}(t_{k+1}) = \mathbf{A}_d^{k+1} \mathbf{X}(t_0) + \mathbf{A}_d^k \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{\Psi}_k \Upsilon_k, \quad (22)$$

$$\|\mathbf{u}(t_k)\|_2 \leq \sigma(t_k),$$

式中, $k = 0, 1, \dots, N$. $\mathbf{A}_k, \mathbf{\Psi}_k, \Upsilon_k$ 为

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_d^k \mathbf{B}_d + \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d + \dots + \mathbf{B}_d,$$

$$\mathbf{\Psi}_k = [\mathbf{A}_d^k \mathbf{B}_d \quad \dots \quad \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \quad \mathbf{B}_d],$$

$$\Upsilon_k = \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{k-1} \\ \eta_k \end{bmatrix}, \quad \eta_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \sigma_k \end{bmatrix}. \quad (23)$$

推力幅值约束公式(12)的离散形式为

$$T_{\min} e^{-z_l(t_k)} [1 - [z(t_k) - z_l(t_k)] + \frac{1}{2} [z(t_k) - z_l(t_k)]^2] \leq \sigma(t_k), \quad (24)$$

$$\sigma(t_k) \leq T_{\max} e^{-z_l(t_k)} [1 - [z(t_k) - z_l(t_k)]],$$

式中, $t_k = \frac{t_f - t_0}{N+1} \cdot k$, $z_l(t_k) = \ln(m_{\text{wet}} - \alpha T_{\min} t_k)$.

斜坡约束公式(13)的离散形式为

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x,k} \\ r_{y,k} \\ r_{z,k} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \left[\frac{1}{\tan \gamma_{gs}} \quad 0 \quad 0 \right] \begin{bmatrix} r_{x,k} \\ r_{y,k} \\ r_{z,k} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

式中,

$$r_{x,k} = [1 \quad 0_{1 \times 6}] \mathbf{X}(t_k), \quad r_{y,k} = [0 \quad 1 \quad 0_{1 \times 5}] \mathbf{X}(t_k), \quad (26)$$

$$r_{z,k} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0_{1 \times 4}] \mathbf{X}(t_k).$$

初末状态约束公式(14)的离散形式为

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \\ \ln m_{\text{wet}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & I_3 & 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \mathbf{X}(t_f) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}_f \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$[0_{3 \times 1} \quad 0_{3 \times 1} \quad 1] \mathbf{X}(t_f) \geq \ln m_{\text{dry}}.$$

综上, 连续凸问题P2转化为离散的凸问题P3:

$$P3: \min_{\mathbf{u}(t_k), \sigma(t_k)} -z(t_{N+1}) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{u}(t_k), \sigma(t_k)} \alpha \Delta t \sum_{k=0}^N \sigma(t_k) \quad (28)$$

subject to: 式(22)–(27).

离散的凸优化问题P3可以采用开源框架YALMIP或CVX进行建模, 采用求解器SDPT3或MOSEK进行快速求解. 然而, 注意到现有的文献中都是采用式(12)中的泰勒展开进行近似处理, 而线性化的误差会随着时间的增加而提高, 因此对该凸近似方法进行修正是有必要的.

定义如下集合为 $\mathbf{u}(\cdot), \sigma(\cdot), \mathbf{X}(\cdot)$:

$$\mathbf{u}(\cdot) = \{\mathbf{u}(t_k) | k = 0, 1, \dots, N\},$$

$$\sigma(\cdot) = \{\sigma(t_k) | k = 0, 1, \dots, N\}, \quad (29)$$

$$\mathbf{X}(\cdot) = \{\mathbf{X}(t_k) | k = 0, 1, \dots, N+1\}.$$

定义离散问题P3的解集为 $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot), \tilde{\sigma}(\cdot), \tilde{\mathbf{X}}(\cdot)$, 根据 $\mathbf{X}(t_k)$ 的定义有 $\tilde{z}(t_k) = [0_{1 \times 6} \quad 1] \tilde{\mathbf{X}}(t_k)$, 则式(24)在 $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot), \tilde{\sigma}(\cdot), \tilde{\mathbf{X}}(\cdot)$ 的泰勒展开为

$$T_{\min} e^{-\bar{z}(t_k)} [1 - [z(t_k) - \bar{z}(t_k)]] + \frac{1}{2} [z(t_k) - \bar{z}(t_k)]^2 \leq \sigma(t_k), \quad (30)$$

$$\sigma(t_k) \leq T_{\max} e^{-\bar{z}(t_k)} [1 - [z(t_k) - \bar{z}(t_k)]].$$

因此, 基于序列凸优化修正的问题P4表示为

$$P4: \min_{\mathbf{u}(t_k), \sigma(t_k)} -z(t_{N+1}) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{u}(t_k), \sigma(t_k)} \alpha \Delta t \sum_{k=0}^N \sigma(t_k) \quad (31)$$

subject to: 式(22), (23), (25)–(27), (30).

综上, 基于序列凸优化的动力下降段轨迹优化方法如算法1所示.

算法1给出了修正的动力下降段无损凸优化方法, 求解后得到零导航误差条件下的燃料最优轨迹优化问题的标称解. 考虑到在实际任务中, 导航存在一定的测量误差且误差在一定的精度范围内. 因此, 将进一步考虑存在导航误差条件下的鲁棒轨迹优化方法.

3 考虑导航误差的鲁棒凸优化算法

在自主着陆过程中, 只能利用机载设备进行导航测量, 对于本文提出的修正无损凸优化算法, 初始状态, 尤其是相对位置和速度, 对整个制导轨迹有较大的影响. 而机载导航设备的精度是有限的, 对相对位置和相对速度的测量存在一定的误差. 尤其是在初始时刻高度和速度较大时, 误差相对更高. 而随着高度降低, 会有激光雷达等更高精度传感器参与导航测量, 导航误差也会随之缩小.

现有文献中将误差视作扰动和不确定性, 并以概率分布的方式进行描述, 这一方法需要大量的实际数据进行支持, 难以得到符合真实情况的分布. 因此, 本

算法1 基于序列凸优化的动力下降段轨迹优化方法

1. 定义求解精度 $\epsilon_x > 0$.
2. 根据系统参数, 求解离散凸问题P3, 得到解 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot), \hat{\sigma}(\cdot), \hat{\mathbf{X}}(\cdot)$.
3. 构建修正问题P4, 并得到解 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot), \hat{\sigma}(\cdot), \hat{\mathbf{X}}(\cdot)$.
4. **while** $\|\hat{\mathbf{X}}(\cdot) - \tilde{\mathbf{X}}(\cdot)\|_2 \geq \epsilon_x$ **do**
5. 赋值 $\tilde{\mathbf{X}}(\cdot) = \hat{\mathbf{X}}(\cdot)$, 计算 $z_l(t_k) = \bar{z}(t_k)$.
6. 构建并求解问题P4, 得到解 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot), \hat{\sigma}(\cdot), \hat{\mathbf{X}}(\cdot)$.
7. 计算并判断误差 $\|\hat{\mathbf{X}}(\cdot) - \tilde{\mathbf{X}}(\cdot)\|_2$ 是否满足.
8. **end while**
9. 输出 $\mathbf{u}^*(\cdot) = \hat{\mathbf{u}}(\cdot)$, $\sigma^*(\cdot) = \hat{\sigma}(\cdot)$, $\mathbf{X}^*(\cdot) = \hat{\mathbf{X}}(\cdot)$ 为燃料最优解.

