中国科学: 物理学 力学 天文学 2026 年 第 56 卷 第 12 期: 124608
SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica physcn.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论 文 固体力学中材料变形和失效: 新现象、新理论

基于体积/偏应变能分解的准脆性局域化梯度损伤模型

董颖璇[1,2], 李群[1*]

1. 西安交通大学, 航天航空学院, 复杂服役环境重大装备结构强度与寿命全国重点实验室, 西安 710049
2. 新加坡国立大学土木与环境工程学院, 新加坡 119260
*联系人, E-mail: qunli@xjtu.edu.cn

收稿日期: 2025-12-25; 接受日期: 2026-03-24; 网络出版日期: 2026-10-16
国家自然科学基金(编号: 12502095)和陕西省自然科学基金(编号: 2025JC-YBQN-071)资助项目

摘要 局域化梯度损伤模型兼具计算效率高、裂纹形态模拟真实的优点. 但其损伤演化依赖于总应变能驱动, 在压应力状态主导下易产生虚假损伤结果. 针对这一问题, 本文构建了一种基于体积/偏应变能分解的局域化梯度损伤模型, 引入了拉压不对称损伤机制, 高效模拟了准脆性材料复合型裂纹扩展, 解决了局域化梯度损伤理论在拉压不对称损伤问题上的限制. 通过将总应变能W分解为拉伸相关体积应变能W_V^+、压缩相关体积应变能W_V^-和偏应变能W_d, 本文修正了自由能密度中的损伤相关项, 使其只由W_V^+和W_d驱动, 而与W_V^-无关. 数值结果表明, 本文提出的模型能自然模拟准脆性材料中的复合型裂纹扩展, 有效抑制压缩状态下的伪损伤, 准确反映拉压不对称性. 模型在数值实现中表现出良好的网格无关性. 通过与双边缺口试样和L形梁试样的实验结果对比, 验证了该损伤模型模拟复合型裂纹扩展的准确性.

关键词 梯度损伤理论, 能量分解, 复合型断裂

PACS: 46.50.+a, 62.20.Mk, 46.15.-x, 46.05.+b

1 引言

裂纹萌生、扩展及其相互作用是反映结构完整性、决定工程结构失效模式与服役寿命的关键因素. 先进制造材料和重大装备结构常服役于极端多场耦合环境, 其破坏过程呈现高度非线性与多尺度特征, 裂尖在复杂应力状态下易发生复合型裂纹扩展. 因此, 发展能够高保真模拟任意复杂裂纹路径的计算力学方法[1,2], 已成为实现结构完整性精准评估与失效预测的核心挑战, 对保障重大工程安全、优化抗损伤设计以及推动新材料应用具有重要意义.

基于经典连续损伤力学框架发展而来的裂纹模拟方法, 为求解复合型断裂问题提供了有力手段[3]. 该类方法通过在损伤模型中引入一个或一组内变量(即损伤变量), 定量描述材料微观缺陷导致的宏观刚度与强度退化, 从而在连续介质框架内隐式表征裂纹的萌生

引用格式: 董颖璇, 李群. 基于体积/偏应变能分解的准脆性局域化梯度损伤模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2026, 56: 124608
Dong Y X, Li Q. Quasi-brittle localizing gradient damage model based on volumetric/deviatoric strain energy decomposition (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2026, 56: 124608, doi: 10.1360/SSPMA-2025-0655

© 2026《中国科学》杂志社

与扩展过程. 然而, 在连续介质损伤理论中, 材料软化行为会引起应变局部化(损伤集中在一条无限窄的带状区域里, 导致计算结果依赖网格大小), 使模型的数学描述不适定, 且数值解在空间离散化后无法收敛于具有物理意义的解[4]. 为解决这一问题, 研究者提出了梯度损伤模型[3,4]. 通过引入高阶导数(如应变或损伤变量的空间梯度)增强了数学适定性, 避免了数值模拟的网格依赖. 传统梯度损伤模型属于非局部增强方法[5], "非局部"是指材料本构响应不仅取决于当前点的应变, 还依赖于该点邻域内的应变场分布, 从而在物理层面引入特征长度以表征微裂纹间的相互作用尺度. 通过对损伤过程区内的驱动场进行空间平均, 以积分形式反映微观过程的影响[6,7]. 非局部梯度增强方法广泛应用于对连续损伤模型中的应变软化行为进行正则化处理, 其通过在控制方程中引入内禀长度尺度参数, 影响位移或损伤场解的空间分布特征, 从而间接表征断裂过程区的尺寸效应及微裂纹间的相互作用[5–8]. 然而, 非局部梯度增强方法在标准有限元框架中难以数值实现. 积分型非局部模型需对每个积分点的邻域进行加权平均计算, 显著增加计算成本, 且边界附近积分域被截断, 导致非局部加权平均不准. 同时, 非局部变量在边界处的自然边界条件需引入额外假设或迭代修正, 显著增加了数值实现复杂性. 为此, 研究人员通过整体增强修正, 发展了另一类非局部增强的梯度损伤模型[8,9]. 其中, 采用高阶平衡方程控制非局部场演化的方法相较于积分法更易于在标准有限元框架中实现. 因为梯度方法仅需在控制方程中引入高阶项, 即可利用标准连续单元进行离散, 而无需像积分法那样处理复杂的邻域搜索和加权积分运算. 因此, 高阶平衡方程被广泛用于正则化损伤引起的软化响应. 值得注意的是, 虽然传统非局部增强方法能够很好地正则化结构响应, 但积分法和梯度法都会引起数值伪像(即与真实损伤起始和扩展行为不符的模拟结果)[10,11], 产生伪边界效应, 从而无法准确复现准脆性断裂的尺寸效应现象[12].

局域化梯度损伤模型(Localizing Gradient Damage Model, LGDM)的提出有效解决了上述问题[13,14]. 其中"局域化"是指损伤演化为狭窄裂纹带的最终形态特征. LGDM在描述宏观变形相关的标准运动学场外, 引入了一个微观形态变量, 以此表征嵌入在每个宏观点的微观连续体中的快速波动响应, 从而在标准连续体框架内自然地刻画微观-宏观相互作用及其对宏观力学行为的影响. 作为非局部损伤理论的一类, LGDM采用修正后的高阶平衡方程描述材料变形微过程区中能量贡献随损伤演化而逐渐减小的特征. 局域化梯度增强策略已成功应用于多种损伤断裂问题的求解, 如准脆性材料的准静态断裂[15–17]、准脆性断裂中的尺寸效应[18,19]、热力耦合断裂[20]、连续-不连续建模[21]、动态断裂[22]和韧性断裂[23–25]等. 然而, 现有局域化梯度损伤模型中的裂纹扩展驱动力为总应变能, 导致其在拉伸和压缩状态下均发生损伤演化和裂纹扩展. 但材料损伤行为具有拉压不对称性, 其抗压强度通常远高于抗拉强度. 一般情况下, 裂纹损伤只在拉应力下产生, 压应力不直接导致损伤.

本文构建了一种基于体积/偏应变能分解的准脆性材料局域化梯度损伤模型, 并在有限元框架下进行了数值实现. 该模型将总应变能分解为体积应变能和偏应变能, 采用拉伸相关体积应变能和偏应变能共同驱动损伤演化, 修正了局域化梯度损伤理论在拉压不对称损伤模拟上的限制, 有效抑制了压缩状态下的虚假损伤. 本工作为准脆性材料复合型断裂问题提供了一种新的有效分析方法.

2　理论模型

2.1　局域化梯度损伤理论

局域化梯度损伤模型是在连续损伤力学框架下发展起来的一类梯度损伤模型[4,13]. 该模型通过引入与应变相关的高阶梯度项, 对损伤导致的应变软化现象进行正则化处理, 使损伤区有一个固定宽度(由长度尺度参数控制), 从而让计算结果与网格无关. LGDM采用了等效应变驱动损伤演化, 实现裂纹扩展模拟.

