



基于分数阶模型研究非晶合金应力松弛行为

崔静波¹, 邢光辉¹, 吕国建^{1,2*}, Kato Hidemi³, 乔吉超^{1*}

1. 西北工业大学力学与交通运输工程学院, 西安 710072

2. 西北工业大学重庆科创中心, 重庆 401135

3. 东北大学金属材料研究所, 仙台 980-8577

*联系人, 乔吉超, E-mail: qjczy@nwpu.edu.cn; 吕国建, E-mail: guojian.lyu@nwpu.edu.cn

收稿日期: 2025-09-18; 接受日期: 2025-10-24; 网络出版日期: 2025-12-17

国家自然科学基金(编号: 12472069, 52271153, 52301219)、陕西省杰出青年基金(编号: 2021JC-12)、陕西省自然科学基金(编号: 2025GH-YBXM-046)、重庆市自然科学基金(编号: CSTB2023NSCQ-MSX0573)和中央高校基本科研业务费专项资金(编号: 5000230147)资助项目

摘要 非晶合金因其长程无序原子结构而表现出独特的力学与物理性能, 是当前固体力学与凝聚态物理领域关注的重要问题之一. 应力松弛作为其典型力学行为, 能够有效反应材料内部的结构演变和能量耗散过程, 对理解非晶材料的变形机制具有重要意义. 经典Maxwell模型虽被广泛用于描述黏弹性响应, 但难以准确刻画非晶合金中与时间、温度密切相关的非线性松弛行为. 广义Maxwell模型通过增加元件数量在一定程度上提高了拟合精度, 却引入了参数过多、物理意义不够明确等问题. 分数阶微积分理论的引入为构建物理图像清晰、参数简洁的本构模型提供了新思路. 本研究以Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀非晶合金为对象, 利用动态力学分析仪开展了系统的应力松弛实验. 基于分数阶微积分理论对经典Maxwell模型进行修正, 建立了能够更准确描述非晶合金应力松弛行为的本构模型. 实验结果表明, 该模型仅需少量参数即可实现对应力松弛过程的精确描述, 显著提高了拟合精度. 进一步分析了不同温度条件下模型的响应特征, 揭示了温度对应力松弛动力学的影响规律. 本研究为理解非晶合金在热力耦合作用下的结构演化提供了新的视角与方法支撑.

关键词 非晶合金, 应力松弛, 本构模型, 分数阶微积分, 变形机制

PACS: 61.43.Dq, 62.40.+i, 62.20.Hg

1 引言

非晶合金是一类兼具金属与玻璃特性的新型亚稳态金属材料, 不仅保留了金属的导电性与磁性, 还具备玻璃的高弹性和热塑性特征^[1-4]. 从结构上看, 非晶合金原子间以金属键结合, 但排列方式缺乏长程有序性,

形成类似于传统玻璃的非晶态结构^[5-7]. 得益于这种独特的结构特征, 该类材料展现出独特的力学、物理与化学性能, 包括高强度、高硬度、高弹性极限、卓越的耐磨耐腐蚀性、软磁性以及高催化活性等^[8-10]. 基于上述性能优势, 非晶合金在精密仪器、生物医疗与航空航天等领域展现出广泛的应用前景^[11-13].

引用格式: 崔静波, 邢光辉, 吕国建, 等. 基于分数阶模型研究非晶合金应力松弛行为. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2026, 56: 266111

Cui J B, Xing G H, Lyu G J, et al. Investigation of stress relaxation behavior of amorphous alloy based on a fractional-order model (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2026, 56: 266111, doi: 10.1360/SSPMA-2025-0407

作为一种典型的亚稳态金属材料, 非晶合金在拉伸、压缩、应力松弛、动态弛豫以及蠕变等多种加载条件下的力学行为已受到广泛研究^[14-18]. 其中, 应力松弛指材料在恒定应变与温度条件下应力随时间逐渐衰减的现象, 是探测体系热力学演化与结构动力学的重要切入口. 如何构建非晶合金微观结构特征、能量状态与变形机制之间复杂耦合关系方面已取得重要进展. Bobrov等人^[19]研究了Zr基非晶合金应力松弛行为, 发现应力松弛主要源于外部应力驱动的不可逆结构松弛, 并表现出活化能分布特征. Luborsky等人^[20,21]系统考察了多种Fe基非晶合金应力松弛过程, 发现松弛速率与样品尺寸及初始结构状态密切相关. Kawamura等人^[22]揭示了屈服对应力松弛行为的显著影响, 即材料在屈服后表现出更快的松弛速率和更低的激活能. Soriano等人^[23]针对Pd基非晶合金在过冷液态区研究表明, 其应力松弛过程的弛豫时间分布保持不变. Luo等人^[24]探测了宽时间和温度窗口下应力松弛过程, 发现了应力松弛曲线从单步衰减转变为两步衰减. 陈长玖等人^[25]指出, 扩展指数方程难以充分描述两步衰减行为背后的复杂动力学特征. Hao等人^[26]通过循环应力松弛实验进一步阐明, 短时松弛阶段主要由 β 弛豫主导, 而长时松弛阶段则转为由 α 弛豫主导. Duan等人^[27]通过多步温度阶梯应力松弛实验, 比较高熵非晶合金与传统非晶合金在类液区比例和动态弛豫谱方面的差异, 指出高熵效应引起液体动力学中的缓慢扩散行为, 从而导致二者在静态与动态力学响应上的区别. Xing等人^[28]基于准点缺陷理论对应力松弛过程中的两步衰减行为进行解耦发现, 动态弛豫主导应力松弛过程, 并提出了一种可有效识别超低频动态弛豫的实验方法. Jiao等人^[29]研究了Pd基非晶合金在应力松弛过程中变形单元能垒分布及其演化, 证实了动力学非均匀性源于微观结构非均匀性, 指出了变形单元的动力学行为、结构非均匀性与宏观弛豫响应之间存在紧密关联. Lu等人^[30]通过开展等温与线性加热模式下的应力松弛实验, 提取了变形单元的能量分布, 进一步探讨了 β 弛豫与变形单元之间的内在联系, 发现 β 弛豫起源于变形单元, 其动力学行为受变形单元密度和能量状态调控. 尽管已有诸多研究推动了对应力松弛行为的理解, 但对该过程的微观机制仍缺乏系统认识.