文考虑导航设备精度已知, 将测量误差设定在一个有界闭集合内, 当误差在此集合内, 着陆器均能够安全接近预定着陆点, 并尽可能节约燃料的消耗. 即在最坏的情况下也能够安全着陆, 满足着陆的约束条件.

3.1 基于动力学方程的误差传播

式(19)–(23)给出了离散的动力学方程, 在本节中, 仅考虑相对位置和速度, 进一步简化描述为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{k+1} \\ \mathbf{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}}_d \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{B}}_d (\mathbf{u}_k + \mathbf{g}_m). \quad (32)$$

迭代式(32), 得到关于初始位置和速度的关系:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{k+1} \\ \mathbf{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}}_d^{k+1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{\Lambda}}_k \mathbf{g}_m + \hat{\Psi}_k \hat{\mathbf{Y}}_k, \quad (33)$$

式中,

$$\hat{\mathbf{\Lambda}}_k = \hat{\mathbf{A}}_d^k \hat{\mathbf{B}}_d + \hat{\mathbf{A}}_d^{k-1} \hat{\mathbf{B}}_d + \cdots + \hat{\mathbf{B}}_d,$$

$$\hat{\Psi}_k = [\hat{\mathbf{A}}_d^k \hat{\mathbf{B}}_d \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{A}}_d \hat{\mathbf{B}}_d \quad \hat{\mathbf{B}}_d], \quad \hat{\mathbf{Y}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}. \quad (34)$$

由式(1)和(20)得到矩阵的具体数值为

$$\hat{\mathbf{A}}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_d = e^{\hat{\mathbf{A}}_c \Delta t} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{B}}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}}_d = \int_0^{\Delta t} e^{\hat{\mathbf{A}}_c(\Delta t - \tau)} \hat{\mathbf{B}}_c d\tau = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_d^k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \cdot k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}_d^k \hat{\mathbf{B}}_d = \begin{bmatrix} \Delta t^2 k + \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix}.$$

结合式(33)和(35), 如果初始位置和速度有测量误差, 表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}_0 \\ \bar{\mathbf{v}}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}_0 \\ \Delta \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

传递到 t_{k+1} 时刻的位置和速度误差为

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}_{k+1} \\ \Delta \mathbf{v}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{v}_0 \cdot \Delta t \cdot (k+1) \\ \Delta \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

由导航测量带来的误差可能会导致动力下降的过程中违反约束, 严重地导致避障失败. 考虑到着陆敏感器主要包括惯性测量单元、激光测距仪和微波测距测速仪等^[7-9]. 这些敏感器工作机理复杂, 本文将导

航测量误差分为长方体误差和球形误差两类. 其中, 长方体误差对应测量误差具有方向性特征的传感器, 如激光测距仪^[7]. 而球形误差通常出现在导航敏感器测量误差为各向同性的情况, 如惯性测量单元^[4].

本文从相对位置测量存在误差的情况出发, 进一步考虑相对速度测量存在误差的情况, 最后综合考虑同时存在位置和速度混合误差的情况.

3.2 存在相对位置导航误差的情况

首先, 考虑在初始高度的测量上存在误差, 数学上表示为

$$r_{x,0} = \bar{r}_{x,0} + \Delta r_{x,0}, \quad |\Delta r_{x,0}| \leq \mathcal{U}_x, \quad (38)$$

式中, $r_{x,0}$ 表示在 t_0 时刻的测量高度, $\bar{r}_{x,0}$ 为真实高度, $\Delta r_{x,0}$ 为高度测量误差, $\mathcal{U}_x > 0$ 表示高度方向的测量精度.

进一步, 考虑在位置的测量上存在误差. 当误差的约束集合为球形, 表示为

$$\mathbf{r}_0 = \bar{\mathbf{r}}_0 + \Delta \mathbf{r}_0, \quad \|\Delta \mathbf{r}_0\|_2 \leq \mathcal{U}_r, \quad (39)$$

式中, $\mathbf{r}_0$ 表示在 t_0 时刻的测量位置, $\bar{\mathbf{r}}_0$ 为真实位置, $\Delta \mathbf{r}_0$ 为位置测量误差, $\mathcal{U}_r > 0$ 表示位置的测量精度. 位置测量存在误差的示意图如图3所示.

对于图3所示的情况, 本文提出的修正斜坡约束旨在保证最坏的情况下仍然能够安全地接近着陆点. 针对初始高度测量存在误差的情况, 问题P3和P4中的斜坡约束重新表示为

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x,k} \\ r_{y,k} \\ r_{z,k} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \frac{r_{x,k} - \mathcal{U}_x}{\tan \gamma_{gs}}. \quad (40)$$

相应地, 终端位置约束由坐标原点调整为

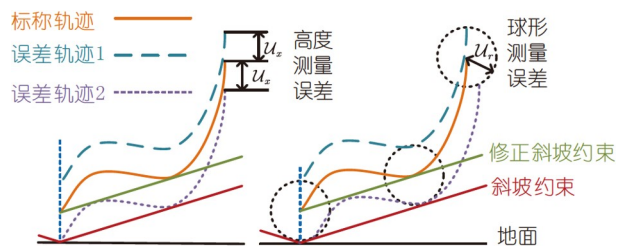


图3 (网络版彩图) 位置测量存在误差和对应修正斜坡约束
Figure 3 (Color online) Position measurement with errors and corresponding modified slope constraint.

$$\mathbf{r}_f = [\mathcal{U}_x \ 0 \ 0]^T. \quad (41)$$

式(40)和(41)为初始高度测量存在误差的修正, 基于算法1即可得到此情况下的鲁棒轨迹优化解.

对图3所示的球形误差, 考虑极限情况为修正的斜坡约束与误差包络球相切, 如图4所示.

针对位置测量存在球形误差的情况, 对应问题P3和P4中的修正斜坡约束表示为

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x,k} \\ r_{y,k} \\ r_{z,k} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \frac{r_{x,k} - \frac{\mathcal{U}_r}{\cos \gamma_{gs}}}{\tan \gamma_{gs}}. \quad (42)$$

相应地, 终端位置约束修正为

$$\mathbf{r}_f = \left[\frac{\mathcal{U}_r}{\cos \gamma_{gs}} \ 0 \ 0 \right]^T. \quad (43)$$

式(42)和(43)为位置存在球形测量误差的约束修正, 基于算法1可以得到对应的鲁棒解.