如图1所示, LGDM在与宏观变形相关的标准运动学场外引入了一个微观形态变量$\tilde{e}$, 以此表征嵌入在每个宏观点的微观连续体中的快速波动响应, 从而在标准连续体框架中刻画传统模型所忽略的微观-宏观相互作用及其对宏观力学行为的整体影响. 在图1中, (a)点对应于破坏初始阶段, 材料内部已形成微裂纹扩散网络, 损伤开始萌生. 当应变软化进行到(b)点时, 微裂纹的扩展被限制在一个狭窄的带状区域内, 超出该窄带区域时, 材料发生弹性卸载导致微裂纹闭合. 在破坏的最后阶段((c)点), 窄带内形成局部宏观裂纹.

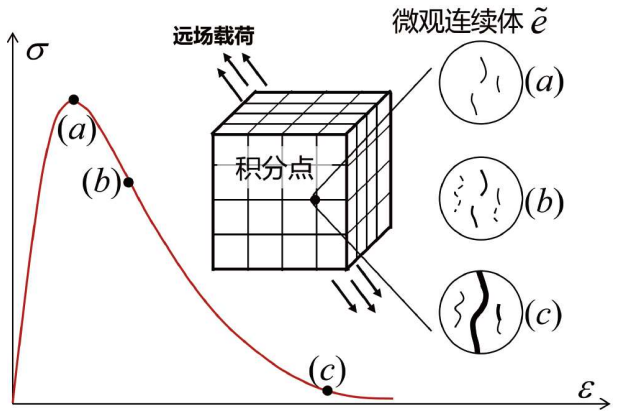


图 1　(网络版彩图)具有微观形态变量$\tilde{e}$的局域化梯度损伤示意图

Figure 1　(Color online) Schematic diagram of localizing gradient damage with a micro morphology variable $\tilde{e}$.

局域化梯度损伤模型中，在每个宏观点处引入一个等效应变$\varepsilon_{\mathrm{eq}}$的非局部形式$\tilde{e}$作为表征嵌入微观连续体微观变形的形态变量[13]. $\tilde{e}$定义为对晶胞内离散晶间裂纹进行连续化描述的场变量[25]. 通过引入形态变量$\tilde{e}$及其空间梯度$\nabla\tilde{e}$，LGDM在标准应力功的基础上，进一步考虑了微观过程之间相互作用所产生的能量及其对宏观尺度的影响. 对于给定的应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, 任意体积$V$的材料区域$\Omega$内消耗的内部功可表示为[13]

$$P_{\mathrm{int}}=\int_{\Omega}(\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\tilde{\sigma}\dot{\tilde{e}}+\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\dot{\tilde{e}})\,\mathrm{d}V, \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}$, $\tilde{\sigma}$和$\boldsymbol{\xi}$是对应运动场的应力共轭. $\tilde{\sigma}$是与微观形态变量$\tilde{e}$功共轭的耦合应力, 反映宏观变形与微观波动之间的相互作用. $\boldsymbol{\xi}$是与微观形态变量梯度$\nabla\tilde{e}$功共轭的偶应力, 源于损伤过程区内微裂纹间的相互作用.

高阶虚功项$(\tilde{\sigma}\dot{\tilde{e}}+\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\dot{\tilde{e}})$的理论独立意义在于: (1) 它刻画了微观-宏观尺度间的能量交换机制，使模型能够描述宏观变形场无法直接捕获的微观结构演化信息; (2) 微观形态变量的梯度项在能量泛函中引入了对变形局部化的正则化约束，保证了损伤软化问题在数学上有稳定且唯一的解.

忽略体力, 区域Ω边界表面A上所受外力功表示为

$$P_{\mathrm{ext}}=\int_{\partial\Omega}(\mathbf{t}:\dot{\mathbf{u}}+\zeta\dot{\tilde{e}})\,\mathrm{d}A, \tag{2}$$

式中, $\mathbf{u}$, $\mathbf{t}$和ζ分别是位移张量、牵引力和高阶牵引力.

采用散度定理, 在任意区域存在$P_{\mathrm{int}}=P_{\mathrm{ext}}$, 推得标准平衡条件:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}, \tag{3}$$

以及控制微观-宏观相互作用的微观力平衡:

$$\tilde{\sigma}=\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}. \tag{4}$$

在外法向$\mathbf{n}$的边界处, 牵引力满足:

$$\mathbf{t}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n},\quad \zeta=\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{n}. \tag{5}$$

考虑等温线弹性固体, 采用标量损伤变量(D)描述材料的损伤退化过程. 宏观变形状态由等效应变$\varepsilon_{\mathrm{eq}}$表征(其具体定义将在后文给出). 如前所述, 每个宏观点处快速波动的微观过程由形态变量$\tilde{e}$表征. 通过$\varepsilon_{\mathrm{eq}}$和$\tilde{e}$的相互作用, 可描述微观变形对宏观损伤演化的影响. 基于此, 自由能密度表征为[13]

$$\begin{aligned}\psi=&\underbrace{\frac{1}{2}(1-D)\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{I}}\\&+\underbrace{\frac{1}{2}h(\varepsilon_{\mathrm{eq}}-\tilde{e})^2}_{\mathrm{II}}+\underbrace{\frac{1}{2}ghl^2\nabla\tilde{e}\cdot\nabla\tilde{e}}_{\mathrm{III}},\end{aligned} \tag{6}$$

式中, $\mathbf{C}$和$\boldsymbol{\varepsilon}$分别代表弹性损伤力学中的标准四阶弹性张量和应变张量. 第I项是标准损伤耗能项, 第II项和第III项反映了快速波动的微观过程对宏观变形损伤的额外贡献. 其中, 第II项描述了微观-宏观相互作用, 是损伤演化的驱动项. 第III项为应变高阶梯度项(实现梯度正则化)，通过$\nabla\tilde{e}$考虑了微裂纹之间的线性化相互作用，由此在能量函数中引入了对局部应变变化的抑制作用，防止损伤局部化在一个无限窄带内，避免计算结果对网格的依赖性. h是微观-宏观耦合模量. l是长度尺度参数，表征微观连续体的特征尺寸. $l\propto G_cE/\sigma_c^2$, 其中G_c, E和σ_c分别为断裂能、弹性模量和抗拉强度. 通过一维单轴拉伸数值模拟，利用力-位移曲线同时标定G_c, E和σ_c, 并通过能量等效关系反算出特征长度l.

基于标准微形态框架[26]，引入相互作用函数g来描述活动微裂纹之间非局部相互作用的衰减, 即

$$g=g(D)=\begin{cases}1, & D=0,\\ R, & D\to 1.\end{cases} \tag{7}$$

相互作用函数确保了LGDM非局部相互作用域随损伤演化而逐渐局域化的核心功能. 在上述模型中, 宏观裂纹在连续介质框架下表征为一个非常窄的局部变形带, 故式(7)中取$R\approx 0$, 用以描述窄带内微观过程之

间的残余相互作用.

在热力学框架下, 自由能密度函数ψ同时依赖于宏观应变$\boldsymbol{\varepsilon}$、微观形态变量$\tilde{e}$及其梯度$\nabla\tilde{e}$. 根据Coleman-Noll方法, 上述广义力由自由能对相应运动学量的偏导求出:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}=\dfrac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}=(1-D)\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}+h(\varepsilon_{\mathrm{eq}}-\tilde{e})\dfrac{\partial\varepsilon_{\mathrm{eq}}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}},\\ \tilde{\sigma}=\dfrac{\partial\psi}{\partial\tilde{e}}=h(\varepsilon_{\mathrm{eq}}-\tilde{e}),\\ \boldsymbol{\xi}=\dfrac{\partial\psi}{\partial\nabla\tilde{e}}=ghl^2\nabla\tilde{e}.\end{cases}\tag{8}$$

这一满足热力学一致性的本构关系确保了模型满足能量耗散不等式, 且损伤演化过程具有明确的热力学驱动力. 其中, 应力张量$\boldsymbol{\sigma}$包含经典应力项和一个耦合应力张量两部分. 类似地, 等效耦合应力$\tilde{\sigma}$由宏观与微观两个尺度之间的相互作用得到, 偶应力$\boldsymbol{\xi}$由损伤过程区中微裂纹之间的相互作用产生.

因此, 耗散不等式表征如下:

$$\begin{aligned}\Phi&=P_{\mathrm{int}}-\dot{\psi}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{\partial g}{\partial D}hl^2\nabla\tilde{e}\cdot\nabla\tilde{e}\right)\dot{D}\\&=Y\dot{D}\geqslant 0,\end{aligned}\tag{9}$$

式中, $\partial g/\partial D<0$. 由于损伤能量释放率$Y\geqslant 0$, 且损伤只能单向增加(即$\dot{D}\geqslant 0$), 故耗散不等式总是满足的.