在黏弹性力学中, 经典Maxwell模型通过弹簧与黏壶的串联结构, 为应力松弛行为提供了一种简洁且参

数明确的力学表示方式^[31]. 然而, 该模型线性本构关系难以充分描述非线性力学响应, 且无法反映材料内部随时间演变的现象. 为克服这些限制, 广义Maxwell模型被提出, 其通过增加元件数量以提升描述能力. 尽管广义Maxwell模型能够更有效地描述某些黏弹性响应, 但其通常具有较多拟合参数, 不仅增加了过拟合风险, 也削弱了理论模型预测可靠性^[32]. 分数阶微积分作为数学分析的一个分支, 将导数和积分推广至非整数阶次^[33,34]. 与传统整数阶导数不同, 分数阶算子具有非局部性和记忆依赖性等特点, 能够更自然地刻画材料力学响应对历史载荷的依赖行为. 研究表明, 基于分数阶导数的本构模型仅需较少参数即可高精度描述黏弹性行为, 表现出较强的灵活性和适用性, 尤其在黏弹性材料的建模中表现出显著优势^[35,36].

本研究利用动态力学分析仪对Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀非晶合金开展应力松弛实验. 为更准确描述其松弛行为, 在经典Maxwell模型基础上引入分数阶微积分理论, 构建了修正分数阶Maxwell (Modified Fractional Maxwell, MFM)本构模型, 并基于实验数据对该模型进行了验证. 进而, 系统分析了温度对应力松弛行为的影响. 本研究结合理论建模与实验验证, 为理解非晶合金在热-力耦合作用下的宏观力学响应与微观结构演化提供了重要依据.

2 实验方法

本研究首先采用B₂O₃助熔剂法, 将高纯度Pd、Pt、Cu、Ni和P原料置于石英管中, 使用B₂O₃覆盖后抽真空并密封, 在氩气气氛下多次熔炼得到成分均匀的Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀母合金^[37]. 然后, 采用高真空单辊甩带技术制备厚度约为30 μm 的非晶合金条带样品. 利用TA Instruments Q850 动态力学分析仪, 在薄膜拉伸模式下对模型合金的动态力学行为进行表征. 在正弦交变应力 $\sigma(t)=\sigma_0\sin(2\pi ft)$ 作用下, 材料产生的应变响应为 $\varepsilon(t)=\varepsilon_0\sin(2\pi ft-\delta)$, 其中 f 为驱动频率, δ 为应力与应变之间的相位差. 复模量定义为 $E^*=\sigma/\varepsilon=E'+iE''$, 其中实部 E' 代表储能模量, 虚部 E'' 代表损耗模量. 内耗因子定义为 $\tan\delta=E''/E'$, 与非晶固体原子或分子的移动能力有关. 在动态力学分析仪应变控制模式下对条带样品进行应力松弛实验. 为避免升温过程中样品发生弯曲, 预先施加0.01 N的预应力. 测试前将样品升温至目标

温度并保温10 min, 以充分达到热平衡. 所施加应变量为0.4%, 测试温度范围为 $0.86T_g-0.93T_g$ (T_g 为非晶合金的玻璃转变温度, 在以3 K/min的加热速率进行的研究中被确定为568 K^[8]).

3 理论背景

在黏弹性理论中, 材料力学行为通常由弹簧与黏壶两种基本力学元件描述. 弹簧元件服从胡克定律, 其变形在加载与卸载过程中瞬时发生且完全可逆^[34]:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t), \quad (1)$$

式中, σ 为应力; ε 为应变; E 为弹性模量. 与之不同, 黏壶元件遵循牛顿黏性定律, 其响应具有时间依赖性, 并表现出不可逆的流动特性^[34]:

$$\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t), \quad (2)$$

式中, $\dot{\varepsilon}$ 为应变速率; η 为黏度系数.

分数阶单元(也称Scott-Blair单元)通过引入分数阶本构关系, 在纯弹性($\alpha=0$)与纯黏性($\alpha=1$)行为之间建立连续过渡的数学描述^[38]:

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad (3)$$

式中, E 和 τ 分别为弹性模量与弛豫时间; $\alpha(0<\alpha<1)$ 为应变的分数导数的非整数正阶, 用于刻画材料的记忆特性及其介于类固体与类流体之间的力学响应行为. 式(3)中的分数阶导数可采用Caputo定义, 该定义在黏弹性力学中应用广泛^[34]:

$$\frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (4)$$

式中, Γ 为Gamma函数, 其表达式为^[39]

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (5)$$

在单位阶跃应变 $\varepsilon(t)$ 作用下, 结合式(3)–(5), 分数阶单元的松弛模量 $G(t)$ 可由下式给出^[34]:

$$G(t) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-\alpha}. \quad (6)$$

在恒定应变 ε_0 作用下, 归一化应力可表述为^[34]

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-\alpha}. \quad (7)$$

这种对时间呈现幂律依赖关系的特性, 能够自然地反映出该类材料与时间相关的变形特征, 尤其适用于描述非晶固体(非晶合金, 聚合物和沥青等)的黏弹性行为. 图1对比了弹簧、黏壶及分数阶单元的力学响应^[39].

4 结果与讨论

4.1 动态弛豫行为

动态弛豫行为是玻璃态材料本征特性之一, 表现为系统内部局部结构与能量分布时域性调整, 并伴随着持续的波动与能量耗散^[40]. 该特性使得玻璃材料展现出丰富的动力学行为, 能够在长期演化中维持动态平衡, 并对温度变化、力学加载等外部激励产生特征响应. 对非晶合金动态弛豫行为开展研究, 有助于揭示其微观原子运动机制、应力响应行为以及玻璃态的本质物理特性^[1]. 图2为Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀非晶合金在3 K/min加热速率和4 Hz驱动频率下, 归一化储能模量 E'/Eu 和归一化损耗模量 E''/Eu 随温度演化过程. 其中, Eu 为未弛豫模量, 可近似视为室温下的储能模量. 随着温度的升高, 其动态弛豫行为可划分为两个区域. 在温度低于470 K时, E'/Eu 基本保持为1, E''/Eu 接近于0, 表明材料表现为高模量弹性固体, 力学行为主要由弹性变形主导; 在470–600 K温度区间内, E'/Eu 逐渐下降, E''/Eu 先上升后下降. 在535 K附近可观察到一个呈“肩膀”形态的 β 弛豫峰. β 弛豫是一种可逆过程, 与原子尺度的局部重组密切相关, 影响非晶合金的变形机制、玻璃转变、晶化及扩散过程^[41,42]. 随着温度进一步升高, E'/Eu 急剧下降, 而 E''/Eu 急剧上升, 在约592 K时达

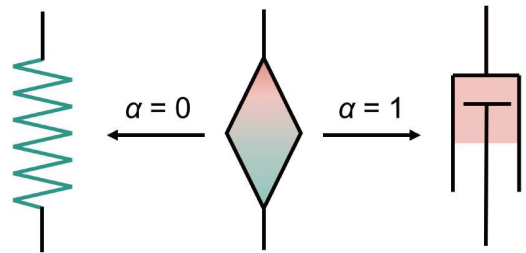


图1 (网络版彩图)分数阶单元的力学行为示意图. 当 $\alpha=0$ 时, 该单元表现为纯弹性响应; 当 $\alpha=1$ 时, 则呈现纯黏性行为. Figure 1 (Color online) Schematic diagram of the mechanical behavior of a fractional element. When $\alpha=0$, the element exhibits a purely elastic response. When $\alpha=1$, it exhibits a purely viscous behavior.