此外, 考虑位置测量误差的约束集合为长方体的情况, 表示为

$$\begin{aligned} r_{x,0} &= \bar{r}_{x,0} + \Delta r_{x,0}, \quad |\Delta r_{x,0}| \leq \mathcal{U}_x, \\ r_{y,0} &= \bar{r}_{y,0} + \Delta r_{y,0}, \quad |\Delta r_{y,0}| \leq \mathcal{U}_y, \\ r_{z,0} &= \bar{r}_{z,0} + \Delta r_{z,0}, \quad |\Delta r_{z,0}| \leq \mathcal{U}_z, \end{aligned} \quad (44)$$

式中, $r_{x,0}$, $r_{y,0}$, $r_{z,0}$ 分别表示在 t_0 时刻的测量位置的 x , y , z 方向分量, $\bar{r}_{x,0}$, $\bar{r}_{y,0}$, $\bar{r}_{z,0}$ 为真实位置, $\Delta r_{x,0}$, $\Delta r_{y,0}$, $\Delta r_{z,0}$ 为位置测量误差, $\mathcal{U}_x$, $\mathcal{U}_y$, $\mathcal{U}_z > 0$ 分别表示 x , y , z 方向上的位置测量精度. 误差的约束集合为长方体的示意图和修正的斜坡约束如图5所示.

当误差约束在如式(44)所示的长方体的集合内时,

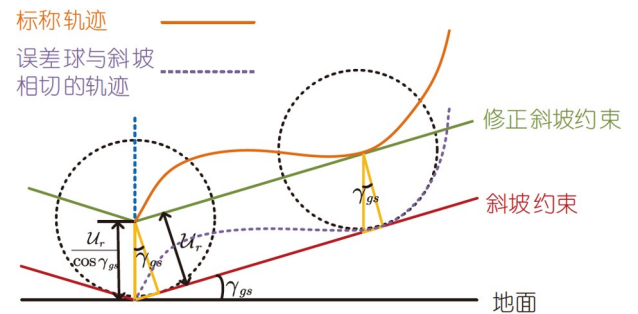


图4 (网络版彩图) 位置测量误差为球形约束集的示意图
Figure 4 (Color online) Illustration of position measurement with spherical error.

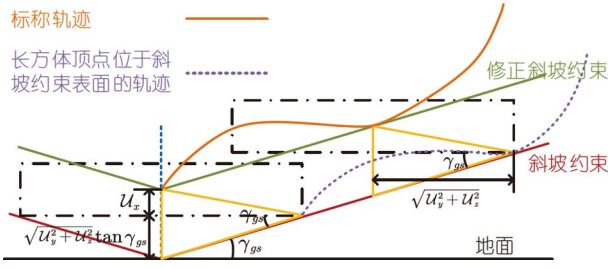


图 5 (网络版彩图)位置测量误差为长方体约束集和对应的修正斜坡约束

Figure 5 (Color online) Illustration of position measurement with cubic error and corresponding modified slope constraint.

相应的斜坡约束修正为

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x,k} \\ r_{y,k} \\ r_{z,k} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \frac{r_{x,k} - \sqrt{U_y^2 + U_z^2} \tan \gamma_{gs} - U_x}{\tan \gamma_{gs}}. \quad (45)$$

相应地, 终端位置约束修正为

$$\mathbf{r}_f = \begin{bmatrix} \sqrt{U_y^2 + U_z^2} \tan \gamma_{gs} + U_x & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (46)$$

基于式(45)和(46), 对问题P3和P4中的斜坡约束和终端位置约束进行相应的替换, 采用算法1可以得到位置测量误差为长方体约束集的鲁棒解.

3.3 存在相对速度导航误差的情况

考虑速度测量存在误差, 且误差约束在球形集合内, 表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{x,0} &= \bar{\mathbf{v}}_{x,0} + \Delta \mathbf{v}_{x,0}, \\ \mathbf{v}_{y,0} &= \bar{\mathbf{v}}_{y,0} + \Delta \mathbf{v}_{y,0}, \\ \mathbf{v}_{z,0} &= \bar{\mathbf{v}}_{z,0} + \Delta \mathbf{v}_{z,0}, \\ \left\| \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}_{x,0} & \Delta \mathbf{v}_{y,0} & \Delta \mathbf{v}_{z,0} \end{bmatrix} \right\|_2 &\leq U_v. \end{aligned} \quad (47)$$

根据式(37), 速度误差会随着时间的增加而提高. 对于球形的速度误差, 对位置的影响仍然保持球形, 但是球形的半径随时间正比例增加, 速度测量误差为球形约束集的情况如图6所示.

定义误差球与斜坡约束的切点坐标为 $[\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i]$, 标称轨迹的位置坐标为 $[x_i, y_i, z_i]$, 球形误差圆心坐标为 $[\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i]$. 为了更直观地显示各坐标的几何关系, 本文将三维空间 $oxyz$ 压缩为二维平面 oxw . 基于原点、切点和 t_i 时刻位置坐标点确定二维平面 oxw , 采用原 y 轴的正方向一侧作为 w 轴的正方向, 并保持 x 轴和原三维

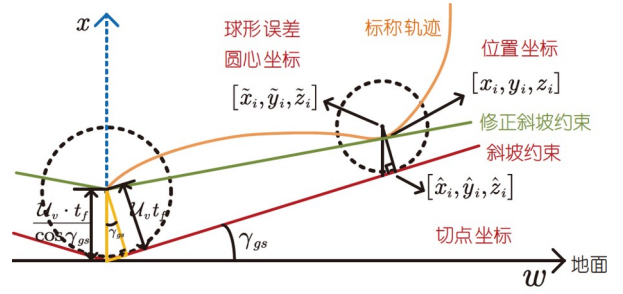


图 6 (网络版彩图)速度测量误差为球形约束集的示意图

Figure 6 (Color online) Illustration of velocity measurement with spherical error.

平面 x 轴一致.