通过修正von Mises等效应变来表征宏观变形:

$$\varepsilon_{\mathrm{eq}}=\frac{k-1}{2k(1-2\nu)}I_1+\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2}I_1^{\,2}+\frac{2k}{(1+\nu)^2}J_2},\tag{10}$$

式中, ν是泊松比, k是压缩拉伸强度比, I_1和J_2分别代表第一和第二应变不变量, 通过下式计算:

$$I_1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}),\tag{11}$$

$$J_2=3\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon})-\mathrm{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon}),\tag{12}$$

式中, tr(·)为张量迹运算符.

为保证数值稳定性, 经典局域化梯度损伤模型采用广泛使用的指数损伤演化规律[13]:

$$D=1-\frac{\kappa}{\kappa_0}\left\{1-\alpha+\alpha\exp[-\beta(\kappa-\kappa_0)]\right\},\tag{13}$$

式中, α和β是损伤软化参数. κ_0是损伤起始阈值. κ是损伤历史参数, 表征为

$$\kappa(t)=\max\{\tilde{e}(\tau)|0\leqslant\tau\leqslant t\}.\tag{14}$$

此外, 假设相互作用函数g随损伤呈指数下降:

$$g=\frac{(1-R)\exp(-\eta D)+R-\exp(-\eta)}{1-\exp(-\eta)},\tag{15}$$

式中, η和R是材料参数. 在损伤初期($D\to 0$), 材料内部微裂纹尚未充分发展, 微裂纹间的非局部相互作用较强($g\approx 1$), 此时需要较大的非局部域以正则化应变软化问题; 随着损伤加剧($D\to 1$), 微裂纹逐渐贯通形成宏观裂纹, 裂纹两侧材料发生弹性卸载, 微裂纹间的相互作用应显著减弱($g\to D\approx 0$), 从而使损伤局域化为尖锐的裂纹带. 关于参数η和R的讨论详见Sarkar等人[21]与Poh和Sun[13]的工作. $R=0.005$和$\eta=5$是保持计算性能的常用值.

随损伤演化的非局部相互作用衰减规律可表示为一个微力平衡形式[13]:

$$\tilde{e}-\varepsilon_{\mathrm{eq}}=\nabla\cdot(gl^2\nabla\tilde{e}).\tag{16}$$

与现有非局部增强损伤模型相比, 传统非局部模型(包括积分型非局部模型和隐式梯度模型)均采用恒定不变的非局部相互作用域, 其长度尺度参数l在损伤全过程中保持固定. 在损伤后期, 非局部效应仍会“弥散”裂纹带, 使其宽度大于物理真实裂纹, 无法准确模拟宏观裂纹形貌. 而LGDM通过引入随损伤衰减的相互作用函数g, 实现了长度尺度的有效退化——在高度损伤区域, 高阶梯度项的影响被削弱, 损伤得以局域化为尖锐裂纹, 从而更准确地模拟准脆性材料的宏观断裂行为.

式(16)形式上类似于传统梯度损伤模型中的Helmholtz表达式: $\tilde{e}-\varepsilon_{\mathrm{eq}}=l^2\nabla^2\tilde{e}$. 式(16)通过在高度损伤区域中削弱相互作用域$g$实现了损伤局域化. 这种损伤区域扩展方法类似于断裂相场法[27,28]中对正则化损伤变量$\bar{d}$的表征方式: $\bar{d}-f(\bar{d},G_c)=l^2\nabla^2\bar{d}$. 由$\bar{d}$和断裂能$G_c$定义的相场驱动力$f(\bar{d},G_c)$在高度损伤区域($\bar{d}\to 1$)中趋近于0, 导致相应的损伤率随之消失, 从而防止损伤过程区过度扩展. 类似于断裂相场法, LGDM能够模拟出自然的裂纹损伤形貌. 不同的是, 其控制方程在数值求解上避免了非凸优化问题, 可采用牛顿迭代法求解, 因而收敛速度更快、计算效率较高.

与经典隐式梯度模型[8]相比, LGDM的高阶虚功项具有更丰富的物理内涵. 传统隐式梯度模型通常采用Helmholtz型方程对等效应变进行空间滤波, 其非局部效应是恒定不变的, 即非局部相互作用域在损伤全过程中保持固定长度尺度. 而LGDM的高阶虚功项通过

引入随损伤演化的相互作用函数, 实现了非局部相互作用域的动态调整, 即在损伤初期保持较大的非局部域以确保正则化效果, 在高度损伤区域则削弱非局部作用以允许损伤局域化为尖锐裂纹带. 这一机制使得LGDM在理论上突破了传统隐式梯度模型“恒定非局部长度”的局限, 实现了从弥散损伤到离散裂纹的自然过渡.

LGDM引入的微观形态变量$\tilde{e}$具有明确的物理意义. 在运动学上, $\tilde{e}$是局部等效应变的非局部修正, 用以表征微观连续体中的快速波动响应; 在细观力学层面, $\tilde{e}$可视为对晶胞内离散微裂纹进行连续化描述的场变量. 在损伤演化中, $\tilde{e}$通过耦合项将尺度间的变形不协调转化为损伤驱动力, 高阶梯度项$\nabla\tilde{e}$对损伤局部化起到正则化约束, 微力平衡方程控制$\tilde{e}$的空间分布, 进而影响损伤演化过程.

上述考虑微观形态变量的局域化梯度损伤模型由Poh等人[4,13]在连续损伤力学和梯度损伤模型的基础上构建并发展, 其在裂纹损伤形貌和迭代计算效率上具有显著优势. 但如式(6)所示, 该模型自由能中的标准损伤项由总应变能驱动, 因而无法区分拉伸和压缩状态下的不同损伤断裂机制. 但实际材料的损伤行为具有明显的拉压不对称性, 通常情况下裂纹损伤只在拉应力下萌生与扩展, 压应力不直接导致损伤. 针对这一限制, 本文提出了一种基于体积/偏应变能分解的局域化梯度损伤模型, 引入拉压不对称损伤机制, 以解决压应力下的伪裂纹虚假损伤模拟问题.

2.2　体积/偏应变能分解的局域化梯度损伤模型

应变能W包含体积应变能W_V和偏应变能W_d两部分. 体积应变能可分解为拉伸相关体积应变能W_V^+和压缩相关体积应变能W_V^-. 由于裂纹损伤只在拉应力下产生, 压应力不造成损伤. 故W_V^+和W_d与损伤相关, W_V^-与损伤无关. 总应变能W可分解为

$$W=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}=W_V^++W_V^-+W_d. \tag{17}$$

体积应变能W_V是由材料体积膨胀或收缩产生的, 拉伸相关体积应变能W_V^+和压缩相关体积应变能W_V^-分别表示为

$$W_V^+=\frac{H^+}{2}KI_1^2=\frac{H^+}{2}K(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2, \tag{18}$$

$$W_V^-=\frac{H^-}{2}KI_1^2=\frac{H^-}{2}K(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2, \tag{19}$$

式中, K是体积模量, 根据杨氏模量E和泊松比ν计算, $K=E/[3(1-2\nu)]$. 采用开关函数$H^{\pm}$根据第一应变不变量$I_1=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$判断拉压状态, 即

$$H^+=\begin{cases}1, & \text{if } \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})>0,\\ 0, & \text{if } \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\leqslant 0,\end{cases} \tag{20}$$

$$H^-=1-H^+=\begin{cases}0, & \text{if } \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})>0,\\ 1, & \text{if } \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\leqslant 0.\end{cases} \tag{21}$$

拉伸状态下, H^+等于1, H^-等于0. 压缩状态下, H^+等于0, H^-等于1.

偏应变能W_d与剪切变形或形状改变相关, 通常在剪切断裂和韧性断裂中起主导作用. 无论拉伸还是压缩, W_d始终与损伤相关. W_d表示为

$$W_d=2GJ_2=G(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}), \tag{22}$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}$是偏应变张量. G是剪切模量, $G=E/[2(1+\nu)]$.