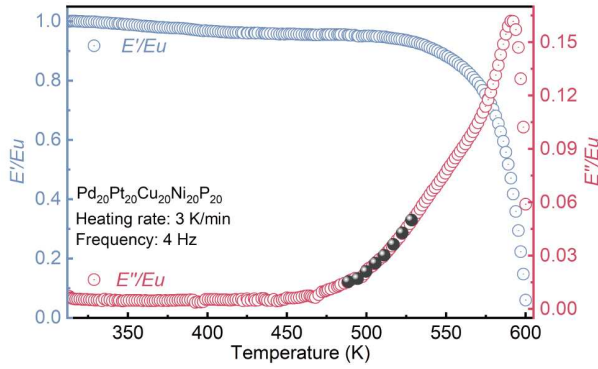


图 2 (网络版彩图) $\text{Pd}_{20}\text{Pt}_{20}\text{Cu}_{20}\text{Ni}_{20}\text{P}_{20}$ 非晶合金归一化储能模量 E'/E_u 与归一化损耗模量 E''/E_u 随温度演化过程(加载频率为 4 Hz, 升温速率为 3 K/min). 灰色球体的位置是本职工作应力松弛的测试温度

Figure 2 (Color online) Evolution of the normalized storage modulus E'/E_u and the normalized loss modulus E''/E_u of $\text{Pd}_{20}\text{Pt}_{20}\text{Cu}_{20}\text{Ni}_{20}\text{P}_{20}$ amorphous alloy (driving frequency: 4 Hz, heating rate: 3 K/min). The positions of the gray balls are the temperatures of the stress relaxation tests in this work.

到最大值, 对应玻璃态材料的 α 弛豫. α 弛豫关联着非晶合金大规模原子协同重排运动, 与塑性流动密切相关^[26].

4.2 应力松弛模型

非晶合金在恒定力学激励下表现出介于弹性固体与黏性流体之间的变形行为, 表现出典型的黏弹性响应特征. 与动态力学分析中周期性应变激励不同, 应力松弛指在恒定应变与恒定温度条件下, 材料内部黏性应变分量随时间逐渐累积, 导致应力逐渐衰减的物理现象.

作为典型的黏弹性材料, 非晶合金表现出复杂的黏弹性力学行为, 难以通过简单的弹簧或黏壶单元予以充分描述. 如图 3(a) 所示, 由弹簧与黏壶单元串联组成的经典 Maxwell 模型为模拟黏弹性行为提供了基础理论框架, 其本构关系可表示为^[34]

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{E_{el}}{\eta_1}\sigma(t) = E_{el}\frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (8)$$

式中, $\sigma(t)$ 与 $\varepsilon(t)$ 分别为应力与应变; E_{el} 为弹簧的弹性模量; η_1 为黏壶的黏度系数. 在恒定应变 ε_0 下, 松弛模量 $G(t)$ 随时间的演变可表示为^[34]

$$G(t) = E_{el}e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (9)$$

相应地, 归一化应力松弛行为可描述为^[31]

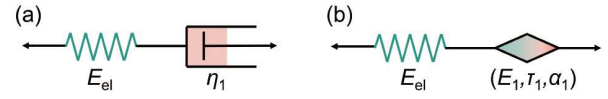


图 3 (网络版彩图) (a) 经典 Maxwell 模型; (b) 分数阶 Maxwell 模型

Figure 3 (Color online) (a) Classic Maxwell model; (b) fractional Maxwell model.

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (10)$$

式中, $\tau = \eta_1/E_{el}$ 为弛豫时间. 然而, 经典 Maxwell 模型存在明显局限, 其仅能描述具有单一特征时间的指数型弛豫行为(即 Debye 弛豫), 而无法有效刻画非晶合金中存在的多尺度、连续分布的弛豫谱. 为克服这些限制, 可通过将经典 Maxwell 模型中的黏壶元件替换为分数阶单元, 进而构建出分数阶 Maxwell (Fractional Maxwell, FM) 模型, 如图 3(b) 所示. 该模型的应力-应变关系可表示为

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_{el}} + \varepsilon_2(t), \\ \sigma(t) = E_1\tau_1^{\alpha_1}\frac{d^{\alpha_1}\varepsilon_2(t)}{dt^{\alpha_1}}, \\ \frac{d^{\alpha_1}\sigma(t)}{dt^{\alpha_1}} + \frac{E_{el}}{E_1\tau_1^{\alpha_1}}\sigma(t) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

在恒定应变 ε_0 下, 松弛模量 $G(t)$ 随时间的演变可表示为

$$G(t) = E_{el}E_{\alpha_1}\left[-\frac{E_{el}}{E_1}\left(\frac{t^{\alpha_1}}{\tau_1^{\alpha_1}}\right)\right]. \quad (12)$$

相应地, 归一化应力松弛行为表示为

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = E_{\alpha_1}\left[-\frac{E_{el}}{E_1}\left(\frac{t^{\alpha_1}}{\tau_1^{\alpha_1}}\right)\right], \quad (13)$$

式中, E_{α_1} 为 Mittag-Leffler 函数, 可表示为^[43]

$$E_{\alpha_1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha_1 k + 1)}. \quad (14)$$

图 4(a) 为 $\text{Pd}_{20}\text{Pt}_{20}\text{Cu}_{20}\text{Ni}_{20}\text{P}_{20}$ 非晶合金在 $0.89T_g$, 0.4% 恒定应变下的归一化应力松弛曲线. 图中黄色与蓝色虚线分别代表经典 Maxwell 模型和 FM 模型的拟合结果. 可直观看出, 相较于经典 Maxwell 模型, FM 模型具有更好拟合精度, 表明其在描述非晶合金应力松弛行为方面更具一致性. 然而, 在应力松弛初始阶段, FM 模型的拟合结果仍存在一定偏差. 非晶合金作为典