图6中坐标 $x_i = r_{x,i}$, $y_i = r_{y,i}$, $z_i = r_{z,i}$. 新坐标 $\hat{x}_i$ 和原来相同, 坐标 w_i 对应关系为

$$\begin{aligned} w_i &= \text{sign}(r_{y,i}) \sqrt{y_i^2 + z_i^2}, \\ \text{sign}(r_{y,i}) &= \begin{cases} 1, & r_{y,i} \geq 0, \\ -1, & r_{y,i} < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (48)$$

标称轨迹上的位置坐标 $[x_i, y_i, z_i]$ 到斜坡约束的切点坐标 $[\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i]$ 的距离为

$$\mathcal{E}_{gs}(i) = \left(r_{x,i} - \sqrt{r_{y,i}^2 + r_{z,i}^2} \tan \gamma_{gs} \right) \cdot \cos \gamma_{gs}. \quad (49)$$

根据算法1的解, 坐标 $[x_i, y_i, z_i]$ 是已知的, 进而得到 $[\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i]$ 的坐标为

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= r_{x,i} - \mathcal{E}_{gs}(i) \cos(\gamma_{gs}), \\ \hat{w}_i &= \sqrt{r_{y,i}^2 + r_{z,i}^2} + \text{sign}(r_{y,i}) \cdot \mathcal{E}_{gs}(i) \cdot \sin(\gamma_{gs}). \end{aligned} \quad (50)$$

球形误差的圆心坐标为 $[\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i]$, 和切点坐标 $[\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i]$ 的距离为球半径 $r_{\Delta v, i} = \|\Delta \mathbf{v}_0\|_2 \cdot \Delta t \cdot i$. 当误差取最大值时, 得到圆心坐标 $[\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i]$ 对应的新坐标为

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= \hat{x}_i + U_v \cdot \Delta t \cdot i \cos(\gamma_{gs}), \\ \tilde{w}_i &= \sqrt{\hat{y}_i^2 + \hat{z}_i^2} - \text{sign}(r_{y,i}) \cdot \mathcal{E}_{gs}(i) \cdot \sin(\gamma_{gs}). \end{aligned} \quad (51)$$

需要通过两个点来确定修正的斜坡约束, 终端时刻的位置约束修正为

$$\mathbf{r}_f = \begin{bmatrix} U_v \cdot t_f \\ \cos \gamma_{gs} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (52)$$

修正的斜坡约束通过修正终端时刻位置

和 $[\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i]$ 确定斜率为

$$\zeta_{gs}(i) = \tan^{-1} \left[\frac{\tilde{x}_i - \frac{\mathcal{U}_v \cdot t_f}{\cos \gamma_{gs}}}{\tilde{w}_i} \right]. \quad (53)$$

考虑到切点后的位置信息, 虽然垂向距离增加使其远离斜坡约束, 但由于初始速度偏差累计导致的位置误差也在增加, 因此仍然可能出现违反斜坡约束的情况, 进而提出式(49)的修正距离 $\Omega_{gs}(i)$ 为

$$\Omega_{gs}(i) = \mathcal{E}_{gs}(i) - \mathcal{U}_v \cdot \Delta t \cdot i. \quad (54)$$

计算 $\Omega_{gs}(i)$ 的第一个局部最小值点的位置, 如果局部最小值在一段连续区间内保持不变, 则取最后一个点的位置. 该位置对应的离散点的序号为 p . 则选择的修正斜坡斜率为

$$\gamma_{\text{new}} = \max(0, \zeta_{gs}(p)), \quad (55)$$

式中, $\max$ 为取最大值函数. 当 $\zeta_{gs}(p) < 0$ 时, 问题P3和P4为非凸的问题, 因此需要确保 $\zeta_{gs}(p) \geq 0$.

式(55)对应的修正斜坡约束为

$$\tan \gamma_{\text{new}} \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x,k} \\ r_{y,k} \\ r_{z,k} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq r_{x,k} - \frac{\mathcal{U}_v \cdot t_f}{\cos \gamma_{gs}}. \quad (56)$$

基于以上的误差分析, 修正问题P3中的斜坡约束和终端约束, 构建问题P5为

$$\begin{aligned} P5: \quad & \min_{\mathbf{u}(t_k), \sigma(t_k)} -z(t_{N+1}) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{u}(t_k), \sigma(t_k)} \alpha \Delta t \sum_{k=0}^N \sigma(t_k) \\ & \text{subject to: 式(22)–(24), (52), (56).} \end{aligned} \quad (57)$$

相应地, 修正问题P4中的斜坡约束和终端约束, 构建问题P6为

$$\begin{aligned} P6: \quad & \min_{\mathbf{u}(t_k), \sigma(t_k)} -z(t_{N+1}) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{u}(t_k), \sigma(t_k)} \alpha \Delta t \sum_{k=0}^N \sigma(t_k) \\ & \text{subject to: 式(22), (23), (30), (52), (56).} \end{aligned} \quad (58)$$

综上, 本文提出迭代求解方法流程如算法2所示.

3.4 同时存在相对位置和速度导航误差的情况

假设位置和速度的导航测量误差都被约束在球形集合内, 表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \bar{\mathbf{r}}_0 + \Delta \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{v}}_0 + \Delta \mathbf{v}_0 \\ \|\Delta \mathbf{r}_0\|_2 &\leq \mathcal{U}_r, \quad \|\Delta \mathbf{v}_0\|_2 \leq \mathcal{U}_v. \end{aligned} \quad (59)$$

同样采用算法2进行迭代求解, 需要修改的是对应的误差球的半径为速度和位置的叠加, 表示为

$$r_{\Delta v, \Delta r, i} = \mathcal{U}_v \cdot \Delta t \cdot i + \mathcal{U}_r. \quad (60)$$

基于式(48)–(56), 修改误差半径为叠加后的式(60), 则可以构建问题P5和P6, 此处不再重复公式.

总的来说, 算法1针对时不变位置误差给出了求解方法, 算法2则提供了一种针对时变误差的迭代求解的方法.

4 仿真验证

根据以上建立的问题P1–P6以及算法1和2, 对提出的基于序列凸优化的动力下降段轨迹优化方法以及含有高度、位置、速度测量误差的情况进行仿真验证.

仿真的场景设定为火星探测器动力下降段, 主要参数基于文献[13], 如不特殊说明, 设定以下参数: 火星表面重力加速度 $\mathbf{g}_m = 3.7114 \text{ m/s}^2$, 初始质量 $m_{\text{wet}} = 1905 \text{ kg}$, 最大推力 $T_{\text{max}} = 13258.17 \text{ N}$, 最小推力 $T_{\text{min}} = 4971.82 \text{ N}$, 燃料消耗系数 $5.09 \times 10^{-4} \text{ kg/N}$, 斜坡角 $\gamma_{gs} = 10^\circ$, 终端时间 $t_f = 78 \text{ s}$, 离散点为200个, 初始测量位置为 $\mathbf{r}_0 = [1500 \ 500 \ 1500]^T \text{ m}$.