将式(17)代入式(6), 自由能密度可通过体积/偏应变能非对称分解表征为

$$\begin{aligned}\psi=&[(1-\xi)(1-D)^2+\xi]\left(W_V^++W_d\right)+W_V^-\\&+\frac{1}{2}h\left(\varepsilon_{\mathrm{eq}}-\tilde{e}\right)^2+\frac{1}{2}ghl^2\nabla\tilde{e}\cdot\nabla\tilde{e}.\end{aligned} \tag{23}$$

在式(23)所示的自由能密度中, 将式(6)中的损伤退化函数$(1-D)$修正为$[(1-\xi)(1-D)^2+\xi]$. 这种修正由Miehe等人[29], Borden等人[30]和Tang等人[31]的相场断裂模型工作启发, 能够有效缩窄裂纹损伤区域宽度. 退化函数始终为正, 并且根据式(18), (19)和(22)可知, $\partial^2W_V^+/\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2$, $\partial^2W_V^-/\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2$和$\partial^2W_d/\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2$均为正定四阶张量.

因此, 修正后的损伤退化函数形式可使刚度矩阵保持正定, 保证损伤演化的光滑性, 控制完全损伤状态下的残余刚度(或残余能量)比例, 从而提升数值计算的稳定性. 其中, ξ是一个极小量, 用于避免数值奇异, 本工作中取10^{-6}.

根据Coleman-Noll方法, 满足热力学一致性的本构关系推导如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}=\dfrac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}=[(1-\xi)(1-D)^2+\xi]\left(\dfrac{\partial W_V^+}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}+\dfrac{\partial W_d}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\\ \qquad\qquad+\dfrac{\partial W_V^-}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}+h(\varepsilon_{\mathrm{eq}}-\tilde{e})\dfrac{\partial\varepsilon_{\mathrm{eq}}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}},\\ \tilde{\sigma}=\dfrac{\partial\psi}{\partial\tilde{e}}=h(\varepsilon_{\mathrm{eq}}-\tilde{e}),\\ \boldsymbol{\xi}=\dfrac{\partial\psi}{\partial\nabla\tilde{e}}=ghl^2\nabla\tilde{e}.\end{cases} \tag{24}$$

当耦合模量h远小于杨氏模量时，式(24)中应力张量表达式中的高阶项可忽略不计. 将式(18)–(22)代入式(24)，考虑体积/偏应变能非对称分解的应力张量形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = &[(1-\xi)(1-D)^2+\xi](2G\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}) + [H^+(1-D)^2 \\ &+(1-H^+)]K\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I},\end{aligned} \tag{25}$$

式中, $\mathbf{I}$是单位矩阵.

忽略体力的控制方程保持不变, 可总结为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}, & \text{宏观平衡},\\ \tilde{\sigma}-\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0, & \text{微观平衡}.\end{cases} \tag{26}$$

基于体积/偏应变能非对称分解，式(10)中的等效应变修正为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathrm{eq}} = &\frac{k-1}{2k(1-2\nu)}H^+I_1 \\ &+\frac{1}{2k}\sqrt{H^+\left(\frac{k-1}{1-2\nu}I_1\right)^2+\frac{2k}{(1+\nu)^2}J_2}\,.\end{aligned} \tag{27}$$

体积/偏应变能非对称分解策略在拉压强度比k的基础上进一步区分了损伤驱动力来源，引入了损伤演化机制的调控作用，二者协同可以更精细化地表征复杂应力状态下的损伤演化特征.

值得指出的是，Wang等人[32]近期基于Miehe谱分解思想，将经典LGDM中的弹性应变能分解为拉伸和压缩两部分，未在等效应变中引入拉压强度比k. 相比之下，本文则将体积应变能细分为拉伸相关和压缩相关两部分，并保留了偏应变能(剪切变形)的独立贡献. 这种三分量分解策略旨在更精细化地刻画不同变形机制(拉胀、压缩、剪切)对损伤演化的贡献，在处理多种失效机制混合下的复合型断裂问题时具有独特的理论优势.

此外，损伤D、损伤历史参数κ、相互作用函数g, 以及微力平衡方程保持不变，由式(13)–(16)计算得到. 至此，基于体积/偏应变能分解的局域化梯度损伤模型修正完毕.

考虑等温过程, 能量耗散$\boldsymbol{\Phi}$满足:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi} &= P_{\mathrm{int}}-\dot{\psi} = -\frac{\partial\psi}{\partial D}\dot{D} \\ &=\left[2(1-\xi)(1-D)(W_V^+ + W_d) - \frac{\partial g}{\partial D}hl^2\nabla\tilde{e}\cdot\nabla\tilde{e}\right]\dot{D} \\ &\geqslant 0.\end{aligned} \tag{28}$$

由式(7)可知，$\partial g/\partial D<0$. 根据式(13)的定义，$\mathrm{d}D/\mathrm{d}\kappa>0$恒成立，损伤$D$是$\kappa$的严格单调递增函数，$\dot{D}\geqslant 0$. $1-\xi$和$1-D$均大于0，式(18)和(22)中的拉伸相关体积应变能W_V^+和偏应变能W_d非负. 因此，耗散不等式总是满足的, 损伤演化具有不可逆性.

3　数值实现及验证

3.1　基于UMAT-UMATHT的数值实现方法

LGDM在Abaqus中的数值实现通常采用用户自定义单元子程序(UEL)来定义额外的自由度，并计算单元对整体切线刚度矩阵和剩余力矢量的贡献. 但当形状函数和单元类型发生变化时，UEL的数值实现较为复杂，计算结果的后处理可视化必须间接完成，导致基于UEL的LGDM数值实现难度大且求解效率较低. 鉴于UMATHT中稳态热方程与式(16)所示的局域梯度平衡方程在数学形式上具有相似性，本文将非局部场形态变量$\tilde{e}$映射为标量温度场，用应变高阶梯度($\nabla\tilde{e}$)求解替代标准热流梯度求解模块，从而在UMATHT中实现高阶梯度项计算. 通过UMAT-UMATHT耦合求解框架，本文可简洁地数值实现体积/偏应变能分解的局域化梯度损伤模型.

如图2所示, 使用UMAT和UMATHT子程序分别计算每个单元高斯点的宏观本构关系和等效损伤应变高阶梯度以及切线贡献. 在单元层面上, 汇集来自每个高斯点的贡献，将UMAT计算的相互作用及损伤刚度储存在状态变量中传递给UMATHT，进而开展全局损伤交互迭代求解.

在UMAT中, 应力本构关系表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{STRESS}\overset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{\sigma} = &[(1-\xi)(1-D)^2+\xi](2G\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}) \\ &+[H^+(1-D)^2+(1-H^+)]K\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I},\end{aligned} \tag{29}$$

式中, 偏应变张量根据表达式$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{dev}}=\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}$求解.

应力场变量的刚度矩阵计算如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{DDSDDE}\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}} = &[(1-\xi)(1-D)^2+\xi]\mathbf{C} \\ &+[(1-H^+)-(1-D)^2]K\,\mathbf{I}\otimes\mathbf{I},\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{DDSDDT}\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{\mathrm{d}\tilde{e}} = &2(1-\xi)(1-D) \\ &\cdot\frac{\partial D}{\partial\kappa}(\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}-K\,\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}).\end{aligned} \tag{31}$$

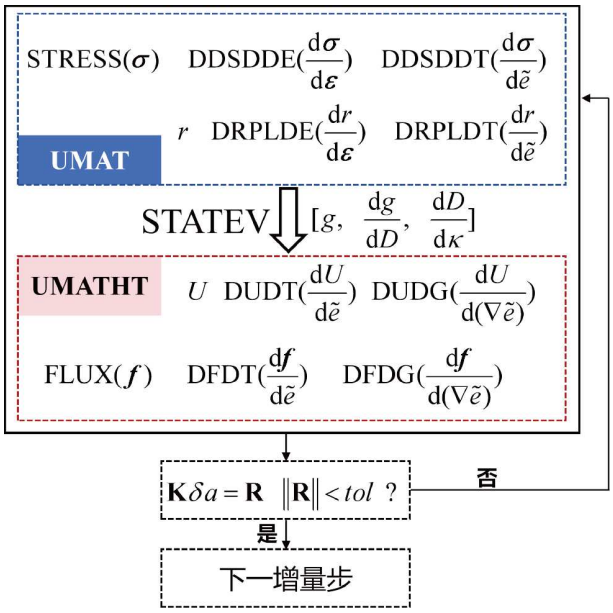


图 2　(网络版彩图)基于UMAT-UMATHT的体积/偏应变能分解局域化梯度损伤模型数值实现流程图. **K**是切线刚度矩阵, δa是增量节点自由度矢量, **R**是残余力矢量, tol是容差

Figure 2　(Color online) Flowchart for numerical implementation of the localizing gradient damage model with volumetric/deviatoric strain energy decomposition via UMAT and UMATHT. **K** is the tangent stiffness matrix, δa is the incremental nodal degree-of-freedom vector, **R** is the residual force vector, and tol is the tolerance.