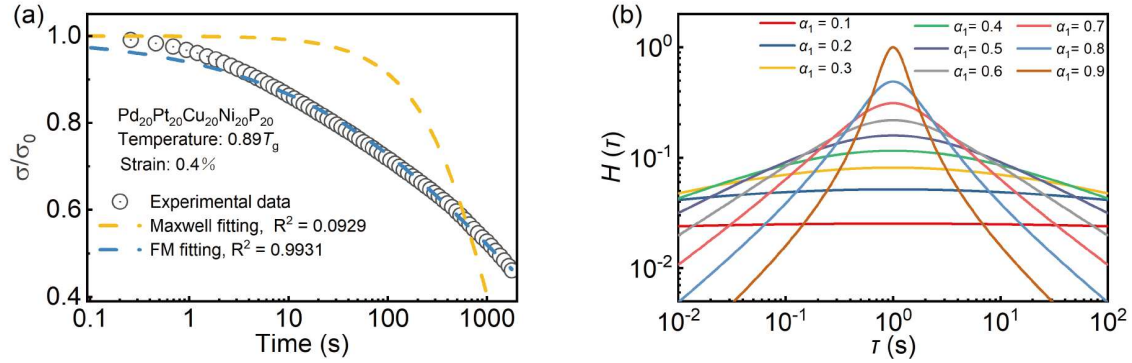


图 4 (网络版彩图) (a) Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀ 非晶合金在 0.89T_g 和 0.4% 恒定应变下的应力松弛曲线. (b) 弛豫时间分布函数 $H(\tau)$ 随分数阶参数 α_1 的变化

Figure 4 (Color online) (a) Stress relaxation curve for the Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀ amorphous alloy at 0.89T_g and 0.4% constant strain. (b) Variation of the relaxation time distribution function $H(\tau)$ with the fractional-order parameter α_1 .

型的非晶态材料体系, 其微观结构非均匀性已被证实, 这种非均匀性在时间与空间尺度上均表现出复杂的分布特性^[1,44]. 经典Maxwell模型弛豫函数遵循Debye型单指数衰减规律, 表明该模型仅具有单一的特征弛豫时间, 难以准确反映实际非晶合金中由结构非均匀性所引起的复杂弛豫行为^[45]. 事实上, 非晶固体松弛模量 $G(t)$ 往往在一定程度上偏离理想的Debye弛豫模式, 表现出一个宽域连续分布的弛豫特征. 因此, 通常引入弛豫时间分布函数 $H(\tau)$ 以描述这种连续弛豫谱. 松弛模量 $G(t)$ 可表示为以下形式^[46]:

$$G(t) = \int_0^{\infty} \frac{H(\tau)}{\tau} e^{-t/\tau} d\tau. \quad (15)$$

根据式(12)和式(15), 通过逆Laplace变换并结合 Mittag-Leffler函数, 可推导出

$$H(\tau) = \frac{E_{el} \sin(\pi\alpha_1)}{E_1 \pi} \cdot \frac{\tau^{\alpha_1} \tau_1^{\alpha_1}}{\left(\frac{E_{el}}{E_1}\right)^2 \tau^{2\alpha_1} + 2 \frac{E_{el}}{E_1} \tau^{\alpha_1} \tau_1^{\alpha_1} \cos(\pi\alpha_1) + \tau_1^{2\alpha_1}}. \quad (16)$$

为研究弛豫时间分布 $H(\tau)$ 随分数阶参数 α_1 的变化规律, 设定 $E_{el}=E_1$, $\tau_1=1$ s. $H(\tau)$ 的分布如图4(b)所示, 其形态近似于正态分布, 且在对称时间尺度上呈对称特征. 随着 α_1 值的增大, $H(\tau)$ 的峰值逐渐升高, 同时分布宽度变窄, 表明弛豫时间分布趋于集中. 当 $\alpha_1=1$ 时, 弛豫时间分布 $H(\tau)$ 收敛于单一特征时间, 系统表现出典型的Debye弛豫行为. 然而, 已有研究表明, 非晶合金在形成过程中保留了其熔体状态下的能量与密度起伏, 形成纳米尺度上“类固体”与“类液体”区域共存的

空间非均匀结构^[1,2,13]. 不同区域的动力学特征时间可跨越多个数量级, 导致非晶合金在时间(弛豫行为)和空间(局部结构)上均表现出非均匀性. 上述时空非均匀性在一定程度上解释了为何FM模型比经典Maxwell模型能够更好地描述实验观测到的应力松弛行为. 但同时也表明, 该模型仍无法完全精确捕捉实际材料中广泛且连续的弛豫时间分布特征. 因此, 有必要对FM模型作进一步修正, 以更准确反映非晶合金变形行为的复杂本质.

4.3 MFM模型

由4.2节可知, FM模型在描述非晶合金应力松弛行为方面具有更好的拟合精度, 能够更好地反映材料在宏观尺度上的非线性响应特征. 然而, FM模型在应力松弛初始阶段的拟合结果仍存在一定偏差, 表明其在完整描述由结构非均匀性所引起的宽域、连续分布的弛豫谱方面存在局限. 因此, 有必要对FM模型进行修正, 以更准确地描述非晶合金的应力松弛行为. 将两个分数阶单元(参数分别为 E_1 , τ_1 , α_1 和 E_2 , τ_2 , α_2) 串联, 可构建MFM模型, 模型结构如图5所示^[47]. 该模型应力-应变关系可表示为^[47]

$$\tau_M^{\alpha_1-\alpha_2} \frac{d^{\alpha_1-\alpha_2} \sigma(t)}{dt^{\alpha_1-\alpha_2}} + \sigma(t) = E_M \tau_M^{\alpha_1} \frac{d^{\alpha_1} \varepsilon(t)}{dt^{\alpha_1}}, \quad (17)$$

式中, E_M 和 τ_M 分别为MFM模型的模量和弛豫时间, 定义分别为^[47]

$$\tau_M = \left[\frac{E_1(\tau_1)^{\alpha_1}}{E_2(\tau_2)^{\alpha_2}} \right]^{\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}}, \quad (18)$$

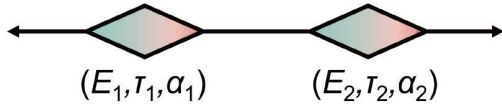


图 5 (网络版彩图)修正分数阶Maxwell 模型
Figure 5 (Color online) Modified fractional Maxwell model.

$$E_M = \left[\frac{(E_1 \tau_1)^{-\alpha_2} (\tau_1)^{\alpha_1(1-\alpha_1)}}{[E_2 (\tau_2)^{\alpha_2}]^{\alpha_1}} \right]^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}}. \quad (19)$$

对于任意的 $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < 1$ 而言, MFM 模型的松弛模量 $G(t)$ 可表示为^[48]

$$G(t) = E_M \left(\frac{t}{\tau_M} \right)^{-\alpha_2} E_{\alpha_1 - \alpha_2, 1 - \alpha_2} \left[- \left(\frac{t}{\tau_M} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \right]. \quad (20)$$

进而, 归一化应力松弛行为可表示为^[48]