算法2 考虑速度导航误差的迭代求解算法

1. 定义求解精度 $\epsilon_c > 0$, 令 $\gamma_{\text{old}} = \gamma_{gs}$.
2. 根据系统参数, 求解离散凸问题P3, 得到解 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot)$, $\hat{\sigma}(\cdot)$, $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$.
3. 构建凸优化修正问题P4, 并得到解 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot)$, $\hat{\sigma}(\cdot)$, $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$.
4. 根据 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot)$, $\hat{\sigma}(\cdot)$, $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$ 得到标称轨迹 $[x_i, y_i, z_i]$, 基于式(48)–(56)构建问题P5, 求解得到新的解, 置为 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot)$, $\hat{\sigma}(\cdot)$, $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$.
5. **while** $\|\gamma_{\text{new}} - \gamma_{\text{old}}\|_2 \geq \epsilon_c$ **do**
6. 赋值 $\tilde{\mathbf{X}}(\cdot) = \hat{\mathbf{X}}(\cdot)$, 计算 $z_i(t_k) = \tilde{z}(t_k)$.
7. 构建问题P6, 赋值 $\gamma_{\text{old}} = \gamma_{\text{new}}$.
8. 解问题P6, 得到解 $\hat{\mathbf{u}}(\cdot)$, $\hat{\sigma}(\cdot)$, $\hat{\mathbf{X}}(\cdot)$, 并计算新的 γ_{new} .
9. 计算并判断误差 $\|\gamma_{\text{new}} - \gamma_{\text{old}}\|_2 \geq \epsilon_c$ 是否满足.
10. **end while**
11. 输出 $\mathbf{u}^*(\cdot) = \hat{\mathbf{u}}(\cdot)$, $\sigma^*(\cdot) = \hat{\sigma}(\cdot)$, $\mathbf{X}^*(\cdot) = \hat{\mathbf{X}}(\cdot)$ 为燃料最优解.

4.1 修正凸优化与未修正的对比

设定初始测量速度为 $\mathbf{v}_0 = [-75 \ 0 \ 50]^T$ m/s, 不同着陆终端时间分别为 $t_f=68, 88, 108, 128$ s, 分别得到传统的凸优化的结果和修正凸优化的结果如图7所示. 从图7中可看出, 随着终端时间 t_f 的增加, 传统的凸优化方法会逐渐偏离max-min-max的bang-bang控制剖面, 进而得到的解偏离最优解的程度变大. 序列凸优化方法则能够有效消除随着终端时间增加而增大的线性化误差, 从而更接近最优解.

此外, 本文将传统凸优化方法、序列凸优化方法与最优控制求解软件GPOPS进行对比, 如图8所示, 结果表明本文提出的基于序列凸优化修正的算法相比传统凸优化更加接近GPOPS最优解. 需要说明的是, 图8中序列凸优化推力与GPOPS的最优推力有轻微不同的原因是序列凸优化是基于零阶保持器进行离散化, 而GPOPS是针对连续系统的直接数值求解.

4.2 存在相对位置导航误差

分别对高度测量存在误差、位置测量存在球形误差和长方体误差进行仿真, 基于蒙特卡罗仿真, 在多组测试中加入随机误差分布, 来验证求解的轨迹在误差

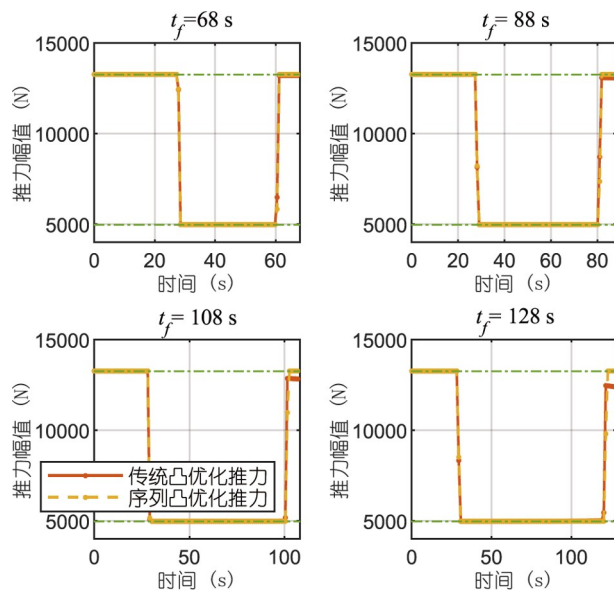


图7 (网络版彩图)传统凸优化和序列凸优化的推力对比仿真结果

Figure 7 (Color online) Simulation results of thrust between conventional convex optimization and sequential convex optimization.

集合内的鲁棒性.

对高度存在测量误差的情况进行求解, 高度测量误差式(38)设定为 $\mathcal{U}_x = 50$ m, 初始测量速度设定为 $\mathbf{v}_0 = [-75 \ 0 \ 100]^T$ m/s, 采用蒙特卡罗测试, 分别得到考虑和未考虑高度导航误差的结果及局部放大如图9和10所示.

图9和10反映了当未考虑高度导航误差时, 着陆器会违反斜坡约束, 并在终端时刻与地面相撞, 而本文考虑了导航误差的方法则能够保证始终在约束条件内, 且终端位置位于地面上方. 图9中鲁棒解对应的斜坡约

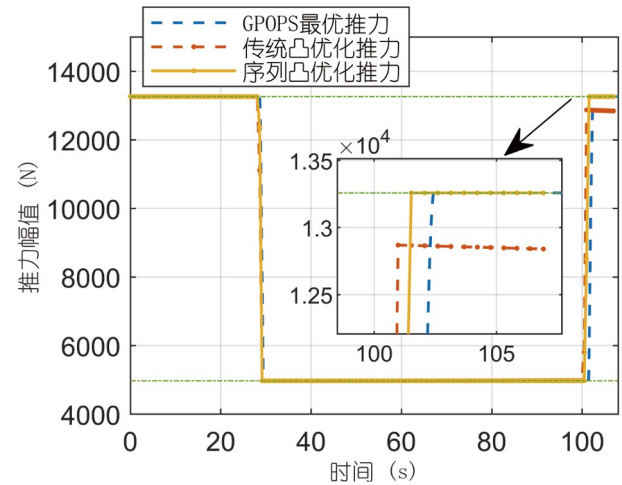


图8 (网络版彩图)三种不同方法的最优推力对比仿真结果
Figure 8 (Color online) Simulation results of optimal thrust comparison of three different methods.

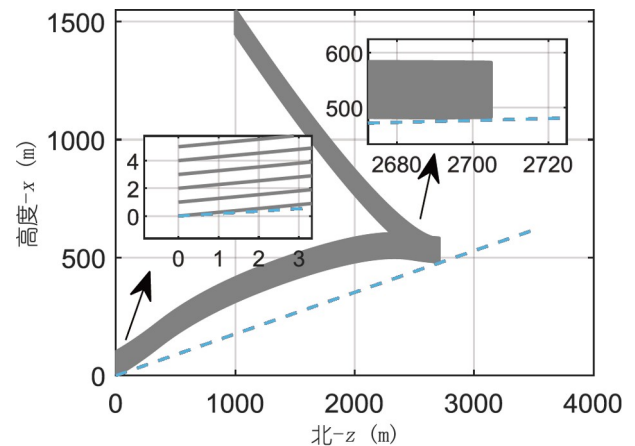


图9 (网络版彩图)考虑高度导航误差的蒙特卡罗对比仿真
Figure 9 (Color online) Monte Carlo simulation considering altitude navigation errors.