UMAT变量RPL表示为: RPL = $r = \varepsilon_{\rm eq} - \tilde{e}$. RPL对场变量$\boldsymbol{\varepsilon}$和$\tilde{e}$的梯度表示为

$$\mathrm{DRPLDE} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \varepsilon_{\rm eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{32}$$

$$\mathrm{DRPLDT} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tilde{e}} = -1, \tag{33}$$

式中, 等效应变$\varepsilon_{\rm eq}$对应变场张量的梯度推导为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon_{\rm eq}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \dfrac{(k-1)H^+}{2k(1-2\nu)}\left[1+\dfrac{(k-1)I_1}{(1-2\nu)\sqrt{\Theta}}\right]\dfrac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{2(1+\nu)^2\sqrt{\Theta}}\dfrac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \Theta = H^+\left[\dfrac{(k-1)I_1}{1-2\nu}\right]^2+\dfrac{2kJ_2}{(1+\nu)^2}. \end{cases} \tag{34}$$

UMATHT变量**f**的偏导运算涉及从UMAT传递的损伤状态变量计算如下:

$$\frac{\partial g}{\partial D} = \frac{\eta(R-1)\exp(-\eta D)}{1-\exp(-\eta)}, \tag{35}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \kappa} = \alpha\beta\frac{\kappa}{\kappa_0}\exp[-\beta(\kappa-\kappa_0)] + \frac{\kappa_0}{\kappa^2}\left\{1-\alpha+\alpha\exp[-\beta(\kappa-\kappa_0)]\right\}. \tag{36}$$

式(34)和(35)求解的相关变量存储在UMAT数组STATEV中, 该数组将在计算UMATHT时调用.

在UMATHT中, 定义内能U为形态变量$\tilde{e}$的线性函数:

$$U \overset{\mathrm{def}}{=} c\tilde{e}, \tag{37}$$

式中, c为常数. 关于参数c的讨论详见Zhang等人[33]的工作, 按照其中讨论, 接下来参数c取0.005.

相对于场变量的内能梯度表示为

$$\mathrm{DUDT} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tilde{e}} = c, \tag{38}$$

$$\mathrm{DUDG} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}(\nabla\tilde{e})} = \mathbf{0}. \tag{39}$$

其他UMATHT标准量分别表示为

$$\mathrm{FLUX} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbf{f} = -gl^2\nabla\tilde{e}, \tag{40}$$

$$\mathrm{DFDT} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}\tilde{e}} = -l^2\frac{\partial g}{\partial D}\frac{\partial D}{\partial \kappa}\nabla\tilde{e}, \tag{41}$$

$$\mathrm{DFDG} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}(\nabla\tilde{e})} = -gl^2\mathbf{I}, \tag{42}$$

式中, g, $\partial g/\partial D$, $\partial D/\partial\kappa$从存储在UMAT中的数组STATEV读取.

3.2　数值方法验证

采用具有拉压不对称损伤状态的悬臂梁模型验证本文所提出体积/偏应变能分解LGDM模型的正确性. 模拟分析图3(a)所示的左端固定、右端施加垂直向下载荷的悬臂梁模型开裂过程. 在图3(a)所示加载下, 悬臂梁应沿固定端上方产生I型开裂, 且固定端上方受拉、下方受压, 损伤具有拉压不对称性. 模拟单位体系: mm, MPa. 材料参数为: 弹性模型$E = 1\times10^3$ MPa, 泊松比$\nu = 0.2$. 损伤模型参数设置为: 拉压强度比$k = 10$, 损伤起始阈值$\kappa_0 = 2\times10^{-3}$, 长度尺度参数$l = 2$ mm, 损伤软化参数$\alpha = 0.99$, $\beta = 10$.

采用CPE8T平面应变单元, 分别以三种不同网格密度(24931, 36987和47966个单元)进行数值计算, 以检查网格收敛性. 不同网格密度下的力-位移曲线归一化计算结果如图3(b)所示. 可以看出, 网格数为36987时力学响应结果已趋于收敛. 这表明本工作提出的体

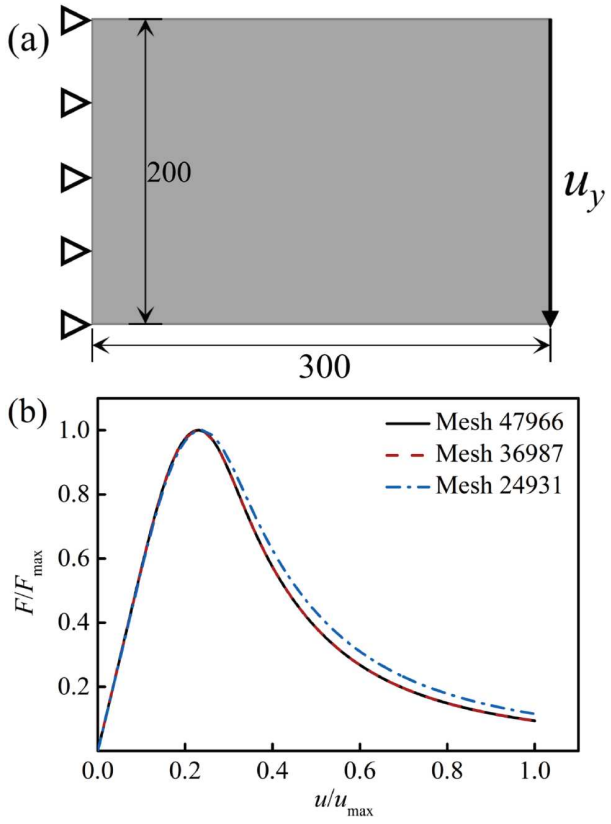


图 3　(网络版彩图)悬臂梁模型示意图. (a) 模型尺寸及加载, (b) 网格收敛性分析

Figure 3　(Color online) Schematic diagram of a cantilever beam model. (a) Model dimensions and loading, (b) mesh convergence analysis.

积/偏应变能分解LGDM模型具有网格无关性.

图4和5分别对比了传统LGDM模型和本文提出的能量分解LGDM模型模拟的悬臂梁开裂结果. 体积/偏应变能分解LGDM模型采用第3节中的UMAT-UMATHT子程序进行数值实现. 从图4所示的传统LGDM模型模拟结果可以看出, 裂纹从梁的顶部和底部同时向中间扩展, 损伤在拉伸和压缩状态下均发生演化. 这是由于传统LGDM模型中的损伤变量D由总应变能驱动, 导致压缩区域产生了与真实不符的虚假损伤.

而在图5所示的体积/偏应变能分解LGDM模型结果中, 裂纹仅从梁的顶部向下扩展到底部, 损伤仅在拉伸状态下出现, 压缩区域未产生损伤. 本文采用的体积/偏应变能分解策略强调了基于物理机制的损伤驱动力, 即拉伸相关体积应变能W_V^+和偏应变能W_d共同驱动损伤演化, 而压缩相关体积应变能W_V^-与损伤无关.

体积/偏应变能分解LGDM模型的峰值载荷、损伤带宽和计算时间分别为2.90 N, 4.31 mm, 284 s. 传统LGDM模型的峰值载荷、损伤带宽和计算时间分别为3.49 N, 12.24 mm, 179 s. 因此, 本文提出的体积/偏应变能分解LGDM模型可有效模拟拉压不对称载荷下的裂纹扩展行为, 消除了压缩状态下的虚假损伤结果, 使损伤局部化程度更高、裂纹形貌更窄, 更接近真实裂纹几何形貌.