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = \left(\frac{t}{\tau_M} \right)^{-\alpha_2} E_{\alpha_1 - \alpha_2, 1 - \alpha_2} \left[- \left(\frac{t}{\tau_M} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \right], \quad (21)$$

式中, $E_{\alpha, \beta}(x)$ 为广义双参数 Mittag-Leffler 函数, 由以下级数定义^[48]:

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (22)$$

同理, MFM 的弛豫时间分布可以表示为^[47]

$$H(\tau) = \frac{E_M}{\pi} \left(\frac{\tau}{\tau_M} \right)^{-\alpha_2} \frac{\sin(\pi \alpha_1) \left(\frac{\tau}{\tau_M} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} + \sin(\pi \alpha_2)}{\left(\frac{\tau}{\tau_M} \right)^{2(\alpha_1 - \alpha_2)} + 2 \left(\frac{\tau}{\tau_M} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} \cos[\pi(\alpha_1 - \alpha_2)] + 1}. \quad (23)$$

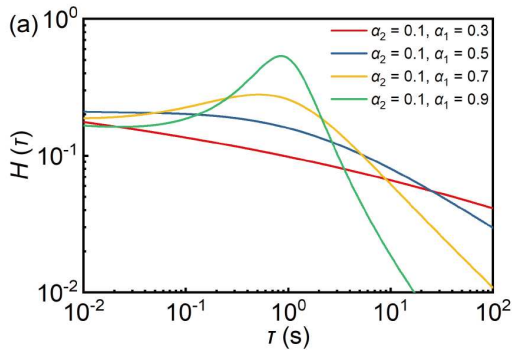


图6为 $H(\tau)$ 随分数阶参数 α_1 和 α_2 的变化情况, 其中 E_M 与 τ_M 均被固定为 1. 在图6(a)中, 固定 $\alpha_2=0.1$, 可以看出 $H(\tau)$ 的峰值随 α_1 的增大而显著升高, 同时分布宽度变窄, 表明弛豫行为趋于更集中的时间尺度. 图6(b)展示了在 $\alpha_1=0.9$ 时, 不同 α_2 值对 $H(\tau)$ 分布的影响. 可以看出, 随着 α_2 增大, 分布逐渐展宽且峰值减弱, 最终趋于无明显峰值的宽域分布, 反映出弛豫时间尺度更加分散的特征.

图7为 $\text{Pd}_{20}\text{Pt}_{20}\text{Cu}_{20}\text{Ni}_{20}\text{P}_{20}$ 非晶合金在 $0.89T_g$ 与 0.4% 恒定应变下归一化应力松弛行为. 图中黄色、蓝色和紫色虚线分别表示经典 Maxwell 模型、FM 模型及 MFM 模型的拟合曲线. 实验数据显示, 应力随时间的延长而逐渐衰减, 且在对数坐标中呈现明显的非线性演化特征. 对比 3 种理论模型的拟合结果可知, 经典 Maxwell 模型与实验数据吻合较差, 表明其无法充分描述非晶合金中广泛存在的多尺度弛豫行为; FM 模型显著提高了拟合精度; 而 MFM 模型则进一步优化了拟合效果, 尤其在应力松弛全过程中均表现出极高的一致性, 说明采用两个分数阶单元能更真实地反映材料的连续弛豫谱和时空非均匀性. 该结果验证了分数阶方法在描述非晶合金复杂黏弹性响应方面的有效性与先进性, 也为建立更准确的本构模型提供了理论依据和数值支持.

4.4 基于 MFM 模型探究应力松弛行为

在前两节中, 我们基于经典 Maxwell 模型与分数阶微积分理论, 推导了 FM 模型; 进一步结合应力松弛实验数据与弛豫时间分布函数 $H(\tau)$, 提出了 MFM 模型.

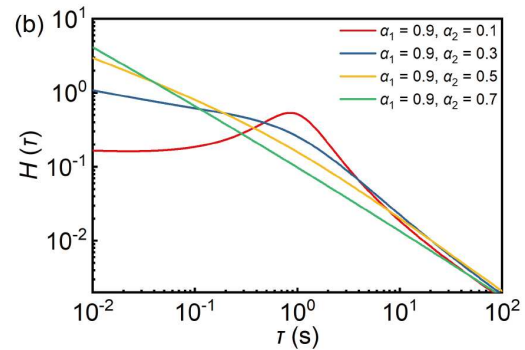


图 6 (网络版彩图)弛豫时间分布函数 $H(\tau)$ 随分数阶参数的变化. (a) 固定 $\alpha_2=0.1$, α_1 分别取 0.3、0.5、0.7 和 0.9; (b) 固定 $\alpha_1=0.9$, α_2 分别取 0.1、0.3、0.5 和 0.7

Figure 6 (Color online) Relaxation time distribution function $H(\tau)$ as a function of the fractional-order parameter. (a) $\alpha_2=0.1$, α_1 takes the values of 0.3, 0.5, 0.7, and 0.9. (b) $\alpha_1=0.9$, α_2 takes the values of 0.1, 0.3, 0.5, and 0.7.

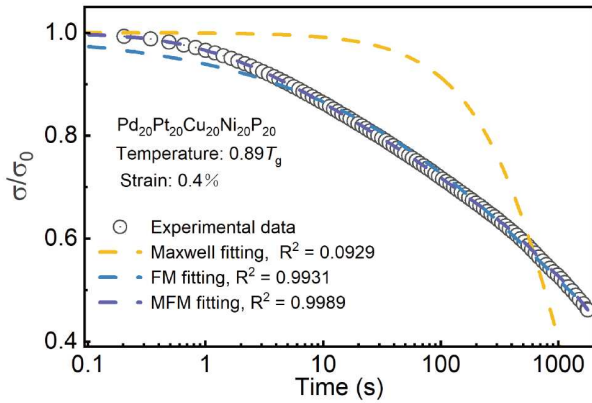


图 7 (网络版彩图) $\text{Pd}_{20}\text{Pt}_{20}\text{Cu}_{20}\text{Ni}_{20}\text{P}_{20}$ 非晶合金在 $0.89T_g$ 与 0.4% 恒定应变时的应力松弛行为

Figure 7 (Color online) Stress relaxation behavior of the $\text{Pd}_{20}\text{Pt}_{20}\text{Cu}_{20}\text{Ni}_{20}\text{P}_{20}$ amorphous alloy at $0.89T_g$ and 0.4% constant strain.