束角及局部放大如图11所示.

对位置测量存在球形误差的情况, 球形误差式(39)设定为 $\mathcal{U}_r = 50$ m, 得到 x - z 平面的蒙特卡罗仿真结果及局部放大如图12所示

对高度存在长方体误差的情况, 误差式(44)设定为 $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y = \mathcal{U}_z = 30$ m, 得到 x - z 平面的蒙特卡罗仿真结果及局部放大如图13所示

4.3 存在相对速度导航误差

考虑速度测量误差为球形误差集合, 速度误差式

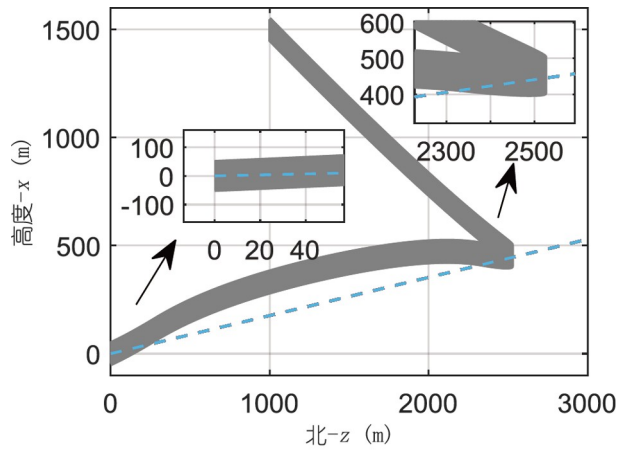


图 10 (网络版彩图)未考虑高度导航误差的蒙特卡罗对比仿真

Figure 10 (Color online) Monte Carlo simulation without considering altitude navigation errors.

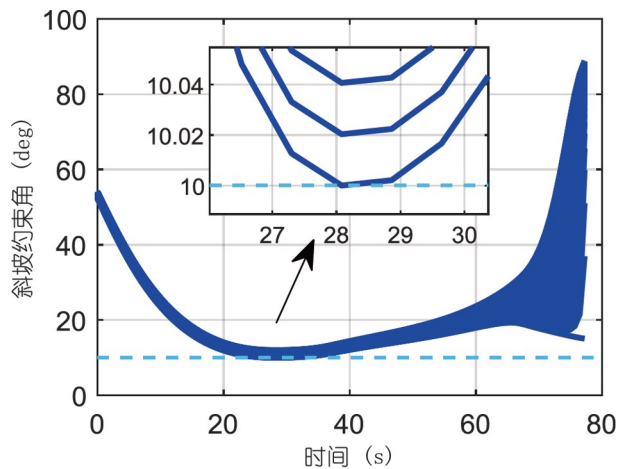


图 11 (网络版彩图)高度存在测量误差: 斜坡约束角的蒙特卡罗仿真

Figure 11 (Color online) Height measurement with error: Monte Carlo simulation of slope angle.

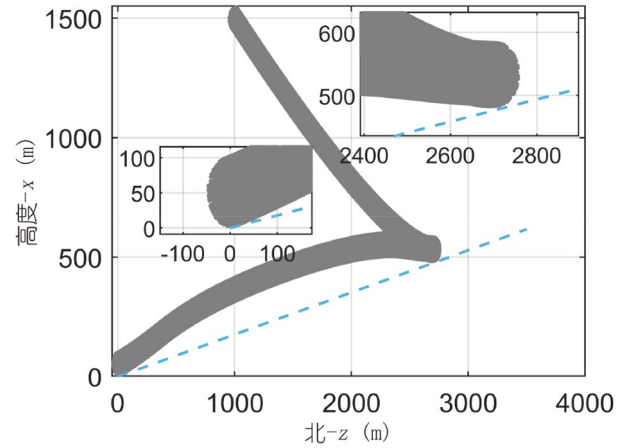


图 12 (网络版彩图)位置球形测量误差: x - z 平面位置的蒙特卡罗仿真

Figure 12 (Color online) Position measurement with spherical error: Monte Carlo simulation of x - z plane positions.

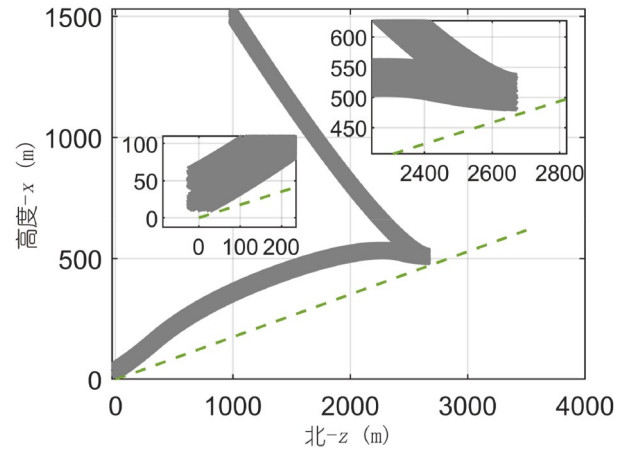


图 13 (网络版彩图)位置长方体测量误差: x - z 平面位置蒙特卡罗仿真

Figure 13 (Color online) Position measurement with cubic error: Monte Carlo simulation of x - z plane positions.

(47) 参数设定为 $\mathcal{U}_v = 2$ m/s, 初始测量速度设定为 $\mathbf{v}_0 = [-75 \ 0 \ 60]^T$ m/s. 未考虑速度导航误差的蒙特卡罗仿真结果及局部放大如图14所示. 从图中可以看出随着时间的增加, 位置误差是逐渐增加的, 从放大的局部图像可以看出, 在存在随机误差的情况下, 终端位置违反了约束条件.

采用本文考虑导航误差的方法得到的蒙特卡罗仿真结果及局部放大如图15所示. 从图中可以看出随着时间的增加, 误差是逐渐增加的, 从放大的局部图像可以看出, 本文的鲁棒解在存在随机误差的情况下仍

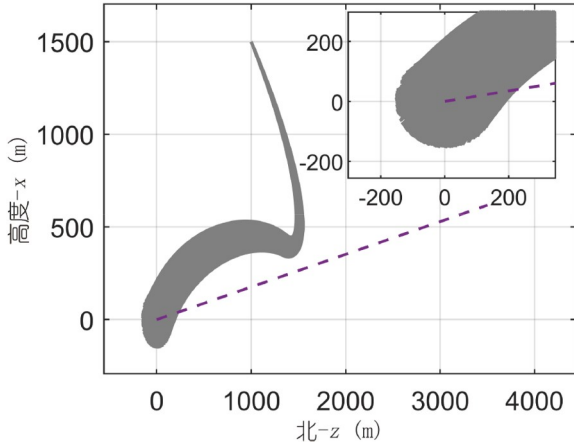


图 14 (网络版彩图)未考虑速度导航误差的蒙特卡罗仿真
Figure 14 (Color online) Monte Carlo simulation without considering velocity navigation errors.