4　拉压混合状态下的复合型裂纹损伤模拟

4.1　双边缺口试样模拟

本节通过对比双边缺口试样模型的损伤开裂模拟结果和实验结果, 验证本文所提出的体积/偏应变能分解LGDM模型对I-II复合型开裂的模拟能力. 双边缺口试样模型的几何尺寸和加载方式如图6(a)所示. 模拟采用单位体系: mm, MPa. 材料参数设置为: 弹性模型$E = 3 \times 10^4$ MPa, 泊松比$\nu = 0.2$. 损伤模型参数设置为: 拉压强度比$k = 15.05$, 损伤起始阈值$\kappa_0 = 9.8 \times 10^{-5}$, 长

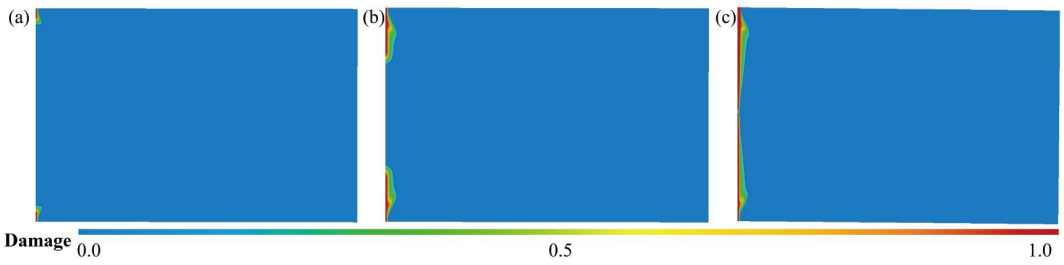


图 4　(网络版彩图)传统LGDM的悬臂梁模型开裂损伤模拟结果. 图(a)–(c)为损伤起始到破坏的过程

Figure 4　(Color online) Simulation results of crack damage in a cantilever beam model using the traditional LGDM. Figures (a)–(c) show the process from damage initiation to failure.

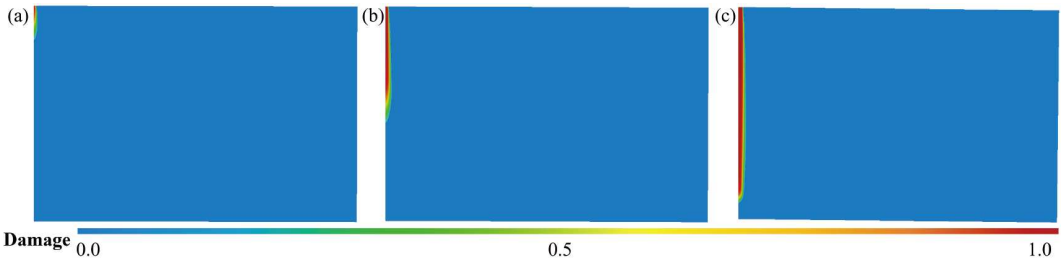


图 5　(网络版彩图)体积/偏应变能分解LGDM模型的悬臂梁模型开裂损伤过程模拟结果. 图(a)–(c)为损伤起始到破坏的过程

Figure 5　(Color online) Simulation results of crack damage in a cantilever beam model using the LGDM with volumetric/deviatoric strain energy decomposition. Figures (a)–(c) show the process from damage initiation to failure.

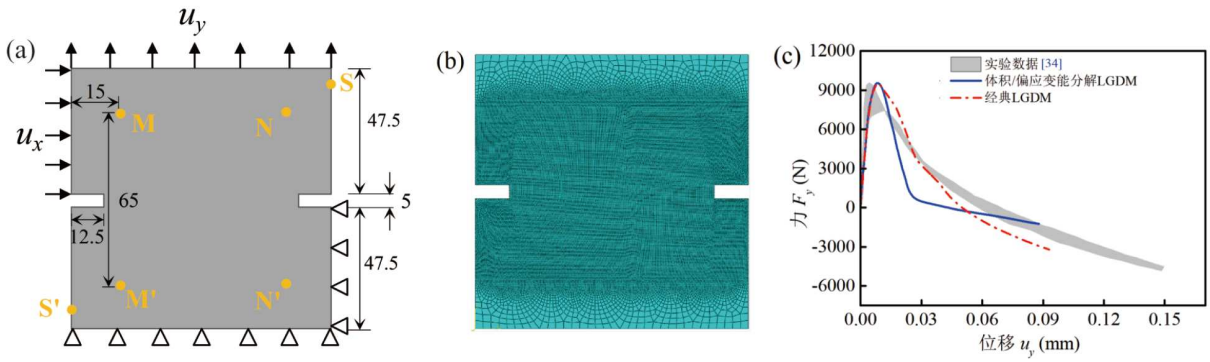


图 6　(网络版彩图)双边缺口试样模型. (a) 模型示意图, (b) 网格划分, (c) 模拟和实验的力-位移曲线对比

Figure 6　(Color online) Double-edge notched specimen model. (a) Schematic of the model, (b) mesh results, (c) comparison of force-displacement curves between simulation and experiment.

度尺度参数$l = 2$ mm, 损伤软化参数$\alpha = 0.99$, $\beta = 30$. 采用CPS8T平面应力单元求解. 对模型同时施加纵向和横向的双轴载荷, 其中MN点和M′N′点的平均相对竖向位移等于SS′点的横向位移.

网格划分结果如图6(b)所示. 经过网格敏感性分析后, 模型收敛网格数量为30797, 其中裂纹附近采用0.5 mm的精细网格. 在双轴加载条件下, 材料内部形成双轴应力状态, 发生局部剪切和弯曲变形. 裂尖区域产生高应力三轴度. 横向压缩抑制裂尖张开, 纵向拉伸则会促进裂纹扩展. 最终导致模型中产生I-II复合型裂纹扩展. 模拟得到的力-位移曲线与实验结果对比如图6(c)所示.

图7展示了体积/偏应变能分解LGDM模型的裂纹模拟结果与实验结果[34]对比. 可以看出, 本文提出的模型可使损伤局部化, 模拟出良好的裂纹形貌, 得到与试验结果一致的两条平行裂纹. 裂纹同时从双边缺口处萌生并沿倾斜方向扩展. 裂纹末端受缺口干涉而发生略微偏转, 其弯曲程度接近实验观测结果. 因此, 对于双边缺口试样的复合型断裂问题, 本文提出的体积/偏应变能分解LGDM模型能准确模拟其裂纹扩展行为.

对于双边缺口试样, 体积/偏应变能分解LGDM模型的峰值载荷、起裂角度、损伤带宽和计算时间分别为9.52 kN, 19.98°, 4.56 mm, 718 s. 传统LGDM模型的峰值载荷、起裂角度、损伤带宽和计算时间分别为9.60 kN, 18.55°, 20.38 mm, 527 s. 可以看出, 二者模拟得到的峰值载荷和裂纹起裂角度是接近的. 本文提出数值方法模拟的裂纹损伤演化聚集在一个更窄的带状区域内, 抑制了传统LGDM模型的过度损伤弥散, 最终可以模拟出更符合物理的损伤轮廓和裂纹路径.

4.2　L形梁试样模拟

采用L形梁模型分析本文所提出的体积/偏应变能分解LGDM模型对I-II复合型裂纹扩展过程的模拟效果. 单位体系: mm, MPa. 材料参数为: 弹性模型E = 25850 MPa, 泊松比ν = 0.18. 损伤模型参数设置为:

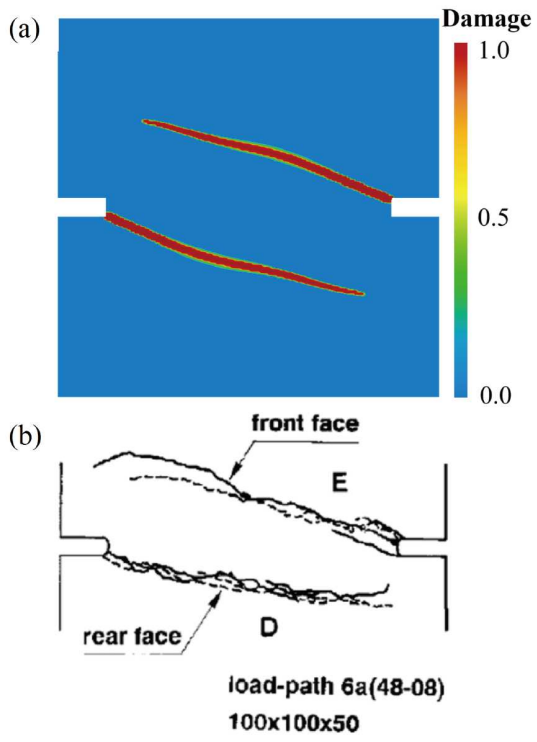


图 7　(网络版彩图)双边缺口试样复合型裂纹模拟结果. (a) 体积/偏应变能分解LGDM模型模拟结果, (b) 实验结果[34]

Figure 7　(Color online) Simulation results for the mixed-mode cracking in a double-edge notched specimen. (a) Simulated cracks from the LGDM with volumetric/deviatoric strain energy decomposition, (b) experimental results [34].