本节将基于 MFM 模型, 系统研究非晶合金在 $0.86T_g$ – $0.93T_g$ 温度范围内的应力松弛行为(该温度区间在图 2 中以灰色球体标注). 选择这一温区的原因在于其接近 β 弛豫温度, 既可确保材料维持非晶态, 又有利于塑性变形的发生. 如图 8(a) 所示, 在恒定应变 0.4% 条件下, 应力随温度的升高而衰减的更为显著. 为量化松弛行为, 定义松弛强度 $n = [(\sigma_0 - \sigma_1)/\sigma_0]$, 其中 σ_0 和 σ_1 分别代表应力松弛曲线的初始应力和终止应力. 在流变单元理论框架下, 非晶合金可视为由弹性基体和嵌入其中的流变单元组成, 而 n 值常被用作流变单元体积分数的表征参数^[49,50]. 由图 8(a) 中插图可见, n 随温度升高而增大, 同时内耗因子 $\tan\delta$ 也呈上升趋势(图中红色散点), 反映出原子移动性的提高. 温度升高促使更多流

变单元被激活, 从而加速应力松弛动力学过程. MFM 模型对实验数据的拟合结果如图 8(a) 中虚线所示, 其在整个实验尺度内显示出较高的吻合度, 相应拟合参数如表 1 所示. 值得注意的是, 参数 α_2 数值较小且温度依赖性较弱, 表明对应分数阶单元行为接近理想弹簧; 然而, 即便 α_2 近似为 0, 也足以导致弛豫时间分布偏离对称形式(区别于图 4(b)), 更符合非晶合金实际的时空非均匀特征. 这一特性是 FM 模型在松弛初期拟合偏差较大的原因所在, 其理想弹簧部分难以充分反映瞬态响应, 而在较长时间尺度下则表现出更好的拟合一致性. 图 8(b) 展示了由 MFM 模型拟合得到的参数 α_1 和 τ_M 随温度的变化情况. 结果表明, 两者均与温度密切相关. 弛豫时间 τ_M 随温度升高而急剧减小, 反映出流变单元激活速率和原子移动性的提高, 导致宏观松弛过程加速. 同时, α_1 值随温度上升而增大, 表明分数阶单元响应逐渐趋近于黏壶行为. 在低温条件下, 材料力学行为主要由弹性基体主导, 流变单元占比有限; 随温度升高, 流变单元比例增加、原子移动性增强, 玻璃体系的黏性耗散能力显著提升.

5 结论

本研究选取 $\text{Pd}_{20}\text{Pt}_{20}\text{Cu}_{20}\text{Ni}_{20}\text{P}_{20}$ 非晶合金作为研究载体, 结合分数阶微积分理论与应力松弛实验, 构建并验证了一种修正分数阶 Maxwell 模型, 并在此基础上分析了应力松弛行为. 主要研究结论如下.

与经典 Maxwell 模型和 FM 模型不同, MFM 模型显著提高了对实验数据的拟合精度, 尤其在应力松弛全

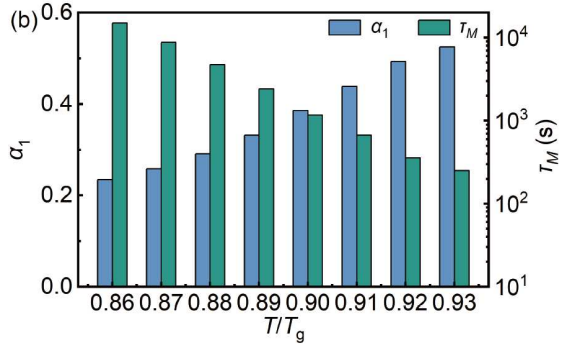
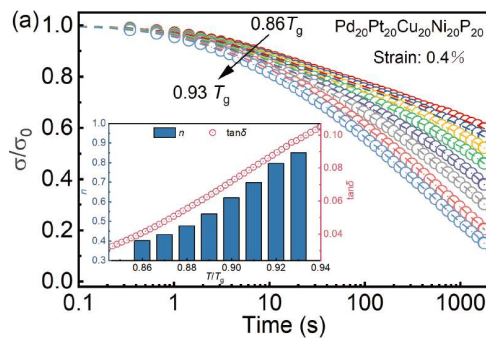


图 8 (网络版彩图) (a) $\text{Pd}_{20}\text{Pt}_{20}\text{Cu}_{20}\text{Ni}_{20}\text{P}_{20}$ 非晶合金在不同温度下的应力松弛曲线; (b) MFM 模型中分数阶参数 α_1 与弛豫时间 τ_M 随温度的演变

Figure 8 (Color online) (a) Stress relaxation curves of the $\text{Pd}_{20}\text{Pt}_{20}\text{Cu}_{20}\text{Ni}_{20}\text{P}_{20}$ amorphous alloy at different temperatures. (b) The evolution of the fractional-order parameter α_1 and the relaxation time τ_M in the MFM with temperature.

表 1 不同温度下Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀非晶合金应力松弛过程的MFM模型拟合参数

Table 1 MFM model fitting parameters of stress relaxation process of Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀ amorphous alloy at different temperatures

Temperature (T/T_g)	α_1	α_2	τ_M (s)	R^2
0.86	0.2351	0.0097	14932.4	0.9976
0.87	0.2586	0.0086	8790.4	0.9985
0.88	0.2912	0.0074	4728.2	0.9990
0.89	0.3322	0.0063	2407.6	0.9989
0.90	0.3860	0.0045	1167.5	0.9992
0.91	0.4388	0.0031	669.5	0.9997
0.92	0.4935	0.0020	358.8	0.9996
0.93	0.5251	0.0017	251.8	0.9997

过程表现出高度的一致性。MFM模型的弛豫时间分布函数 $H(\tau)$ 有效捕捉了非晶合金中弛豫时间的连续分布特性与时空非均匀性, 克服了传统模型参数冗余或物理意义不明晰的局限性。

在 $0.86T_g$ – $0.93T_g$ 温度范围内, 应力松弛强度 n 和内耗因子 $\tan\delta$ 随着温度升高均显著增大。该结果表明升温促使更多流变单元参与变形, 同时原子移动性增强, 从而加速了应力松弛动力学进程。此外, 弛豫时间 τ_M 随温度升高而明显下降, 进一步验证了热激活在促进非晶合金应力松弛行为中的关键作用。

参数 α_1 随温度升高而增大, 表明分数阶单元响应从弹性行为逐渐向黏性行为转变; α_2 值较小且温度依赖性较弱, 其非零特性导致弛豫时间分布呈非对称形态, 能够更真实地反映出非晶合金固有的非均匀性。

本研究通过建立物理意义明确、参数简洁的分数阶本构模型, 为定量描述非晶合金的非线性应力松弛行为提供了可靠的理论工具, 并为理解其微观结构演化与宏观力学响应之间的内在关联提供了新视角。该模型在表征复杂弛豫谱等方面表现出显著优势。