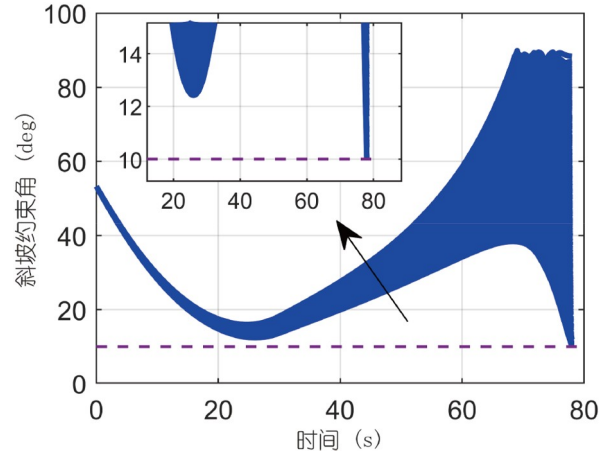


图 16 (网络版彩图)速度球形测量误差: 斜坡约束角的蒙特卡罗仿真
Figure 16 (Color online) Velocity measurement with spherical error: Monte Carlo simulation of slope angle.

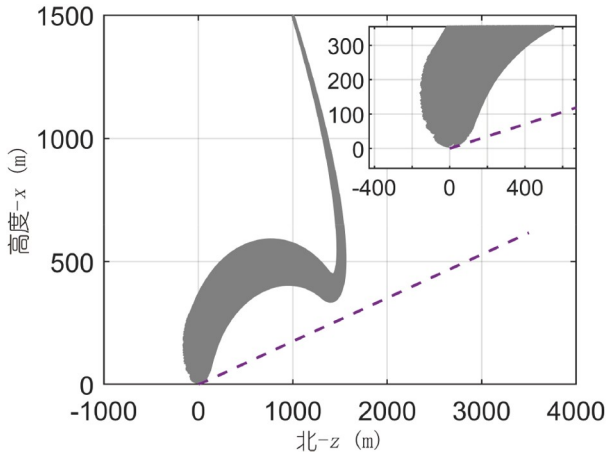


图 15 (网络版彩图)速度球形测量误差: x - z 平面位置蒙特卡罗仿真
Figure 15 (Color online) Velocity measurement with spherical error: Monte Carlo simulation of x - z plane positions.

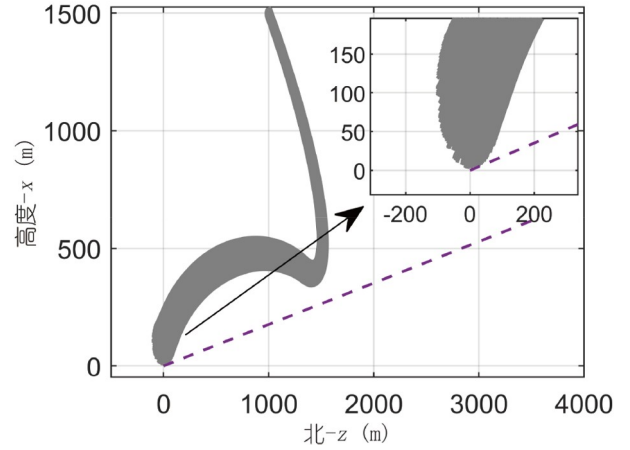


图 17 (网络版彩图)位置和速度都有球形测量误差的蒙特卡罗仿真
Figure 17 (Color online) Monte Carlo simulation of spherical measurement errors for both position and velocity.

能够满足约束条件, 并实现接近着陆点. 相应地, 鲁棒解对应的斜坡约束角及局部放大如图16所示.

4.4 同时存在位置和速度导航误差

考虑位置和速度测量误差都为球形误差集合, 位置的球形误差大小设定为 $U_r = 25$ m, 速度的球形误差大小设定为 $U_v = 1$ m/s, 初始测量速度设定为 $\mathbf{v}_0 = [-75 \ 20 \ 60]^T$ m/s. 对采用本文方法得到的解进行蒙特卡罗仿真, 得到如图17的仿真结果. 从图中可以看出针对位置和速度同时存在导航误差的情况,

本文提出的算法仍然能够在满足约束条件的情况下得到鲁棒解.

5 结论

首先, 针对动力下降段的自主导航存在误差的场景, 本文提出将误差设定在导航精度的有界闭集合内, 避免了数据不足导致的概率分布不准确. 其次, 本文提出基于序列凸优化的修正方法对传统凸优化方法进行改进, 得到更加精确的解. 在此基础上, 本文分别讨论

了高度、位置以及速度存在测量不确定性的情况, 分析了球形不确定性、长方体不确定性的边界条件, 并逐一进行了数学化描述. 最后, 总结了应对时不变的位置误差和时变速度误差的鲁棒求解算法. 在仿真

说明中, 采用对比仿真和蒙特卡罗仿真的方法验证了本文提出算法的准确性和有效性. 结论说明本文提出的算法在应对有界导航误差上能够得到鲁棒最优解.