拉压强度比k = 15, 损伤起始阈值$\kappa_0 = 1.2 \times 10^{-4}$, 长度尺度参数$l$ = 8 mm, 损伤软化参数α = 0.99, β = 200. 采用CPS8T平面应力单元求解.

L形梁模型的几何尺寸和加载方式如图8(a)所示, 网格划分结果如图8(b)所示. 经过网格敏感性分析, L形梁模型收敛网格数量为12222, 其中裂纹附近区域采用2 mm的精细网格.

L形梁模型右臂受拉、下臂受压, 拐角处受强烈剪切作用, 形成一个复杂的多轴应力状态, 从而引发I-II复合型断裂. 模拟得到的L形梁力-位移曲线与实验结果对比如图8(c)所示. 图9展示了其裂纹扩展过程. 白线圈出区域为实验中观测到的断裂区域[35]. 可以看出, 体积/偏应变能分解LGDM模型模拟的损伤区域集中在狭窄带状区域内, 裂纹路径清晰、局部化良好, 裂纹开口与长度接近真实脆性断裂模式. 体积/偏应变能分解LGDM模型的峰值载荷、起裂角度、损伤带宽和计算时间分别为7.39 kN, 36.10°, 15.37 mm, 694 s. 传统LGDM模型的峰值载荷、起裂角度、损伤带宽和计算时间分别为7.71 kN, 37.28°, 52.66 mm, 455 s. 因此, 本文采用的体积/偏应变能分解策略有效抑制了压缩状态下的虚假损伤, 使准脆性裂纹萌生、扩展、断裂过程更符合物理预期.

此外, 围压是影响混凝土等材料的破坏机制发生根本性转变的重要因素[36,37]. 在本文中, 基于体积/偏应变能分解, 损伤驱动力为拉伸相关体积应变能和偏应变能, 其中偏应变能在拉压状态下均贡献损伤. 这一机制在低围压至中等围压(<30 MPa)[36]的准脆性断裂问题中是合理的——此时剪切带形成过程中偏应变能主导损伤演化. 然而, 当围压超过30 MPa时, 材料破坏机制从脆性开裂逐渐过渡为延性剪切带甚至孔隙坍塌. 在此高围压范围内, 材料的不可逆变形应由塑性机制描述, 纯损伤模型不再适用. 因此, 本文构建的体积/偏应变能分解局域化梯度损伤模型在低围压下物理机制适用, 高围压下的弹塑性损伤耦合将是本模型未来

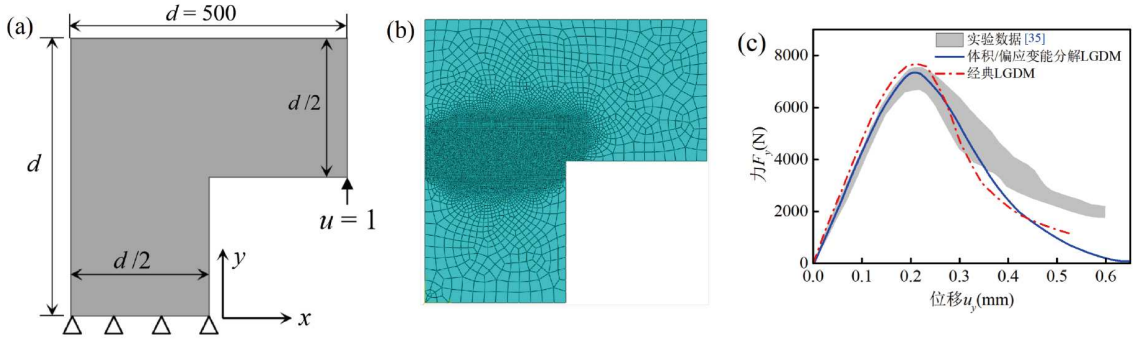


图 8　(网络版彩图) L形梁试样模型. (a) 模型示意图, (b) 网格划分结果, (c) 模拟和实验的力-位移曲线对比

Figure 8　(Color online) L-shaped beam specimen model. (a) Schematic of the model, (b) mesh results, (c) comparison of force-displacement curves between simulation and experiment.

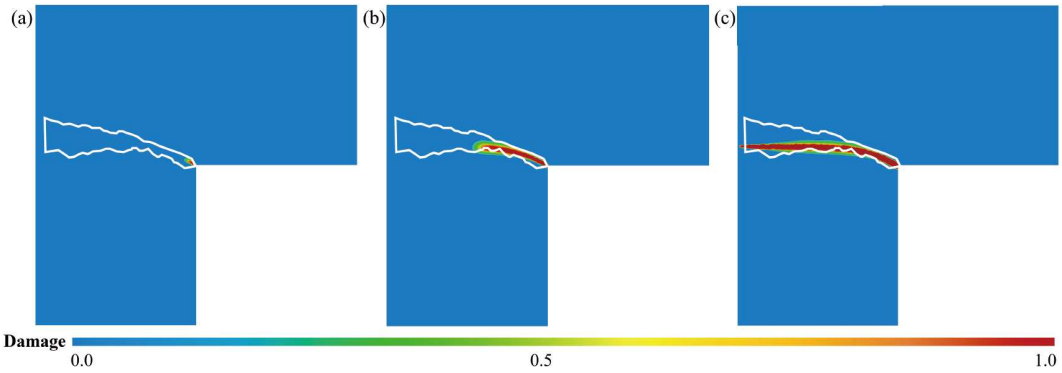


图 9　(网络版彩图)体积/偏应变能分解LGDM模型模拟L形梁复合型断裂过程. 图(a)–(c)为复合型裂纹萌生、扩展至破坏的全过程

Figure 9　(Color online) Simulation of mixed-mode fracture process in an L-shaped beam using the LGDM with volumetric/deviatoric strain energy decomposition. Figures (a)–(c) depict the entire process of mixed-mode crack initiation, propagation, and final failure.

的扩展方向.

5　结论

本文构建了一种基于体积/偏应变能分解的准脆性材料局域化梯度损伤模型, 并在UMAT-UMATHT有限元框架下实现了数值求解. 通过对比实验结果验证了其在复合型裂纹扩展模拟中的有效性. 主要结论如下:

(1) 将总应变能分解为体积应变能和偏应变能, 并采用拉伸相关体积应变能和偏应变能共同驱动损伤演化, 有效抑制了压缩状态下的虚假损伤.

(2) 通过UMAT-UMATHT有限元耦合框架实现了能量分解局域化梯度损伤模型的数值求解, 数值结果证明了该方法具有良好的网格无关性.

(3) 本文提出的基于体积/偏应变能分解的局域化梯度损伤模型可以有效模拟准脆性材料的复合型裂纹扩展行为, 有效捕捉损伤演化的拉压不对称性.