参考文献

- Wang W H. Dynamic relaxations and relaxation-property relationships in metallic glasses. *Prog Mater Sci*, 2019, 106: 100561
- Qiao J C, Zhang L T, Tong Y, et al. Mechancial properties of amorphous alloys: In the framework of the microstructure heterogeneity (in Chinese). *Adv Mech*, 2022, 52: 117–152 [乔吉超, 张浪亭, 童钰, 等. 基于微观结构非均匀性的非晶合金力学行为. *力学进展*, 2022, 52: 117–152]
- Yin H B C, Zhang Y, Gao M, et al. The magnetocaloric effect of amorphous alloys (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2025, 55: 286106 [尹航博策, 张岩, 高萌, 等. 非晶合金的磁热效应. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2025, 55: 286106]
- Wang Y, Gao Y, Lv J, et al. Ultrafast surface diffusion driven by abnormal relaxation mode in the marginal glass-forming Fe-based metallic glasses. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2025, 68: 126111
- Wang Y J, Wei D, Han D, et al. Does structure determine property in amorphous solids (in Chinese)? *Chin J Theor Appl Mech*, 2020, 52: 303–317 [王云江, 魏丹, 韩懂, 等. 非晶态固体的结构可以决定性能吗? *力学学报*, 2020, 52: 303–317]
- Hao Q, Xing G, Pineda E, et al. Deciphering the α relaxation and the anelastic-to-plastic transition in the deep glassy state. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2025, 68: 234611
- Yu H B, Zhou Z Y. The dynamics and essence of disordered systems (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2025, 55: 286124 [于海滨, 周震亚. 无序体系动力学及其本质. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2025, 55: 286124]
- Cui J B, Xing G H, Hao Q, et al. Thermodynamic-kinetic relationship in Pd-based metallic glasses. *Scripta Mater*, 2026, 270: 116934
- Liang S Y, Zhu F, Wang Y J, et al. On the kinetics of structural evolution in metallic glasses. *Int J Eng Sci*, 2024, 205: 104146
- Jia J L, Wu Y, Lv N, et al. Research on high-iron-content FeBCSiP amorphous alloy ultra-thick ribbon and its properties (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2025, 55: 286119 [贾蓓丽, 吴忱, 吕娜, 等. 高铁含量FeBCSiP非晶合金超厚带材及性能研究. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2025, 55: 286119]

- 11 Liang S Y, Zhang L T, Wang B, et al. Decoupling thermal and mechanical effects on metallic glasses creep. *Int J Mech Sci*, 2025, 302: 110573
- 12 Wang W H. The elastic properties, elastic models and elastic perspectives of metallic glasses. *Prog Mater Sci*, 2012, 57: 487–656
- 13 Qiao J C, Wang Q, Pelletier J M, et al. Structural heterogeneities and mechanical behavior of amorphous alloys. *Prog Mater Sci*, 2019, 104: 250–329
- 14 Xing G H, Zhao S J, Lyu G J, et al. Accelerated aging dynamics in metallic glass: Experimental and atom simulation study (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2025, 55: 286117 [邢光辉, 赵思瑾, 吕国建, 等. 应力加速的金属玻璃老化动力学: 实验与原子模拟. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2025, 55: 286117]
- 15 Cui J B, Lyu G J, Hao Q, et al. The high-temperature deformation behavior of Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀ metallic glass. *Mech Mater*, 2024, 196: 105078
- 16 Duan X M, Yu L, Ding G, et al. Shock wave response of amorphous solids by mesoscale simulations (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2025, 55: 286122 [段鑫淼, 喻立, 丁淦, 等. 非晶态固体冲击波响应的介尺度模拟. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2025, 55: 286122]
- 17 Zhang L T, Wang Y J, Nabahat M, et al. Creep deformation in metallic glasses: A global approach with strain as an indicator within transition state theory. *Int J Plast*, 2024, 174: 103923
- 18 Zhang L T, Qiao J C. Relaxation behavior of high-entropy bulk metallic glass: Influences of physical aging and cyclic loading (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2021, 51: 086111 [张浪涛, 乔吉超. 物理时效和循环加载下高熵金属玻璃的弛豫行为. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2021, 51: 086111]
- 19 Bobrov O P, Laptev S N, Khonik V A. Stress relaxation in an Zr_{52.5}Ti₅Cu_{17.9}Ni_{14.6}Al₁₀ bulk metallic glass. *Phys Solid State*, 2004, 46: 470–473
- 20 Luborsky F E, Walter J L. Stress relaxation in amorphous alloys. *Mater Sci Eng*, 1978, 35: 255–261
- 21 Luborsky F E, Liebermann H H. Stress relaxation of iron-boron amorphous alloys. *J Appl Phys*, 1980, 51: 796
- 22 Kawamura Y, Shibata T, Inoue A. Changes in stress relaxation due to yielding in Zr₆₅Al₁₀Ni₁₀Cu₁₅ metallic glass. *Jpn J Appl Phys*, 1998, 37: L666
- 23 Soriano D, Zhou H, Hilke S, et al. Relaxation dynamics of Pd–Ni–P metallic glass: Decoupling of anelastic and viscous processes. *J Phys-Condens Matter*, 2021, 33: 164004
- 24 Luo P, Wen P, Bai H Y, et al. Relaxation decoupling in metallic glasses at low temperatures. *Phys Rev Lett*, 2017, 118: 225901
- 25 Chen C J, Xu R, Zhang J Y, et al. Stress relaxation of Ti₂₀Zr₂₀Hf₂₀Cu₂₀Be₂₀ high-entropy metallic glasses (in Chinese). *Rare Metal Mat Eng*, 2021, 50: 4381–4387 [陈长玖, 许锐, 张金勇, 等. Ti₂₀Zr₂₀Hf₂₀Cu₂₀Be₂₀高熵非晶合金应力弛豫行为研究. 稀有金属材料与工程, 2021, 50: 4381–4387]
- 26 Hao Q, Pineda E, Wang Y J, et al. Reversible anelastic deformation mediated by β relaxation and resulting two-step deformation in a La₆₀Ni₁₅Al₂₅ metallic glass. *Phys Rev B*, 2023, 108: 024101
- 27 Duan Y J, Zhang L T, Qiao J C, et al. Intrinsic correlation between the fraction of liquidlike zones and the β relaxation in high-entropy metallic glasses. *Phys Rev Lett*, 2022, 129: 175501
- 28 Xing G H, Hao Q, Lyu G J, et al. Integrating dynamic relaxation with inelastic deformation in metallic glasses: Theoretical insights and experimental validation. *J Mater Sci Tech*, 2025, 218: 135–152
- 29 Jiao W, Wen P, Peng H L, et al. Evolution of structural and dynamic heterogeneities and activation energy distribution of deformation units in metallic glass. *Appl Phys Lett*, 2013, 102: 101903
- 30 Lu Z, Shang B S, Sun Y T, et al. Revealing β -relaxation mechanism based on energy distribution of flow units in metallic glass. *J Chem Phys*, 2016, 144: 144501
- 31 Hao Q, Qiao J C. Stress relaxation dynamics for amorphous alloys based on the evolution of microstructural heterogeneity (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mech*, 2022, 54: 3058–3067 [郝奇, 乔吉超. 基于微观结构非均匀性演化的非晶合金应力松弛动力学. 力学学报, 2022, 54: 3058–3067]
- 32 Xu Z R, Ma X Y, Pineda E, et al. Probing into the regulation mechanism of dynamic relaxation in La-based amorphous alloys (in Chinese). *Chin J Theor Appl Mech*, 2025, 57: 1929–1943 [徐宗睿, 马熙阳, Pineda E, 等. La基非晶合金的动力学弛豫调控机制研究. 力学学报, 2025, 57: 1929–1943]
- 33 Cui J B, Xing G H, Lyu G J, et al. Unveiling creep mechanisms in metallic glasses via fractional modeling under coupled thermo-mechanical loads. *Int J Plast*, 2025, 195: 104511
- 34 Bonfanti A, Kaplan J L, Charras G, et al. Fractional viscoelastic models for power-law materials. *Soft Matter*, 2020, 16: 6002–6020
- 35 Cai W, Wang P. Fractional modeling of temperature-dependent mechanical behaviors for glassy polymers. *Int J Mech Sci*, 2022, 232: 107607