参考文献

- 1 Wu W R, Li H T, Li Z, et al. Status and prospect of China's deep space TT&C network (in Chinese). *Sci Sin Inf*, 2020, 50: 87–127 [吴伟仁, 李海涛, 李赞, 等. 中国深空测控网现状与展望. 中国科学: 信息科学, 2020, 50: 87–127]
- 2 Ping J. Thermal environmental effect on the Chang'E-5 lander revealed by *in-situ* temperature data. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2023, 66: 269632
- 3 Ji J, Huang X. Tianwen-1 releasing first colored global map of Mars. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2023, 66: 289533
- 4 Wu W R, Li J, Huang X Y, et al. INS/rangefinder/velocimetry based autonomous navigation method for safe landing (in Chinese). *J Astron*, 2015, 36: 893–899 [吴伟仁, 李骥, 黄翔宇, 等. 惯导/测距/测速相结合的安全软着陆自主导航方法. 宇航学报, 2015, 36: 893–899]
- 5 Zhao Y, Wang X L, Huang X Y, et al. Tianwen-1 lander guidance navigation and control system for Mars soft landing (in Chinese). *Aerosp Control Appl*, 2021, 47: 48–57 [赵宇, 王晓磊, 黄翔宇, 等. 天问一号火星软着陆制导、导航与控制系统. 空间控制技术与应用, 2021, 47: 48–57]
- 6 Duan J F, Zhang Y, Kong J, et al. Orbit determination, positioning strategy design, and accuracy evaluation of Chang'E-5 (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2021, 51: 119507 [段建锋, 张宇, 孔静, 等. 嫦娥五号定轨定位策略设计与精度评估. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2021, 51: 119507]
- 7 Zhang H H, Li J, Guan Y F, et al. Autonomous navigation for powered descent phase of Chang'E-3 lunar lander (in Chinese). *Control Theor Appl*, 2014, 31: 1686–1694 [张洪华, 李骥, 关轶峰, 等. 嫦娥三号着陆器动力下降的自主导航. 控制理论与应用, 2014, 31: 1686–1694]
- 8 Zhang H H, Guan Y F, Huang X Y, et al. Guidance navigation and control for Chang'E-3 powered descent (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2014, 44: 377–384 [张洪华, 关轶峰, 黄翔宇, 等. 嫦娥三号着陆器动力下降的制导导航与控制. 中国科学: 技术科学, 2014, 44: 377–384]
- 9 Zhang H H, Guan Y F, Cheng M, et al. Guidance navigation and control for Chang'E-4 lander (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2019, 49: 1418–1428 [张洪华, 关轶峰, 程铭, 等. 嫦娥四号着陆器制导导航与控制系统. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 1418–1428]
- 10 Guo Y, Hawkins M, Wie B. Waypoint-optimized zero-effort-miss/zero-effort-velocity feedback guidance for Mars landing. *J Guid Control Dyn*, 2013, 36: 799–809
- 11 Cui P, Qin T, Zhu S, et al. Trajectory curvature guidance for Mars landings in hazardous terrains. *Automatica*, 2018, 93: 161–171
- 12 Yang H, Zhu S Y, Long J T, et al. A convex trajectory curvature sliding mode guidance method for extraterrestrial body landing (in Chinese). *J Astron*, 2024, 45: 571–579 [杨贺, 朱圣英, 龙嘉腾, 等. 一种地外天体着陆凸轨迹曲率滑模制导方法. 宇航学报, 2024, 45: 571–579]
- 13 Acikmese B, Ploen S R. Convex programming approach to powered descent guidance for Mars landing. *J Guid Control Dyn*, 2007, 30: 1353–1366
- 14 Gao D, Gong Y, Li C, et al. Adaptive pseudospectral successive convex optimization for six-degree-of-freedom powered descent guidance. *Aerosp Sci Tech*, 2024, 155: 109544
- 15 You S, Wan C, Dai R, et al. Learning-based onboard guidance for fuel-optimal powered descent. *J Guid Control Dyn*, 2021, 44: 601–613
- 16 Liu Y Z, Wang M M, Dong M, et al. Guidance methods for lunar/Mars landing and advances in considering uncertainty (in Chinese). *Flight Control Detect*, 2023, 6: 1–22 [刘云昭, 王明明, 董淼, 等. 月/火着陆制导方法与考虑不确定性的研究进展. 飞控与探测, 2023, 6: 1–22]
- 17 Huang X Y, Xu C, Guo M W. Research progress of autonomous navigation and control technology for extraterrestrial soft landing (in Chinese). *J Deep Space Expl*, 2024, 11: 3–15 [黄翔宇, 徐超, 郭敏文. 地外天体软着陆自主导航与控制技术研究进展. 深空探测学报, 2024, 11: 3–15]
- 18 Deng Y S, Xia Y Q, Sun Z Q, et al. Autonomous trajectory planning method for Mars precise landing in disturbed environment (in Chinese). *Acta Aeronaut Astronaut Sin*, 2021, 42: 524834 [邓云山, 夏元清, 孙中奇, 等. 扰动环境下火星精确着陆自主轨迹规划方法. 航空学报, 2021, 42: 524834]
- 19 Feng Z X, Xue W C, Zhang R, et al. A multi-stage robust optimization guidance method for endoatmospheric powered descent of reusable rockets (in Chinese). *Acta Autom Sin*, 2024, 50: 505–517 [冯子鑫, 薛文超, 张冉, 等. 可回收火箭大气层内动力下降的多阶段鲁棒优化制导

方法. 自动化学报, 2024, 50: 505–517]

- 20 Chen X L, Zhang R, Zhang X Y. Combined disturbance compensation guidance for powered descent in atmosphere (in Chinese). *Acta Aeronaut Astronaut Sin*, 2023, 44: 628465 [陈星伦, 张冉, 张晓燕. 大气层内动力下降段的组合干扰补偿制导. *航空学报*, 2023, 44: 628465]
- 21 Wang F, Yang S, Xiong F F, et al. Robust trajectory optimization using polynomial chaos and convex optimization. *Aerosp Sci Tech*, 2019, 92: 314–325
- 22 Gao X Z, Huang X Y, Xu C. Intelligent fusion autonomous navigation method for Mars precise landing (in Chinese). *J Deep Space Expl*, 2024, 11: 24–30 [高锡珍, 黄翔宇, 徐超. 火星精确着陆智能融合自主导航方法. *深空探测学报*, 2024, 11: 24–30]
- 23 Shao W, Wang B N, Dou L F, et al. Visual navigation algorithm for asteroid lander based on irregular curve matching (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2022, 52: 214510 [邵巍, 王博宁, 窦凌飞, 等. 基于不规则曲线匹配的小天体着陆器视觉导航算法. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2022, 52: 214510]

Robust trajectory optimization for Mars lander powered descent considering navigation errors

GAO DuoZhi¹, GONG YouMin², GUO YanNing^{1*}, LI ChuanJiang¹ & MA GuangFu^{1,2}

¹ School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

² School of Mechatronics Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology (Shenzhen), Shenzhen 518055, China

*Corresponding author (email: guoyan@hit.edu.cn)

To address the issue of bounded measurement errors in autonomous navigation devices used during the descent phase of Mars lander, this study proposes a robust trajectory optimization algorithm based on convex optimization. First, the traditional convex optimization-based trajectory optimization method is improved and modified, and a fast and accurate solution method based on sequential convex optimization is established. Then, models and analyses are conducted for navigation errors in altitude, position, and velocity, and modified slope constraints corresponding to different scenarios are provided. Subsequently, robust trajectory-solving algorithms targeting position and velocity errors are proposed. Finally, the proposed improved convex optimization algorithm and robust trajectory optimization algorithm are validated through simulation cases, and the results demonstrate the accuracy and robustness of the solutions obtained.

Mars exploration, navigation error, powered descent phase, convex optimization, robust trajectory optimization

PACS: 95.40.+s, 45.10.Db, 95.55.Pe, 02.30.Yy, 07.05.Dz

doi: [10.1360/SSPMA-2024-0308](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0308)