参考文献

1　Sladek J, Sladek V, Stanak P, et al. Fracture mechanics analysis of size-dependent piezoelectric solids. Int J Solids Struct, 2017, 113-114: 1–9
2　Gu Y, Zhang C Z. High-order time-spectral BEM for efficient dynamic analysis of 2D thin-walled structures (in Chinese). Chin Sci Bull, 2026, 71: 685–693 [谷岩, 张传增. 二维超薄结构动态瞬时问题的高阶时域边界元法. 科学通报, 2026, 71: 685–693]
3　Wang Z, Poh L H. A homogenized localizing gradient damage model with micro inertia effect. J Mech Phys Solids, 2018, 116: 370–390
4　Poh L H, Peerlings R H J, Geers M G D, et al. An implicit tensorial gradient plasticity model—Formulation and comparison with a scalar gradient model. Int J Solids Struct, 2011, 48: 2595–2604
5　Shen X P, Shen G X, Chen L X, et al. Investigation on gradient-dependent nonlocal constitutive models for elasto-plasticity coupled with damage (in Chinese). Appl Math Mech, 2005, 26: 201–214 [沈新普, 沈国晓, 陈立新, 等. 梯度增强的弹塑性损伤非局部本构模型研究. 应用数学和力学, 2005, 26: 201–214]
6　Pereira L F, Weerheijm J, Sluys L J. A numerical study on crack branching in quasi-brittle materials with a new effective rate-dependent nonlocal damage model. Eng Fract Mech, 2017, 182: 689–707
7　Pijaudier-Cabot G, Bažant Z P. Nonlocal damage theory. J Eng Mech, 1987, 113: 1512–1533
8　Peerlings R H J, de Borst R, Brekelmans W A M, et al. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. Int J Numer Meth Eng, 1996, 39: 3391–3403
9　Peerlings R H J, Geers M G D, de Borst R, et al. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. Int J Solids Struct, 2001, 38: 7723–7746
10　Giry C, Dufour F, Mazars J. Stress-based nonlocal damage model. Int J Solids Struct, 2011, 48: 3431–3443

11 Nguyen G D. A damage model with evolving nonlocal interactions. Int J Solids Struct, 2011, 48: 1544–1559

12 Havlásek P, Grassl P, Jirásek M. Analysis of size effect on strength of quasi-brittle materials using integral-type nonlocal models. Eng Fract Mech, 2016, 157: 72–85

13 Poh L H, Sun G. Localizing gradient damage model with decreasing interactions. Numer Meth Eng, 2017, 110: 503–522

14 Sarkar S, Singh I V, Mishra B K. A localizing gradient plasticity model for ductile fracture. Comput Methods Appl Mech Eng, 2022, 388: 114205

15 Castillo D, Nguyen T H, Niiranen J. Spatially random modulus and tensile strength: Contribution to variability of strain, damage, and fracture in concrete. Int J Damage Mech, 2021, 30: 1497–1523

16 Shedbale A S, Sun G, Poh L H. A localizing gradient enhanced isotropic damage model with Ottosen equivalent strain for the mixed-mode fracture of concrete. Int J Mech Sci, 2021, 199: 106410

17 Tong T, Yuan S, Wang J, et al. The role of bond strength in structural behaviors of UHPC-NC composite beams: Experimental investigation and finite element modeling. Compos Struct, 2021, 255: 112914

18 Negi A, Singh U, Kumar S. Structural size effect in concrete using a micromorphic stress-based localizing gradient damage model. Eng Fract Mech, 2021, 243: 107511

19 Zhang Y, Shedbale A S, Gan Y, et al. Size effect analysis of quasi-brittle fracture with localizing gradient damage model. Int J Damage Mech, 2021, 30: 1012–1035

20 Sarkar S, Singh I V, Mishra B K. A simplified continuous-discontinuous approach to fracture based on decoupled localizing gradient damage method. Comput Methods Appl Mech Eng, 2021, 383: 113893

21 Sarkar S, Singh I V, Mishra B K, et al. A comparative study and ABAQUS implementation of conventional and localizing gradient enhanced damage models. Finite Elem Anal Des, 2019, 160: 1–31

22 Wang Z, Shedbale A S, Kumar S, et al. Localizing gradient damage model with micro inertia effect for dynamic fracture. Comput Methods Appl Mech Eng, 2019, 355: 492–512

23 Xu Y, Poh L H. Localizing gradient-enhanced Rousselier model for ductile fracture. Numer Meth Eng, 2019, 119: 826–851

24 Xu Y, Biswas R, Poh L H. Modelling of localized ductile fracture with volumetric locking-free tetrahedral elements. Numer Meth Eng, 2020, 121: 2626–2654

25 Sun G, Poh L H. Homogenization of intergranular fracture towards a transient gradient damage model. J Mech Phys Solids, 2016, 95: 374–392

26 Forest S. Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity, and damage. J Eng Mech, 2009, 135: 117–131

27 Xiong W, Ye X, Cheng H, et al. Three-dimensional fracture of UO_2 ceramic pellets by phase field modeling. Sci China-Phys Mech Astron, 2025, 68: 214612

28 Chen B H, Zhen Y, Ni Y. 3D thermo-mechanical coupled phase-field fracture modeling of HMX single crystal with anisotropic thermal expansion (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2026, 56: 264620 [陈博涵, 甄宇, 倪勇. 热膨胀各向异性HMX单晶热力耦合断裂的三维相场模拟. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2026, 56: 264620]

29 Miehe C, Hofacker M, Welschinger F. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. Comput Methods Appl Mech Eng, 2010, 199: 2765–2778

30 Borden M J, Verhoosel C V, Scott M A, et al. A phase-field description of dynamic brittle fracture. Comput Methods Appl Mech Eng, 2012, 217-220: 77–95

31 Tang S, Zhang G, Guo T F, et al. Phase field modeling of fracture in nonlinearly elastic solids via energy decomposition. Comput Methods Appl Mech Eng, 2019, 347: 477–494

32 Wang J, Poh L H, Guo X. Localizing gradient damage model based on a decomposition of elastic strain energy density. Eng Fract Mech, 2023, 279: 109032

33 Zhang Y, Xu Y, Wang Y, et al. A simple implementation of localizing gradient damage model in Abaqus. Int J Damage Mech, 2022, 31: 1562–1591

34 Nooru-Mohamed M B. Mixed-Mode Fracture of Concrete: An Experimental Approach. Dissertation for Doctoral Degree. Delft: Delft University of Technology, 1992

35 Winkler B J. Traglastuntersuchungen von Unbewehrten und Bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines Objektiven Werkstoffgesetzes für Beton. Dissertation for Doctoral Degree. Innsbruck: Universitat Innsbruck, 2001

36 Lei B, Qi T, Li Y, et al. An enhanced damaged plasticity model for concrete under cyclic and monotonic triaxial compression. Eur J Mech-A

Solids, 2023, 100: 104999

37 Liu S, Shi X B, Hao Y F. Constitutive model and failure criteria of alkali-activated concrete under confining pressure (in Chinese). J Chin Ceram Soc, 2023, 51: 1920–1927 [刘杉, 石晓贝, 郝逸飞. 围压作用下碱激发混凝土的本构模型与破坏准则. 硅酸盐学报, 2023, 51: 1920–1927]

Quasi-brittle localizing gradient damage model based on volumetric/deviatoric strain energy decomposition

DONG YingXuan[1,2] & LI Qun[1*]

[1] *State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, School of Aerospace Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*

[2] *Department of Civil and Environmental Engineering, National University of Singapore, Singapore 119260, Singapore*

**Corresponding author (email: qunli@xjtu.edu.cn)*

The localizing gradient damage model offers advantages such as high computational efficiency and the ability to realistically simulate crack morphology. However, its damage evolution is driven by the total strain energy, which may lead to spurious damage under significant compressive stress states. In this study, an energy-decomposed localizing gradient damage model for simulating mixed-mode fracture in quasi-brittle materials is developed and numerically implemented within a fully coupled thermo-mechanical finite element framework. This approach overcomes the limitation of traditional localizing gradient damage theory in addressing tension-compression asymmetry in damage behavior. The total strain energy W is decomposed into tensile volumetric strain energy W_V^+, compressive volumetric strain energy W_V^-, and deviatoric strain energy W_d. The damage-related term in the free energy density is modified such that it is driven solely by W_V^+ and W_d, while being independent of W_V^-. Numerical results demonstrate that the proposed method can naturally simulate mixed-mode crack propagation in quasi-brittle materials, suppress spurious damage under compression, effectively capture tension-compression asymmetry, and maintain mesh objectivity. Comparisons with experimental results from double-edge notched specimens and L-shaped beam specimens validate the accuracy of the proposed damage model in simulating mixed-mode crack propagation.

gradient damage theory, energy decomposition, mixed-mode fracture

PACS: 46.50.+a, 62.20.Mk, 46.15.-x, 46.05.+b

doi: 10.1360/SSPMA-2025-0655