- 36 Celauro C, Fecarotti C, Pirrotta A, et al. Experimental validation of a fractional model for creep/recovery testing of asphalt mixtures. [Construction Building Mater](#), 2012, 36: 458–466
- 37 Takeuchi A, Chen N, Wada T, et al. Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀ high-entropy alloy as a bulk metallic glass in the centimeter. [Intermetallics](#), 2011, 19: 1546–1554
- 38 Liu X, Li D. A link between a variable-order fractional Zener model and non-Newtonian time-varying viscosity for viscoelastic material: Relaxation time. [Acta Mech](#), 2021, 232: 1–13
- 39 Meng R, Cao L, Zhang Q. Study on the performance of variable-order fractional viscoelastic models to the order function parameters. [Appl Math Model](#), 2023, 121: 430–444
- 40 Xing G H, Hao Q, Zhu F, et al. Correlating dynamic relaxation and viscoelasticity in metallic glasses. [Sci China-Phys Mech Astron](#), 2024, 67: 256111
- 41 Zhou Z Y, Yang Q, Yu H B. Toward atomic-scale understanding of structure-dynamics-properties relations for metallic glasses. [Prog Mater Sci](#), 2024, 145: 101311
- 42 Yu H B, Wang W H, Bai H Y, et al. The β -relaxation in metallic glasses. [Natl Sci Rev](#), 2014, 1: 429–461
- 43 Long J, Xiao R, Chen W. Fractional viscoelastic models with non-singular kernels. [Mech Mater](#), 2018, 127: 55–64
- 44 Cui J B, Xing G H, Lyu G J, et al. Experimental observation and theoretical modeling of multi-stage power-law creep in metallic glass. [Acta Mech](#), 2025, 236:
- 45 Liang S Y, Hao Q, Xing G H, et al. Non-Newtonian rheology in stress relaxation of metallic glasses. [Acta Mater](#), 2025, 293: 121125
- 46 Zhu F, Xing G H, Lyu G J, et al. Physics-motivated fractional viscoelasticity model for dynamic relaxation in amorphous solids. [Int J Plast](#), 2023, 164: 103588
- 47 Stankiewicz A. On applicability of the relaxation spectrum of fractional Maxwell model to description of unimodal relaxation spectra of polymers. [Polymers](#), 2023, 15: 3552
- 48 Mainardi F, Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. [Eur Phys J Spec Top](#), 2011, 193: 133–160
- 49 Wang Z, Sun B A, Bai H Y, et al. Evolution of hidden localized flow during glass-to-liquid transition in metallic glass. [Nat Commun](#), 2014, 5: 5823
- 50 Lu Z, Jiao W, Wang W H, et al. Flow unit perspective on room temperature homogeneous plastic deformation in metallic glasses. [Phys Rev Lett](#), 2014, 113: 045501

Investigation of stress relaxation behavior of amorphous alloy based on a fractional-order model

CUI JingBo¹, XING GuangHui¹, LYU GuoJian^{1,2*}, KATO Hidemi³ & QIAO JiChao^{1*}

¹ School of Mechanics and Transportation Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

² Chongqing Innovation Center, Northwestern Polytechnical University, Chongqing 401135, China

³ Institute for Materials Research, Tohoku University, Sendai 980-8577, Japan

*Corresponding authors (QIAO JiChao, email: qjczy@nwpu.edu.cn; LYU GuoJian, email: guojian.lyu@nwpu.edu.cn)

Amorphous alloys exhibit unique mechanical and physical properties due to their long-range atomic disorder microstructure. Amorphous alloys are widely studied in solid mechanics and condensed matter physics. Stress relaxation is a typical mechanical behavior that can reflect the structural evolution and energy dissipation processes within amorphous materials. Therefore, it is crucial for understanding their deformation mechanisms. Although the classic Maxwell model is widely used to describe viscoelastic response, it fails to accurately capture the nonlinear relaxation behavior of amorphous alloys, which strongly depends on time and temperature. The generalized Maxwell model improves fitting performance by increasing the number of elements. However, this approach presents challenges such as excessive parameters and unclear physical meaning. The introduction of fractional calculus provides a new method for constructing constitutive models with clear physical representations and concise parameters. In this study, stress relaxation of the Pd₂₀Pt₂₀Cu₂₀Ni₂₀P₂₀ amorphous alloy was conducted by the dynamic mechanical analyzer. Based on fractional calculus, the classic Maxwell model was modified to establish a constitutive model that can accurately describe the stress relaxation behavior of amorphous alloys. Experimental results demonstrate that this model accurately captures the stress relaxation process with only a few parameters, which can significantly improve fitting accuracy. Further analysis of the model's response characteristics under different temperature conditions revealed the influence of temperature on stress relaxation dynamics. This research provides a new perspective and methodological support for understanding the structural evolution behavior of amorphous alloys under thermal-mechanical coupling.

amorphous alloy, stress relaxation, constitutive model, fractional calculus, deformation mechanism

PACS: 61.43.Dg, 62.40.+i, 62.20.Hg

doi: [10.1360/SSPMA-2025-0407](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2025-0407)